Gerd Fischer

Lineare Algebra

vieweg studium
Grundkurs Mathematik

Diese Reihe wendet sich an Studierende der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächer. Ihnen – und auch den Schülern der Sekundarstufe II – soll die Vorbereitung auf Vorlesungen und Prüfungen erleichtert und gleichzeitig ein Einblick in die Nachbarfächer geboten werden. Die Reihe wendet sich aber auch an den Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieur in der Praxis und an die Lehrer dieser Fächer.

Zu der Reihe vieweg studium gehören folgende Abteilungen:

Basiswissen, Grundkurs und Aufbaukurs

vieweg

Gerd Fischer

Lineare Algebra

14., durchgesehene Auflage

Mit 68 Abbildungen

vieweg

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Gerd Fischer
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
40225 Düsseldorf

gerdfischer@cs.uni-duesseldorf.de

1. Auflage Mai 1975
2. Auflage Dezember 1975
3. Auflage November 1976
4. Auflage Februar 1978
5. Auflage April 1979
6. Auflage Oktober 1980
7. Auflage Dezember 1981
8. Auflage April 1984
9. Auflage März 1986
10. Auflage Oktober 1995
11. Auflage November 1997
12. Auflage September 2000
13. Auflage Juli 2002
14. Auflage November 2003

Alle Rechte vorbehalten
© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2003
www.vieweg.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

ISBN 978-3-528-03217-3 ISBN 978-3-322-91820-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-91820-8

We must not accept the old blasphemous nonsense
that the ultimate justification of mathematical science
is the „glory of the human mind“.
Abstraction and generalization
are not more vital for mathematics
than individuality of phenomena
and, before all,
not more than inductive intuition.
Only the interplay of these forces and their synthesis
can keep mathematics alive
and prevent its drying out into a dead skeleton.

RICHARD COURANT

Vorwort zur 10. Auflage

Die erste im Jahr 1975 veröffentlichte Auflage dieses Buches war entstanden aus meiner Vorlesung im Wintersemester 1972/73 an der Universität Regensburg und einer von Richard Schimpl angefertigten Ausarbeitung, die als Band 1 der Reihe „Der Regensburger Trichter“ erschienen war. Es freut mich, daß das Buch in den vergangenen 20 Jahren so viel Anklang gefunden hat.

Im Jahr 1994/95 hatte ich an der Universität Düsseldorf wieder einmal Gelegenheit, eine Anfängervorlesung über „Lineare Algebra“ zu halten. Dabei fand ich in dem alten Buch zahllose Dinge, die man wohl besser erklären kann. Dazu kam die Versuchung, die Möglichkeiten von LaTeX zu nutzen, was schließlich dazu geführt hat, daß ich fast das ganze Buch neu aufgeschrieben habe.

Geblieben ist die Überzeugung, daß am Anfang jeder Theorie Probleme stehen müssen, und daß die entwickelten Methoden danach zu bewerten sind, was sie zur Lösung der Probleme beigetragen haben. Dies deutlich zu machen, ist in der linearen Algebra eine vordringliche Aufgabe, weil hier die axiomatische Methode sehr ausgeprägt ist. Mit Hilfe eines wohlorganisierten Instrumentariums von Begriffen können Beweise kurz und klar durchgeführt werden, Rechnungen können weitgehend vermieden werden und erhalten – wo sie notwendig sind – eine Interpretation von einem abstrakteren Standpunkt aus.

Es hat lange gedauert, bis sich die lineare Algebra von einem Hilfsmittel der sogenannten „analytischen Geometrie“ (das ist die Lehre von den linearen und quadratischen geometrischen Gebilden) zu einer selbständigen Disziplin entwickelt hat. Die größten Veränderungen gab es zu Anfang dieses Jahrhunderts, als die axiomatische Methode durch den Einfluß von D. HILBERT und speziell in der Algebra durch EMMY NOETHER ausgebaut wurde. Das zeigt ganz deutlich ein Blick in Lehrbücher aus dieser Zeit, etwa die „klassische“ Darstellung von KOWALEWSKI [Kow 2]* aus dem Jahr 1910 und die 1931 erschienene „moderne“ Version von SCHREIER-SPERNER [S-S]. Dieser Wandel ist vergleichbar mit dem Übergang vom Jugendstil zum Bauhaus. Inzwischen ist die lineare Algebra durchdrungen von einer Ökonomie der Gedanken sowie einer Ästhetik in der Darstellung, und sie ist unentbehrliches Hilfsmittel in vielen anderen Gebieten geworden, etwa der Analysis und der angewandten Mathematik.

Dieser eindrucksvolle Fortschritt ist nicht frei von Gefahren. Die Axiomatik beginnt mit den allgemeinsten Situationen und schreitet fort in Richtung zu spezielleren Sachverhalten. Dieser Weg wurde mit letzter Konsequenz in den Werken von N. BOURBAKI [Bo], [C] beschritten. Er läuft der historischen Entwicklung – die einem „natürlichen Wachstum“ der Mathematik entspricht – jedoch meist entgegen. So wurden etwa *Determinanten* schon von LEIBNIZ um 1690 benutzt, CAYLEY begann 1850 *Matrizen* als eigenständige Objekte anzusehen, der allgemeine Begriff des *Körpers* ist erstmals in dem 1895 bei Vieweg erschienenen „Lehrbuch der Algebra“ von H. WEBER [We] zu finden. Abstrakte Begriffe und ihre Axiome entstehen aus der Entdeckung von Gemeinsamkeiten, sie setzen lange Erfahrung im naiven Umgang und kreative Auseinandersetzung mit den Gegenständen der Mathematik voraus. Eine Darstellung, die mit den Axiomen beginnt, könnte den verhängnisvollen Eindruck erwecken, als seien die aufgestellten Regeln zufällig oder willkürlich. Einer solchen Gefahr entgegenzuwirken, ist das stete Bestreben dieses Buches. Die neue Auflage soll helfen, die abstrakten Begriffe noch mehr zu motivieren und die Beziehungen der linearen Algebra zu ihren Anwendungen deutlicher zu machen.

