Karl-Heinz Pfeffer

Lineare Algebra für Fachoberschulen

Karl-Heinz Pfeffer

Lineare Algebra für Fachoberschulen

Analytische Geometrie
Komplexe Zahlen

Mit 77 Bildern
und zahlreichen Aufgaben

vieweg

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.

Umschlaggestaltung: Klaus Birk, Wiesbaden
Satz: Kníhtlačiareň Svornosť G.m.b.H., Bratislava
Gedruckt auf säurefreiem Papier
ISBN-13: 978-3-528-03821-2 e-ISBN-13: 978-3-322-89854-8
DOI: 10.1007/978-3-322-89854-8

Vorwort

Das vorliegende Unterrichtswerk zur *Linearen Algebra* (Vektorrechnung) ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für Fachoberschulen der Klassen 12.

Seine grundlegende Konzeption entstammt der langjährigen Unterrichtspraxis des Verfassers an einer Fachoberschule Technik. Die entsprechende Orientierung am technischen und physikalischen Erfahrungs- bzw. Erlebnisbereich der Lernenden ist dabei so erfolgt, daß eine Verwendung in den anderen Fachrichtungen (insbesondere Seefahrt und Agrarwirtschaft) ebenfalls gut möglich ist.

Wegen der spezifisch technischen Akzentuierung eröffnet sich auch ein Unterrichtseinsatz in einschlägigen Berufsoberschulen sowie in Fachgymnasien Technik.

Die Einführung des Vektorbegriffes erfolgt anschauungsorientiert, entsprechend früh wird den Lernenden die Koordinatenschreibweise nahegebracht. Vor diesem geometrischen Hintergrund erschließen sich günstig die nachfolgenden elementaren Rechenoperationen.

Die zwangsläufig mehr theoretischen Ausführungen über *Lineare Abhängigkeit* bzw. *Unabhängigkeit* helfen Verständnis für die Lösbarkeit *Linearer Gleichungssysteme* zu entwickeln. Bewußt werden in diesem Rahmen 2- und 3-reihige Determinanten vorgestellt. Sie finden sich wieder bei der Darstellung von Vektor- und Spatprodukt und im eigenständigen Kapitel über die Analytische Geometrie von Gerade und Ebene.

Die knapp gehaltenen Ausführungen über den *Vektorraum* sind für Interessierte, die sich einen Ausblick verschaffen möchten.

Besonders erwähnenswert ist die zusätzliche Aufnahme des Kapitels über *Komplexe Zahlen*, ein Zugeständnis an die Fachrichtung Technik.

Viele Beispielaufgaben mit Lösungsweg erleichtern das Einüben des Stoffes und motivieren Schülerinnen und Schüler, das umfangreiche, zum großen Teil anwendungsorientierte Aufgabenmaterial anzugehen. Die Aufgabenanordnung ist überwiegend schwierigkeitsgraddifferenziert erfolgt; besonders schwierige Aufgaben sind *kursiv* gekennzeichnet.

Die mit * versehenen Inhalte dienen der Abrundung. Sie können ohne Einfluß auf das weitere Vorgehen auch weggelassen oder zu einem späteren Zeitpunkt erarbeitet werden.

