

Otto Forster

**Analysis 1**

# Aus dem Programm

## Mathematik

### **Einführung in die Analysis**

von Th. Sonar

### **Analysis 1 – 3**

von O. Forster

### **Übungsbuch zur Analysis 1**

von O. Forster und R. Wessoly

### **Übungsbuch zur Analysis 2**

von O. Forster und Th. Szymczak

### **Analysis mit Maple**

von R. Braun und R. Meise

### **Lineare Algebra**

von G. Fischer

### **Übungsbuch zur Linearen Algebra**

von H. Stoppel und B. Griese

### **Algorithmische Zahlentheorie**

von O. Forster

Otto Forster

# **Analysis 1**

Differential- und Integralrechnung  
einer Veränderlichen

6., verbesserte Auflage

Mit 45 Abbildungen



Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme  
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei  
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

Prof. Dr. Otto Forster

Mathematisches Institut der LMU

Theresienstr. 39 · 80333 München

E-Mail: forster@rz.mathematik.uni-muenchen.de

WWW: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster>

- |                                 |                                   |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1.– 5. Tausend Januar 1976      | 51.– 60. Tausend September 1985   |
| 6.– 10. Tausend November 1976   | 61.– 70. Tausend August 1987      |
| 11.– 15. Tausend Januar 1978    | 71.– 80. Tausend November 1988    |
| 16.– 20. Tausend September 1979 | 81.– 100. Tausend November 1989   |
| 21.– 25. Tausend September 1980 | 101.– 120. Tausend September 1992 |
| 26.– 30. Tausend September 1981 | 121.– 131. Tausend September 1996 |
| 31.– 35. Tausend September 1982 | 132.– 140. Tausend April 1999     |
| 36.– 40. Tausend September 1983 | 141.– 149. Tausend April 2001     |
| 41.– 45. Tausend Dezember 1983  | 150.– 155. Tausend Oktober 2002   |
| 46.– 50. Tausend Oktober 1984   | 156.– 160. Tausend Oktober 2003   |

6., verbesserte Auflage April 2001

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden,  
2001

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe  
BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)

Konzeption und Layout: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-57224-2

ISBN 978-3-322-91551-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91551-1

---

## Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist entstanden aus der Ausarbeitung einer Vorlesung, die ich im WS 1970/71 für Studenten der Mathematik und Physik des ersten Semesters an der Universität Regensburg gehalten habe. Diese Ausarbeitung wurde später von verschiedenen Kollegen als Begleittext zur Vorlesung benutzt.

Der Inhalt umfaßt im wesentlichen den traditionellen Lehrstoff der Analysis-Kurse des ersten Semesters an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen. Bei der Stoffauswahl wurde angestrebt, dem konkreten mathematischen Inhalt, der auch für die Anwendungen wichtig ist, vor einem großen abstrakten Begriffsapparat den Vorzug zu geben und dabei gleichzeitig in systematischer Weise möglichst einfach und schnell zu den grundlegenden Begriffen (Grenzwert, Stetigkeit, Differentiation, Riemannsches Integral) vorzudringen und sie mit vielen Beispielen zu illustrieren. Deshalb wurde auch die Einführung der elementaren Funktionen vor die Abschnitte über Differentiation und Integration gezogen, um dort genügend Beispielmateriale zur Verfügung zu haben. Auf die numerische Seite der Analysis (Approximation von Größen, die nicht in endlich vielen Schritten berechnet werden können) wird an verschiedenen Stellen eingegangen, um den Grenzwertbegriff konkreter zu machen.

Der Umfang des Stoffes ist so angelegt, daß er in einer vierstündigen Vorlesung in einem Wintersemester durchgenommen werden kann. Die einzelnen Paragraphen entsprechen je nach Länge einer bis zwei Vorlesungs-Doppelstunden. Bei Zeitmangel können die §§ 17 und 23 sowie Teile der §§ 16 (Konvexität) und 20 (Gamma-Funktion) weggelassen werden.

Für seine Unterstützung möchte ich mich bei Herrn D. Leistner bedanken. Er hat die seinerzeitige Vorlesungs-Ausarbeitung geschrieben, beim Lesen der Korrekturen geholfen und das Namens- und Sachverzeichnis erstellt.

Münster, Oktober 1975

O. Forster

## Vorwort zur 5. und 6. Auflage

Die erste Auflage dieses Buches erschien 1976. Seitdem hat es viele Jahrgänge von Studentinnen und Studenten der Mathematik und Physik beim Beginn ihres Analysis-Studiums begleitet. Aufgrund der damaligen Satz-Technik waren bei Neuauflagen nur geringfügige Änderungen möglich. Die einzige wesentliche Neuerung war das Erscheinen des Übungsbuchs zur Analysis 1 [FW].

