

Mathematische Leitfäden

Herausgegeben von Prof. Dr. Dr. h.c. mult. G. Köthe,
Prof. Dr. K.-D. Bierstedt, Universität-Gesamthochschule Paderborn
und Prof. Dr. G. Trautmann, Universität Kaiserslautern

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Einführung in Lehre und Gebrauch

Von Dr. rer. nat. Harro Heuser
o. Professor an der Universität Karlsruhe

3., durchgesehene Auflage
Mit 108 Abbildungen, 709 Aufgaben, zum Teil
mit Lösungen, und zahlreichen Beispielen



B. G. Teubner Stuttgart 1995

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Heuser, Harro:

Gewöhnliche Differentialgleichungen : Einführung in Lehre
und Gebrauch / von Harro Heuser. 3., durchgesehene Aufl. 1995

– Stuttgart : Teubner

(Mathematische Leitfäden)

ISBN 978-3-519-22227-9 ISBN 978-3-322-91185-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91185-8

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1989

A Sally et Rémy avec ma plus grande espérance,
für Katharina und Lisa voller Hoffnung.

Wie verstanden die Alten das Naturgesetz? Für sie war es eine innere Harmonie, sozusagen statisch und unveränderlich; oder es war ein Idealbild, dem nachzustreben die Natur sich bemühte. Für uns hat ein Gesetz nicht mehr diese Bedeutung; es ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen; mit einem Wort: es ist eine Differentialgleichung.

Henri Poincaré, „Der Wert der Wissenschaft“

Vorwort

Dieses Buch ist aus Vorlesungen und Übungen entstanden, die ich mehrfach an der Universität Karlsruhe für Mathematiker, Physiker, Ingenieure und Informatiker gehalten habe. Es ist so geschrieben, daß es zum *Selbststudium* dienen kann: Die Gedankengänge sind ausgiebig *motiviert*, die Beweise *detailliert*, und an durchgerechneten *Beispielen* und gelösten *Aufgaben* herrscht kein Mangel.

Bei der Abfassung schwebte mir vor, nicht nur ein *theoretisches* Gerüst aufzubauen, sondern auch eine Brücke zu den *Anwendungen* zu schlagen. Damit wollte ich zweierlei erreichen: erstens wollte ich ganz nüchtern und pragmatisch den Studenten der Mathematik auf seine spätere Zusammenarbeit mit Naturwissenschaftlern und Ingenieuren einstimmen und im gleichen Atemzug auch dem „Anwender“ den Zugang zu den Differentialgleichungen erleichtern. Zweitens wollte ich – weniger nüchtern und weniger pragmatisch – den Leser auf etwas hinweisen, das zu den Wundern und Kraftquellen unserer Kultur gehört: auf die Tatsache, daß „reines“ Denken, „Hirn-Gespinnst“ – eben *Mathematik* – die reale Welt nachzeichnen und umgestalten kann. Das Staunen hierüber hat denn auch alle Philosophen ergriffen, die nicht bloß Schwadronneure waren. Und noch Einstein fragte verwundert: „Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens, unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?“ Die wissenschaftliche Revolution, die uns noch immer treibt und drängt und drückt, diese sehr revolutionäre Revolution, hat im 17. Jahrhundert begonnen, und ihre Bastillestürmer waren „Hirngespinnste“ *par excellence*: Newtonsche Fluxionen und Leibnizsche Differentiale. Am Anfang der „Fluxionsrechnung“ (der Differential- und Integralrechnung) aber stand – in unserer Sprache gesagt – das Problem, Bewegungsvorgänge als *Differentialgleichungen* zu formulieren und so zu beherrschen. Als dem dreiundzwanzigjährigen Newton dieses Problem aufgeht, da schreibt er im *October 1666 tract on fluxions* ahnungsvoll: „*Could this ever be done all problems whatever might be resolved.*“ Man kann die moderne Zivilisation sehr gut mit diesem programmatisch-propheatischen Satz eines jungen Studenten beginnen lassen.