Hannover, im Juli 1995 *Karl-Heinz Pfeffer*

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Zeichen und Begriffe VIII

1 Lineare Algebra 1
1.1 Grundlagen 1
1.1.1 Skalare und vektorielle Größen 1
1.1.2 Der Vektorbegriff 1
1.1.3 Eigenschaften von Vektoren 4
1.1.4 Vektoren im Anschauungsraum 7
1.2 Elementare Rechenoperationen 14
1.2.1 Vektoraddition und -subtraktion 14
1.2.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (S-Multiplikation) 25
*S-Multiplikation in der Geometrie (Teilungsverhältnisse) . . . 35
1.3 Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit 38
1.3.1 Kollineare und nicht-kollineare Vektoren 38
Kollineare Vektoren: Lineare Abhängigkeit 38
Nicht-kollineare Vektoren: Lineare Unabhängigkeit 42
1.3.2 Komplanare und nicht-komplanare Vektoren 43
Vektoren in der Ebene als Linearkombination 44
Vektoren im Raum als Linearkombination 46
*1.3.3 Lineare Unabhängigkeit als Beweismittel in der Geometrie . . . 51
1.4 Lineare Gleichungssysteme 53
1.4.1 Grundlegendes 53
1.4.2 Lösbarkeit quadratischer LGS'e 55
Homogenes LGS 55
Inhomogenes LGS 56
1.4.3 Koeffizientenmatrix und Determinanten 59
*Erweiterte Koeffizienten-Matrix (System-Matrix) 67
*1.5 Der Vektorraum 71
1.6 Vektor-Multiplikationen 74
1.6.1 Das Skalarprodukt 74
*1.6.2 Das Vektorprodukt 82
*1.6.3 Das Spatprodukt 89

2 Analytische Geometrie 92
2.1 Analytische Geometrie der Geraden 92
2.1.1 Die vektorielle Geradengleichung in Parameterform
Punktrichtungsform 92
Zweipunkteform 93
Vektorielle Geradengleichung – lineare Funktionsgleichung . . 94

2.1.2 Lagebeziehungen von Punkt und Gerade 97
Inzidenznachweis 97
Schnittpunkt Gerade – Koordinatenachsen 97
Durchstoßpunkte 98
2.1.3 Schnittpunkt zweier Geraden 100
2.2 Analytische Geometrie der Ebene 103
2.2.1 Die vektorielle Ebenengleichung in Parameterform 103
Punktrichtungsform 103
Dreipunkteform 104
*2.2.2 Koordinatenform der Ebenengleichung 106

***3 Komplexe Zahlen** 109
3.1 Grundlagen 109
Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ 109
Darstellung komplexer Zahlen 110
3.2 Grundrechenarten 111
3.2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen 111
3.2.2 Multiplikation komplexer Zahlen 112
3.2.3 Division komplexer Zahlen 113

Sachwortverzeichnis 115

Mathematische Zeichen und Begriffe

1 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$	Vektoren
$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$ als Repräsentant von $\vec{v}$
$-\vec{v}$	Gegenvektor zu $\vec{v}$
$\lvert\vec{v}\rvert$	Betrag des Vektors $\vec{v}$
$\vec{v}^{\,0}$ oder $\vec{e}_v$	Einheitsvektor in Richtung $\vec{v}$
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	orthonormierte Basisvektoren
$\vec{0}$	Nullvektor
$\vec{r}_P$	Ortsvektor zu einem Punkt P
$P(x/y)$	Punkt der x, y-Ebene ($\mathbb{R}^2$-Ebene)
$P(x/y/z)$	Punkt des (Anschauungs-)Raumes: $\mathbb{R}^3$
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$	Spaltenschreibweise von $\vec{v}$: Spaltenvektor
$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$	Zeilenschreibweise von $\vec{v}$: Zeilenvektor
$(\vec{a}; \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalar- oder Punktprodukt
$[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$	Vektor- oder Kreuzprodukt
$\langle \vec{a}; \vec{b}; \vec{c} \rangle$	Spatprodukt
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	2×2-Matrix
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	2-reihige Determinante
$\vec{x} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{v}$	vektorielle Geradengleichung
$\vec{x} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$	vektorielle Ebenengleichung

2 Komplexe Zahlen

$\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + \boldsymbol{i}y \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen
$z = x + \boldsymbol{i}y$ $\bar{z} = x - \boldsymbol{i}y$	konjugiert-komplexe Zahlen

3 Wichtige Begriffe

Definition	Die Bedeutung eines verwendeten Namens oder Zeichens wird erklärt bzw. festgelegt.
Satz	Aus bereits bekannten Aussagen werden Schlußfolgerungen gezogen, die es zu beweisen gilt. – Zur Beweisführung darf auf eine entsprechende Definition zurückgegriffen werden.
Axiome	Anerkannte, nicht beweisbare Grundsätze, aus denen sich *Sätze* ableiten lassen.