**Mathematische Leitfäden**

Herausgegeben von Prof. Dr. Dr. h.c. mult. G. Köthe,
Prof. Dr. K.-D. Bierstedt, Universität-Gesamthochschule Paderborn
und Prof. Dr. G. Trautmann, Universität Kaiserslautern

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Einführung in Lehre und Gebrauch

Von Dr. rer. nat. Harro Heuser
o. Professor an der Universität Karlsruhe

3., durchgesehene Auflage
Mit 108 Abbildungen, 709 Aufgaben, zum Teil
mit Lösungen, und zahlreichen Beispielen

B. G. Teubner Stuttgart 1995

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Heuser, Harro:**
Gewöhnliche Differentialgleichungen : Einführung in Lehre
und Gebrauch / von Harro Heuser. 3., durchgesehene Aufl. 1995
– Stuttgart : Teubner
(Mathematische Leitfäden)
ISBN 978-3-519-22227-9 ISBN 978-3-322-91185-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-91185-8

*A Sally et Rémy avec ma plus grande espérance,*
für Katharina und Lisa voller Hoffnung.

Wie verstanden die Alten das Naturgesetz? Für sie war es eine innere Harmonie, sozusagen statisch und unveränderlich; oder es war ein Idealbild, dem nachzustreben die Natur sich bemühte. Für uns hat ein Gesetz nicht mehr diese Bedeutung; es ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen; mit einem Wort: es ist eine Differentialgleichung.

Henri Poincaré, „Der Wert der Wissenschaft“

# Vorwort

Dieses Buch ist aus Vorlesungen und Übungen entstanden, die ich mehrfach an der Universität Karlsruhe für Mathematiker, Physiker, Ingenieure und Informatiker gehalten habe. Es ist so geschrieben, daß es zum *Selbststudium* dienen kann: Die Gedankengänge sind ausgiebig *motiviert*, die Beweise *detailliert*, und an durchgerechneten *Beispielen* und gelösten *Aufgaben* herrscht kein Mangel.

Bei der Abfassung schwebte mir vor, nicht nur ein *theoretisches* Gerüst aufzubauen, sondern auch eine Brücke zu den *Anwendungen* zu schlagen. Damit wollte ich zweierlei erreichen: erstens wollte ich ganz nüchtern und pragmatisch den Studenten der Mathematik auf seine spätere Zusammenarbeit mit Naturwissenschaftlern und Ingenieuren einstimmen und im gleichen Atemzug auch dem „Anwender" den Zugang zu den Differentialgleichungen erleichtern. Zweitens wollte ich – weniger nüchtern und weniger pragmatisch – den Leser auf etwas hinweisen, das zu den Wundern und Kraftquellen unserer Kultur gehört: auf die Tatsache, daß „reines" Denken, „Hirn-Gespinst" – eben *Mathematik* – die reale Welt nachzeichnen und umgestalten kann. Das Staunen hierüber hat denn auch alle Philosophen ergriffen, die nicht bloß Schwadroneure waren. Und noch Einstein fragte verwundert: „Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens, unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?" Die wissenschaftliche Revolution, die uns noch immer treibt und drängt und drückt, diese sehr revolutionäre Revolution, hat im 17. Jahrhundert begonnen, und ihre Bastillestürmer waren „Hirngespinste" *par excellence*: Newtonsche Fluxionen und Leibnizsche Differentiale. Am Anfang der „Fluxionsrechnung" (der Differential- und Integralrechnung) aber stand – in unserer Sprache gesagt – das Problem, Bewegungsvorgänge als *Differentialgleichungen* zu formulieren und so zu beherrschen. Als dem dreiundzwanzigjährigen Newton dieses Problem aufgeht, da schreibt er im *October* 1666 *tract on fluxions* ahnungsvoll: *„Could this ever bee done all problems whatever might bee resolved."* Man kann die moderne Zivilisation sehr gut mit diesem programmatisch-prophetischen Satz eines jungen Studenten beginnen lassen.