Henry Pollak hat einmal verärgert gefragt: „*If everybody agrees that connecting mathematics with the real world is a good thing, why doesn't it happen in the classroom?*“ Die Antwort darauf muß wohl lauten: „Weil man in der beschränkten Zeit einer Vorlesung noch nicht einmal die Stoffmassen der *Theorie* bewältigen kann.“ Ein Buch bietet glücklicherweise einen weiteren Rahmen, und so habe ich denn versucht, das hier vorliegende mit soviel Wirklichkeit zu sättigen, wie für ein *mathematisches* Werk irgend angängig ist. Diesem Zweck dienen zahlreiche Beispiele und Aufgaben aus ganz verschiedenen Wissens- und Lebensbereichen: aus Physik, Chemie, Biologie und Ökologie, aus den Ingenieur- und Wirtschaftswissen-

schaften und aus der Medizin. Sie untersuchen so weit auseinanderliegende Dinge wie die Kumulationsgefahr bei Dauereinnahme von Medikamenten und die Frage, wie denn Alexander der Große in den heißen Wüsten Asiens seinen Wein kühlte, sie analysieren die Dynamik eines Geschosses und die einer Seuche, die Schwingungen in elektrischen Netzwerken und in den Beständen von Raub- und Beutetieren, sie handeln von Hängebrücken und Sonnenblumen, vom Raucherbein und vom Wettrüsten. Sie zeigen, wie man Differentialgleichungen nicht nur *löst*, sondern auch *aufstellt*, und wie die „prominenten“ Differentialgleichungen – die logistische, Besselsche, Legendresche usw. – aus konkreten naturwissenschaftlichen Fragestellungen herauswachsen und dann umgekehrt wieder helfen, die allerverschiedensten Probleme zu klären, Probleme, mit denen sie ursprünglich rein gar nichts zu tun hatten. Mit all dem möchte ich den Leser erleben lassen, daß Differentialgleichungen keineswegs tote Haufen mathematischer Symbole, sondern quicklebendige Wesen sind, die ein Herkommen und viele Wirkungskreise haben. Auch die historischen Anmerkungen und biographischen Skizzen sollen zu dieser „Verlebendigung“ beitragen.

Einer guten Tradition folgend habe ich die „elementar-lösbaren“ Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung mitsamt den zugehörigen Existenzbeweisen an den Anfang des systematischen Aufbaues gestellt. Im Geiste dieses Vorgehens habe ich dann auch die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung weit nach vorne gezogen und mit passenden Existenzbeweisen versehen: Ich wollte diese theoretisch interessanten und für die Anwendungen so wichtigen Typen möglichst früh – aber auf festem Fundament – verfügbar machen. Gleichzeitig schien es mir reizvoll und instruktiv, das Existenz- und Eindeutigkeitsproblem von *verschiedenen* Seiten und auf *verschiedenen* Höhenlagen anzugehen. Die allgemeinen Existenzsätze von Peano und Picard-Lindelöf fließen ohne Kunstgriffe aus den Fixpunktsätzen von Schauder und Weissinger; ich habe diesen Weg gewählt, um den Leser frühzeitig mit einigen der mächtigsten Instrumente höherer Analysis vertraut zu machen.

Die „elementar lösbaren“ Differentialgleichungen erster Ordnung verdienen ihren Namen nur sehr eingeschränkt: in der Regel nämlich sind sie *explizit* überhaupt nicht lösbar. Aus diesem betrüblichen Grunde habe ich schon sehr früh *numerische* Verfahren ins Spiel gebracht. Ich wollte so dem Leser das beruhigende Gefühl vermitteln, einer „vernünftigen“ Differentialgleichung immer irgendwie bekommen zu können. Einem ähnlichen Zweck dienen die Abschnitte über Eigenwertberechnungen und -abschätzungen.

Physiker und Ingenieure benutzen zur Lösung linearer Anfangswertaufgaben gerne die *Laplacetransformation*. Der Mathematiker sollte diese Methode kennen, um mitreden zu können, und so habe ich sie denn vorgeführt. Um den Gebrauchswert des Buches zu erhöhen, habe ich überdies im Anhang 2 eine umfangreiche, den meisten praktischen Zwecken genügende Tabelle von Laplacetransformierten aufgenommen (Anhang 1 enthält eine nicht minder nützliche Tabelle unbestimmter Integrale).