Viele theoretische Überlegungen der linearen Algebra dienen der Rechtfertigung oder der Entwicklung von Rechenverfahren, mit deren Hilfe man schließlich gegebene Probleme durch eine Iteration lösen kann. Dies wird hier in vielen Fällen bis zur Berechnung konkreter Beispiele vorgeführt. In der Praxis läßt man besser einen Computer rechnen, aber die Schwelle zur Beschreibung von Programmen dafür wurde in diesem Buch mit Vorsatz nicht überschritten. Für einen Anfänger erscheint es mir viel wichtiger, zunächst einmal ohne Ablenkung durch Probleme der Programmierung die Struktur des Lösungsweges zu verstehen und mit einfachsten, im Kopf berechenbaren Beispielen die unmittel-

*Eckige Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis bare gute Erfahrung zu machen, daß ein Algorithmus funktioniert. Danach kann man getrost die Ausführung der Rechnungen einem fertigen Programmpaket wie Maple oder Mathematica überlassen. Etwa im Rahmen der numerischen Mathematik hat man Gelegenheit, die Rechenverfahren genauer zu studieren und dazu weitere Hilfsmittel der linearen Algebra kennen zu lernen (vgl. etwa [Str]).

Dieses Buch ist entstanden aus Vorlesungen für Studienanfänger in den Fächern Mathematik, Physik und Informatik; an Vorkenntnissen ist nur das sogenannte „Schulwissen" (etwa im Umfang von [Sch]) nötig. Es enthält insgesamt genügend viel Material für zwei Semester, dabei gibt es zahlreiche Möglichkeiten für Auswahl und Reihenfolge. Der Text ist meist nach den Regeln der Logik angeordnet, in einer Vorlesung kann es gute Gründe geben, davon abzuweichen. Einige Abschnitte sind durch einen Stern $*$ markiert, als Anregung, sie beim ersten Durchgang zu überspringen und später (etwa im zweiten Semester) darauf zurückzukommen. Die Anwendungen der linearen Algebra auf affine und projektive Geometrie sowie die lineare Optimierung sind in einem eigenen Band [Fi] enthalten, auch damit kann man den vorliegenden Text nach Belieben mischen.

Um Mathematik zu verstehen, genügt es nicht, ein Buch zu lesen oder eine Vorlesung zu hören, man muß selbst an Problemen arbeiten. Als Anregung dazu dienen die zahlreichen Aufgaben. Die dort eingestreuten Sterne sind nicht als Warnung, sondern als besonderer Ansporn zu verstehen.

Der durch diese Neuauflage abgelöste Text war durch zahllose Hinweise von Lesern fast restlos von Druckfehlern befreit worden. Nun gibt es sicher wieder reichlich Nachschub, ich möchte auch die neuen Leser ermuntern, mir „Ansichtskarten" zu schreiben.

Mein Dank gilt all denen, die bei der Neubearbeitung beteiligt waren: In erster Linie Hannes Stoppel, durch dessen Begeisterung, Bücher zu LaTeX-en, ich in dieses Projekt geschlittert bin, Martin Gräf, der mit viel Sorgfalt die Übungsaufgaben zusammengestellt hat, Carsten Töller, dem einfallsreichen Meister der Bilder und dem Verlag für seine stetige Unterstützung.

Düsseldorf, im September 1995 Gerd Fischer

Vorwort zur 14. Auflage

Seit der 10. Auflage hat es nur wenige größere Änderungen gegeben. Sie betreffen Ergänzungen zu Quotientenräumen, Tensorprodukten und äußeren Produkten. Diese grundlegenden abstrakten Begriffe bereiten erfahrungsgemäß Studienanfängern einige Schwierigkeiten; man sollte ihnen jedoch nicht zu lange ausweichen, denn sie treten später als unentbehrliches Hilfsmittel an vielen Stellen wieder auf. Zudem sind sie im hier behandelten Fall von Vektorräumen mit Hilfe von Basen noch recht konkret zu beschreiben.

Birgit Griese und Hannes Stoppel haben die Aufgaben teilweise überarbeitet und ein eigenes Buch mit Lösungen veröffentlicht. Das sollte den Leser nicht davon abhalten, zunächst selbst daran zu arbeiten.

Zahllosen Lesern bin ich dankbar für ihre Hinweise zu Fehlern verschiedenster Art. Besonders Günter M. Ziegler und seine Studenten von der TU Berlin haben unermüdlich gesammelt und Vorschläge für Verbesserungen gemacht, ich habe versucht sie alle einzuarbeiten. Wer trotzdem noch etwas findet wird gebeten, mir das für die Vorbereitung der nächsten Auflage mitzuteilen.

Düsseldorf, im August 2003 Gerd Fischer

Inhaltsverzeichnis