Henry Pollak hat einmal verärgert gefragt: *„If everybody agrees that connecting mathematics with the real world is a good thing, why doesn't it happen in the classroom?"* Die Antwort darauf muß wohl lauten: „Weil man in der beschränkten Zeit einer Vorlesung noch nicht einmal die Stoffmassen der *Theorie* bewältigen kann." Ein Buch bietet glücklicherweise einen weiteren Rahmen, und so habe ich denn versucht, das hier vorliegende mit soviel Wirklichkeit zu sättigen, wie für ein *mathematisches* Werk irgend angängig ist. Diesem Zweck dienen zahlreiche Beispiele und Aufgaben aus ganz verschiedenen Wissens- und Lebensbereichen: aus Physik, Chemie, Biologie und Ökologie, aus den Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften und aus der Medizin. Sie untersuchen so weit auseinanderliegende Dinge wie die Kumulationsgefahr bei Dauereinnahme von Medikamenten und die Frage, wie denn Alexander der Große in den heißen Wüsten Asiens seinen Wein kühlte, sie analysieren die Dynamik eines Geschosses und die einer Seuche, die Schwingungen in elektrischen Netzwerken und in den Beständen von Raub- und Beutetieren, sie handeln von Hängebrücken und Sonnenblumen, vom Raucherbein und vom Wettrüsten. Sie zeigen, wie man Differentialgleichungen nicht nur *löst*, sondern auch *aufstellt*, und wie die „prominenten" Differentialgleichungen - die logistische, Besselsche, Legendresche usw. - aus konkreten naturwissenschaftlichen Fragestellungen herauswachsen und dann umgekehrt wieder helfen, die allerverschiedensten Probleme zu klären, Probleme, mit denen sie ursprünglich rein gar nichts zu tun hatten. Mit all dem möchte ich den Leser erleben lassen, daß Differentialgleichungen keineswegs tote Haufen mathematischer Symbole, sondern quicklebendige Wesen sind, die ein Herkommen und viele Wirkungskreise haben. Auch die historischen Anmerkungen und biographischen Skizzen sollen zu dieser „Verlebendigung" beitragen.

Einer guten Tradition folgend habe ich die „elementar-lösbaren" Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung mitsamt den zugehörigen Existenzbeweisen an den Anfang des systematischen Aufbaues gestellt. Im Geiste dieses Vorgehens habe ich dann auch die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung weit nach vorne gezogen und mit passenden Existenzbeweisen versehen: Ich wollte diese theoretisch interessanten und für die Anwendungen so wichtigen Typen möglichst früh - aber auf festem Fundament - verfügbar machen. Gleichzeitig schien es mir reizvoll und instruktiv, das Existenz- und Eindeutigkeitsproblem von *verschiedenen* Seiten und auf *verschiedenen* Höhenlagen anzugehen. Die allgemeinen Existenzsätze von Peano und Picard-Lindelöf fließen ohne Kunstgriffe aus den Fixpunktsätzen von Schauder und Weissinger; ich habe diesen Weg gewählt, um den Leser frühzeitig mit einigen der mächtigsten Instrumente höherer Analysis vertraut zu machen.

Die „elementar lösbaren" Differentialgleichungen erster Ordnung verdienen ihren Namen nur sehr eingeschränkt: in der Regel nämlich sind sie *explizit* überhaupt nicht lösbar. Aus diesem betrüblichen Grunde habe ich schon sehr früh *numerische* Verfahren ins Spiel gebracht. Ich wollte so dem Leser das beruhigende Gefühl vermitteln, einer „vernünftigen" Differentialgleichung immer irgendwie beikommen zu können. Einem ähnlichen Zweck dienen die Abschnitte über Eigenwertberechnungen und -abschätzungen.

Physiker und Ingenieure benutzen zur Lösung linearer Anfangswertaufgaben gerne die *Laplacetransformation*. Der Mathematiker sollte diese Methode kennen, um mitreden zu können, und so habe ich sie denn vorgeführt. Um den Gebrauchswert des Buches zu erhöhen, habe ich überdies im Anhang 2 eine umfangreiche, den meisten praktischen Zwecken genügende Tabelle von Laplacetransformierten aufgenommen (Anhang 1 enthält eine nicht minder nützliche Tabelle unbestimmter Integrale).

Auch ein Mathematiker sollte frühzeitig einüben, das Differentialgleichungsmodell eines Naturprozesses anhand empirischen Materials kritisch zu diskutieren, konkrete Folgerungen aus ihm zu ziehen und sich den Lösungsverlauf so deutlich wie möglich vor Augen zu stellen, wie es Naturwissenschaftler und Ingenieure von alters her tun. Viel Text und viele Bilder sind gerade diesem Zweck gewidmet. Zu seinen Gunsten habe ich, wenn auch nicht leichten Herzens, auf manche theoretische Finesse verzichtet.