Auch ein Mathematiker sollte frühzeitig einüben, das Differentialgleichungsmodell eines Naturprozesses anhand empirischen Materials kritisch zu diskutieren, konkrete Folgerungen aus ihm zu ziehen und sich den Lösungsverlauf so deutlich wie möglich vor Augen zu stellen, wie es Naturwissenschaftler und Ingenieure von alters her tun. Viel Text und viele Bilder sind gerade diesem Zweck gewidmet. Zu seinen Gunsten habe ich, wenn auch nicht leichten Herzens, auf manche theoretische Finesse verzichtet.

Lösungsmethoden habe ich immer durchgerechnete Beispiele beigefügt und diese, wo tunlich, streng schematisch organisiert, nach dem Muster „1. Schritt, 2. Schritt, ...“. Vielleicht habe ich mit der Fülle derartiger Beispiele des Guten etwas zuviel getan; allein, ich habe mich von dem banalen Gedanken leiten lassen, es falle dem Leser leichter, ein vorhandenes Beispiel zu *übergehen* als ein nichtvorhandenes zu *erfinden*. Überdies stand mir Eulers Vorgehen vor Augen: *Aliquot exempla adiungam, ex quibus regulae huius usus facilius perspicietur* (Ich füge einige Beispiele an, aus denen der Gebrauch der obigen Regel leichter zu ersehen ist; Opera (1), 22, S. 211 oben).

Alles in allem habe ich versucht, mich nach dem schönen Satz im Zweiten Buch der Makkabäer, 2,25 zu richten:

So nahmen wir uns vor, diejenigen, die gerne lesen, zu unterhalten, denen, die mit Eifer auswendig lernen, zu helfen, allen aber, die das Buch auf irgendeine Weise in die Hand bekommen, zu nützen.

Es gehört zu den angenehmsten Pflichten eines Autors, all denen Dank zu sagen, ohne deren Hilfe er schwerlich zu Rande gekommen wäre. Ich tue es aus ganzem Herzen. Herr Dipl.-Math. H.-M. Lingenberg hat das Maschinenscript sorgfältig überprüft, viele wertvolle Anregungen gegeben und alle Aufgaben noch einmal durchgerechnet (und das war gut so!). Herr Dipl.-Math. Chr. Schmoeger hat das wenig erquickliche Auszeichnen übernommen. Beide Herren haben darüber hinaus auch noch gewissenhaft das mühselige Korrekturlesen besorgt. Herr Akad. Dir. Dr. E. Gauß hat mich reichlich von seiner reichen Erfahrung in der mathematischen Ausbildung der Ingenieure profitieren lassen und manche Unebenheiten geglättet. Herr Dr. H.-D. Wacker hat zu mehreren diffizilen Fragen seinen gediegenen Rat beige-steuert. Die Herren Stud.-Assessor D. Buksch und Dipl.-Math. M. Müller haben mir tatkräftig bei der Anfertigung der vielen Figuren geholfen, ohne die der Wert des Buches beträchtlich geringer wäre. Herr Müller hat darüber hinaus auf einem PC des Instituts für Praktische Mathematik mit ansteckendem Enthusiasmus alle numerischen Lösungen hergestellt, die man in diesem Buch findet. Viele natur- und ingenieurwissenschaftliche Institute der Universität haben mich beraten und mit realistischen Daten versorgt: unmöglich, sie alle aufzuführen. Frau K. Zeder schließlich hat mit unversiegliger Geduld wieder einmal den Kampf mit meiner Handschrift aufgenommen und ihn wieder einmal – falschen Propheten zum Trotz – mit einem perfekten Maschinenscript beendet. Ihnen allen danke ich auf das herzlichste. Dem Teubner-Verlag danke ich für seine

vielfach bewährte Bereitschaft zur Kooperation und für die vorzügliche Ausstattung auch dieses Buches.

Ein Dank, der zu spät kommt, aber tief empfunden ist, geht an meinen verstorbenen akademischen Lehrer E. Kamke: Er führte mich mit jener gelassenen Präzision, die sein persönlicher Besitz war, in das große Reich der Differentialgleichungen ein. Das war im Sommer 1950.