Bei der 5. Auflage (April 1999) erhielt der Text nicht nur eine neue äußere Form (T<sub>E</sub>X-Satz), sondern wurde auch gründlich überarbeitet, um ihn wo möglich noch verständlicher zu machen. An verschiedenen Stellen wurden Bezüge zur Informatik hergestellt. So erhielt §5, in dem u.a. die Entwicklung reeller Zahlen als Dezimalbrüche (und allgemeiner  $b$ -adische Brüche) behandelt wird, einen Anhang über die Darstellung reeller Zahlen im Computer. In §9 finden sich einige grundsätzliche Bemerkungen zur Berechenbarkeit reeller Zahlen. Verschiedene numerische Beispiele wurden durch Programm-Code ergänzt, so dass die Rechnungen direkt am Computer nachvollzogen werden können. Dabei wurde der PASCAL-ähnliche Multipräzisions-Interpreter ARIBAS benutzt, den ich ursprünglich für das Buch [Fo] entwickelt habe, und der frei über das Internet erhältlich ist (Einzelheiten dazu auf Seite VIII). Die Programm-Beispiele lassen sich aber leicht auf andere Systeme, wie Maple oder Mathematica übertragen. In diesem Zusammenhang sei auch auf das Buch [BM] hingewiesen.

Insgesamt wurden aber für die Neuauflage die bewährten Charakteristiken des Buches beibehalten, nämlich ohne zu große Abstraktionen und ohne Stoffüberladung die wesentlichen Inhalte gründlich zu behandeln und sie mit konkreten Beispielen zu illustrieren. So hoffe ich, dass das Buch auch weiterhin seinen Leserinnen und Lesern den Einstieg in die Analysis erleichtern wird.

Wertvolle Hilfe habe ich von Herrn H. Stoppel erhalten. Er hat seine T<sub>E</sub>X-Erfahrung als Autor des Buches [SG] eingebracht und den Hauptteil der T<sub>E</sub>Xnischen Herstellung der Neuauflage übernommen. Viele der Bilder wurden von Herrn V. Solinus erstellt. Ihnen sei herzlich gedankt, ebenso Frau Schmickler-Hirzebruch vom Vieweg-Verlag, die sich mit großem Engagement für das Zustandekommen der Neuauflage eingesetzt hat.

Für die 6. Auflage wurde neben der Korrektur von Druckfehlern (den vielen aufmerksamen LeserInnen sei Dank!) der Text an manchen Stellen weiter überarbeitet und es kamen einige neue Übungsaufgaben hinzu.

---

## Inhaltsverzeichnis

Software zum Buch	VIII
1 Vollständige Induktion	1
2 Die Körper-Axiome	10
3 Die Anordnungs-Axiome	17
4 Folgen, Grenzwerte	26
5 Das Vollständigkeits-Axiom	40
6 Quadratwurzeln	53
7 Konvergenz-Kriterien für Reihen	60
8 Die Exponentialreihe	71
9 Punktmengen	78
10 Funktionen. Stetigkeit	89
11 Sätze über stetige Funktionen	98
12 Logarithmus und allgemeine Potenz	107
13 Die Exponentialfunktion im Komplexen	119
14 Trigonometrische Funktionen	127
15 Differentiation	142
16 Lokale Extrema. Mittelwertsatz. Konvexität	154
17 Numerische Lösung von Gleichungen	166
18 Das Riemannsches Integral	176
19 Integration und Differentiation	190
20 Uneigentliche Integrale. Die Gamma-Funktion	204
21 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen	218
22 Taylor-Reihen	232
23 Fourier-Reihen	248
Zusammenstellung der Axiome der reellen Zahlen	263
Literaturhinweise	264
Namens- und Sachverzeichnis	265
Symbolverzeichnis	270
Inhaltsverzeichnis von Analysis 2 und 3	271

## Software zum Buch

Die Programm-Beispiele des Buches sind für ARIBAS geschrieben. Dies ist ein Multipräsisions-Interpreter mit einer PASCAL-ähnlichen Syntax. Er ist (unter der GNU General Public Licence) frei über das Internet erhältlich. Es gibt Versionen von ARIBAS für verschiedene Plattformen, wie MS-DOS, Windows95/98/NT, LINUX und andere UNIX-Systeme. Für diejenigen, die hinter die Kulissen sehen wollen, ist auch der C-Source-Code von ARIBAS verfügbar. Um ARIBAS zu erhalten, gehe man auf die WWW-Homepage des Verfassers,

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster`

und von dort zum Unterpunkt Software/ARIBAS. Dort finden sich weitere Informationen. Da ARIBAS ein kompaktes System ist, muss nur etwa 1/4 MB heruntergeladen werden.

Von der oben genannten Homepage gelangt man über den Unterpunkt Bücher/Analysis auch zur Homepage dieses Buches. Von dort sind die Listings der Programm-Beispiele erhältlich, so dass sie nicht mühsam abgetippt werden müssen. Im Laufe der Zeit werden noch weitere Listings zu numerischen Übungsaufgaben und zu Ergänzungen zum Text dazukommen. Ebenfalls wird dort eine Liste der unvermeidlich zutage tretenden *Errata* abgelegt werden. Die aufmerksamen Leserinnen und Leser seien ermuntert, mir Fehler per Email an folgende Adresse zu melden:

`forster@rz.mathematik.uni-muenchen.de`