Lösungsmethoden habe ich immer durchgerechnete Beispiele beigefügt und diese, wo tunlich, streng schematisch organisiert, nach dem Muster „1. Schritt, 2. Schritt, ...". Vielleicht habe ich mit der Fülle derartiger Beispiele des Guten etwas zuviel getan; allein, ich habe mich von dem banalen Gedanken leiten lassen, es falle dem Leser leichter, ein vorhandenes Beispiel zu *übergehen* als ein nichtvorhandenes zu *erfinden*. Überdies stand mir Eulers Vorgehen vor Augen: *Aliquot exempla adiungam, ex quibus regulae huius usus facilius perspicietur* (Ich füge einige Beispiele an, aus denen der Gebrauch der obigen Regel leichter zu ersehen ist; Opera (1), 22, S. 211 oben).

Alles in allem habe ich versucht, mich nach dem schönen Satz im Zweiten Buch der Makkabäer, 2,25 zu richten:

So nahmen wir uns vor, diejenigen, die gerne lesen, zu unterhalten, denen, die mit Eifer auswendig lernen, zu helfen, allen aber, die das Buch auf irgendeine Weise in die Hand bekommen, zu nützen.

Es gehört zu den angenehmsten Pflichten eines Autors, all denen Dank zu sagen, ohne deren Hilfe er schwerlich zu Rande gekommen wäre. Ich tue es aus ganzem Herzen. Herr Dipl.-Math. H.-M. Lingenberg hat das Maschinenskript sorgfältig überprüft, viele wertvolle Anregungen gegeben und alle Aufgaben noch einmal durchgerechnet (und das war gut so!). Herr Dipl.-Math. Chr. Schmoeger hat das wenig erquickliche Auszeichnen übernommen. Beide Herren haben darüber hinaus auch noch gewissenhaft das mühselige Korrekturlesen besorgt. Herr Akad. Dir. Dr. E. Gauß hat mich reichlich von seiner reichen Erfahrung in der mathematischen Ausbildung der Ingenieure profitieren lassen und manche Unebenheiten geglättet. Herr Dr. H.-D. Wacker hat zu mehreren diffizilen Fragen seinen gediegenen Rat beigesteuert. Die Herren Stud.-Assessor D. Buksch und Dipl.-Math. M. Müller haben mir tatkräftig bei der Anfertigung der vielen Figuren geholfen, ohne die der Wert des Buches beträchtlich geringer wäre. Herr Müller hat darüber hinaus auf einem PC des Instituts für Praktische Mathematik mit ansteckendem Enthusiasmus alle numerischen Lösungen hergestellt, die man in diesem Buch findet. Viele natur- und ingenieurwissenschaftliche Institute der Universität haben mich beraten und mit realistischen Daten versorgt: unmöglich, sie alle aufzuführen. Frau K. Zeder schließlich hat mit unversieglicher Geduld wieder einmal den Kampf mit meiner Handschrift aufgenommen und ihn wieder einmal – falschen Propheten zum Trotz – mit einem perfekten Maschinenskript beendet. Ihnen allen danke ich auf das herzlichste. Dem Teubner-Verlag danke ich für seine

vielfach bewährte Bereitschaft zur Kooperation und für die vorzügliche Ausstattung auch dieses Buches.

Ein Dank, der zu spät kommt, aber tief empfunden ist, geht an meinen verstorbenen akademischen Lehrer E. Kamke: Er führte mich mit jener gelassenen Präzision, die sein persönlicher Besitz war, in das große Reich der Differentialgleichungen ein. Das war im Sommer 1950.

Karlsruhe, im Juni 1988 Harro Heuser

# Vorwort zur dritten Auflage

Das vorliegende Buch ist so freundlich aufgenommen worden, daß ich an seiner Gesamtanlage nichts geändert habe. Der Text wurde jedoch an vielen Stellen verbessert und geglättet.

Karlsruhe, im November 1994 Harro Heuser

# Inhalt

## VII Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten



## VIII Systeme linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten



## IX Allgemeine Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Differentialgleichung $n$-ter Ordnung