Karlsruhe, im Juni 1988

Harro Heuser

Vorwort zur dritten Auflage

Das vorliegende Buch ist so freundlich aufgenommen worden, daß ich an seiner Gesamtanlage nichts geändert habe. Der Text wurde jedoch an vielen Stellen verbessert und geglättet.

Karlsruhe, im November 1994

Harro Heuser

Inhalt

Einleitung	13
I Zur Einstimmung	
1 Beispiele von Differentialgleichungen in der Praxis	17
Leibnizens silberne Taschenuhr oder die Traktrix	17
Exponentielles Wachstum	18
Logistisches Wachstum	22
Verbreitung von Gerüchten	25
Freier und verzögerter Fall	27
Fluchtgeschwindigkeit einer Rakete	30
Äquipotential- und Kraftlinien eines elektrischen Feldes	32
2 Grundbegriffe	41
<i>Historische Anmerkung. Newton und Leibniz</i>	44
II Differentialgleichungen erster Ordnung	
3 Das Richtungsfeld und der Euler-Cauchysche Polygonzug. Das Runge-Kutta-Verfahren	53
4 Lineare, Bernoullische, Riccatische Differentialgleichung	59
5 Anwendungen	70
Die Gompertzchen Überlebens- und Wachstumsfunktionen	70
Sättigungsprozesse	71
Ausgleichsprozesse	73
Exponentielle Zerfallsprozesse mit zeitlich konstanter Zufuhr	75
Mischungsprozesse	76
Wurfbahnen	77
Stromkreise	79
6 Die exakte Differentialgleichung	91
7 Integrierende Faktoren	100
8 Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen	102
9 Die eulerhomogene Differentialgleichung und die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$	108
10 Anwendungen	113
Die Eisversorgung Alexanders des Großen	113
Chemische Reaktionskinetik	114
Informationsverbreitung	116

	Scheinwerfer	116
	Grenzeschwindigkeit eines Autos	118
	Orthogonaltrajektorien in cartesischen Koordinaten	118
	Orthogonaltrajektorien in Polarkoordinaten	120
	Das Problem der Brachistochrone	121
	<i>Historische Anmerkung. Jakob und Johann Bernoulli</i>	127
III	Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitssätze für Differentialgleichungen erster Ordnung	
11	Der Existenzsatz von Peano	135
12	Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf	138
13	Abhängigkeitssätze	143
	<i>Historische Anmerkung. Cauchy</i>	146
IV	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	
14	Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung	153
15	Die homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung	163
16	Die inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung	172
	Spezielle Störfunktionen	172
	Methode der Variation der Konstanten	181
	Reihenansätze	185
17	Die Methode der Laplacetransformation	187
	Die Laplacetransformation	187
	Das Anfangswertproblem für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	193
18	Anwendungen	200
	Freie Schwingungen eines Massenpunktes	200
	Erzwungene Schwingungen eines Massenpunktes bei schwacher oder verschwindender Dämpfung	204
	Periodische Zwangskräfte und Fouriermethoden	205
	Elektrische Schwingungskreise	212
	Resonanz	215
	Mathematisches Pendel	218
	Zykloidenpendel	219
	Temperaturverteilung in einem Stab	221
	Nochmals die Eisversorgung Alexanders des Großen oder vom Nutzen tiefer Keller	224
V	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit variablen Koeffizienten	
19	Vorbemerkungen	237
20	Die Eulersche Differentialgleichung	240

10 Inhalt

21	Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz	243
22	Integralbasis und allgemeine Lösung der homogenen Gleichung .	249
23	Reduktion der homogenen Gleichung	254
24	Die Methode der Variation der Konstanten	257
25	Stetige Abhängigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems von den Ausgangsdaten	259
26	Potenzreihenlösungen	260
	Die Airysche Differentialgleichung	261
	Die Hermitesche Differentialgleichung	262
	Die Legendresche Differentialgleichung	264
	Die Tschebyscheffsche Differentialgleichung	268
27	Reihenentwicklungen um schwach singuläre Stellen	274
28	Besselsche Differentialgleichung und Besselsche Funktionen . .	292
29	Laguerresche Differentialgleichung und Laguerresche Polynome .	310
30	Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten .	314
31	Die Mathieusche Differentialgleichung	322
32	Trennungs-, Oszillations- und Amplitudensätze	328
33	Anwendungen	338
	Flüssigkeitsströmung in Rohren. Das Raucherbein	338
	Potential einer elektrischen Punktladung	341
	Wasserwellen in einem Kanal	342
	Schwingungen eines frei herabhängenden Seiles	343
	Knicklast	346
	Die Keplersche Gleichung der Planetenbahn	348
	Das Wasserstoffatom	352
	<i>Historische Anmerkung. Euler</i>	360
VI	Rand- und Eigenwertaufgaben	
34	Die schwingende Saite	372
35	Lineare Randwertaufgaben zweiter Ordnung	377
36	Sturmsche Randwertaufgaben. Die Greensche Funktion . . .	379
37	Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben	384
38	Die Integralgleichung und der Integraloperator der Sturm-Liouvil- leschen Eigenwertaufgabe	391
39	Die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Aufgabe	398
40	Entwicklungssätze	409
41	Die Entwicklung der Greenschen Funktion nach Eigenfunktionen	415
42	Die Auflösung halbhomogener Randwertaufgaben	420
43	Iterative Bestimmung von Eigenwerten	424
44	Einschließungssätze und Extremalprinzipien	429
45	Das Ritzsche Verfahren	438
	<i>Historische Anmerkung: Die schwingende Saite</i>	441

VII	Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	
46	Beispiele und Begriffsbestimmungen	450
	Ein Gefechtsmodell	450
	Abbau eines Medikaments	451
	Begriffsbestimmungen	453
47	Die Eliminationsmethode bei kleinen Systemen	454
48	Vektorwertige Funktionen und die Matrixexponentialfunktion	457
49	Existenz- und Eindeigkeitssätze	462
50	Das charakteristische Polynom einer Matrix	464
51	Die Auflösung des homogenen Systems	467
52	Die Auflösung des inhomogenen Systems	473
53	Die Methode der Laplacetransformation	475
54	Allgemeinere lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	477
	Die Eliminationsmethode	478
	Die Methode der Laplacetransformation	481
55	Anwendungen	483
	Kompartimentmodelle	483
	Mischungsprozesse	486
	Radioaktive Zerfallsreihen	488
	Wiederkäuer	489
	Chemische Reaktionskinetik	489
	Luftverschmutzung bei Inversionswetterlage	489
	Der Einfluß medikamentöser Dauertherapie einer Schwangeren auf den Fötus	490
	Bleiakkumulation im Körper	492
	Gleichstrommotoren	493
	Schwingungstilger	494
VIII	Systeme linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	
56	Der Existenz- und Eindeigkeitssatz	501
57	Integralbasen homogener Systeme	503
58	Die Auflösung inhomogener Systeme	509
IX	Allgemeine Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Differentialgleichung n-ter Ordnung	
59	Beispiele und Begriffsbestimmungen	512
60	Existenz- und Eindeigkeitssätze für Systeme	515
61	Die allgemeine Differentialgleichung n -ter Ordnung	518
62	Reduzierbare Typen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung	519
63	Numerische Lösungsverfahren	525

X	Qualitative Theorie. Stabilität	
64	Ein Beispiel: Das Lotka-Volterrasche Räuber-Beute-Modell . . .	528
65	Grundbegriffe und Grundtatsachen	534
66	Gleichgewichtspunkte und Stabilität bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten	541
67	Die Ljapunoffsche Methode	546
68	Periodische Lösungen	556
69	Anwendungen	559
	Ausbreitungsdynamik ansteckender Krankheiten	559
	Organregeneration	565
	Das Lotka-Volterrasche Wettbewerbsmodell	567
	Wettrüstungsmodelle	568
	Die van der Polsche Gleichung der Elektrotechnik	571
	Anhang 1: Tabelle unbestimmter Integrale	575
	Anhang 2: Tabelle zur Laplacetransformation	581
	Lösungen ausgewählter Aufgaben	586
	Literaturverzeichnis	617
	Symbolverzeichnis	620
	Namen- und Sachverzeichnis	621