Branger
Bewertung nicht redundanter Finanzderivate mittels Entropie und Cross-Entropie

GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Nicole Branger

Bewertung nicht redundanter Finanzderivate mittels Entropie und Cross-Entropie

Deutscher Universitäts-Verlag

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Branger, Nicole:
Bewertung nicht redundanter Finanzderivate mittels Entropie und Cross-Entropie /
Nicole Branger. - 1. Aufl..
- Wiesbaden : Dt. Univ.-Verl., 2002
(Gabler Edition Wissenschaft)
Zugl.: Karlsruhe, Univ., Diss., 2001

1. Auflage April 2002

Lektorat: Brigitte Siegel / Stefanie Loyal

Der Deutsche Universitäts-Verlag ist ein Unternehmen der
Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.

www.duv.de

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-8244-7636-7 ISBN 978-3-322-89658-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-89658-2

We have not succeeded in answering all our problems. The answers we have found only serve to raise a whole set of new questions. In some ways we feel we are as confused as ever, but we believe we are confused on a higher level and about more important things.

Posted outside the mathematics reading room,
Tromsø University[1]

[1] Dieses Zitat ist dem Buch von Øksendal (1998) [90] vorangestellt.

Vorwort

Auf einem unvollständigen Markt ist alleine mittels Arbitrageüberlegungen eine eindeutige Bewertung von nicht redundanten Derivaten nicht möglich. Zur Bestimmung eines eindeutigen Preises müssen weitere Kriterien herangezogen werden. Eines dieser Kriterien ist die Verwendung von impliziten Verfahren, die auf Entropie und Cross-Entropie basieren.

Während zahlreiche empirische Arbeiten existieren, die sich mit der Anwendung impliziter Verfahren beschäftigen, gibt es nur wenige Arbeiten, die der Frage nachgehen, wie diese Verfahren begründet werden können und welche ökonomischen Annahmen mit ihnen verbunden sind. Diese Lücke schließt die vorliegende Arbeit für Verfahren, die auf der Entropie und der Cross-Entropie basieren. Sie analysiert die aktuell verwendeten Verfahren und zeigt deren Grenzen und Probleme auf. Darüberhinaus gelingt eine Verallgemeinerung der Verfahren, durch die auftretende Probleme wie eine Abhängigkeit der Bewertungsfunktion vom verwendeten Numeraire vermieden werden können.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Mitarbeiterin am Institut für Entscheidungstheorie und Unternehmensforschung der Universität Karlsruhe (TH). Sie wurde 2001 von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften als Dissertation angenommen.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hermann Göppl, der mir als Lehrstuhlinhaber und Betreuer der Arbeit die zum Gelingen des Promotionsvorhabens nötigen Freiräume gewährt und mir darüberhinaus eine interessante Tätigkeit in Lehre und Forschung ermöglicht hat. Herrn Prof. Dr. Karl-Heinz Waldmann danke ich für die Übernahme des Korreferats und für wertvolle Hinweise.

Meinen Kollegen am Institut möchte ich an dieser Stelle für ihre Unterstützung sowohl in fachlicher als auch in persönlicher Hinsicht danken. In besonderer Weise gilt dies für Herrn Dr. Tobias Kirchner, der die Entstehung der Arbeit von Anfang an mit Interesse und Kompetenz begleitet hat, und für Herrn Dr. Jan Haaß, dessen Anregungen in zahlreichen Diskussionen die Arbeit wesentlich geprägt haben. Danken möchte ich vor allem auch Herrn Prof. Dr. Christian Schlag. Seine fachliche und persönliche Unterstützung während der Promotion hat entscheidend zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Nicole Branger

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **1**

2 Grundlagen der Bewertung **9**

2.1 Beschreibung der Ökonomie 11

2.1.1 Modellrahmen: Zeit, Unsicherheit und Basiswertpapiere 11

2.1.2 Portfolios und erreichbare Zahlungen 17

2.1.3 Normierte Ökonomie 24

2.1.4 Teilmodelle 29

2.2 Arbitrageorientierte Bewertung 32

2.2.1 Bewertung mittels Duplikation 32

2.2.2 Bewertung mittels eines äquivalenten Martingalmaßes 36

2.3 Die Bewertungsfunktion 41

2.3.1 Arbitragefreie, signierte und zulässige Bewertungsfunktionen 41

2.3.2 Darstellungsmöglichkeiten der Bewertungsfunktion 43

2.4 Analyse der Bewertungsfunktion 63

2.4.1 Marktpreis des Risikos 63

2.4.2 Q-Numeraire 71

3 Unvollständige Märkte **75**

3.1 Einführung in die Problemstellung 76

3.1.1 Parametrische Optionsbewertung 77

3.1.2 Implizite Bewertung 81

3.2 Hedgingstrategien auf unvollständigen Märkten 83

3.2.1 Hedgefehler 84

3.2.2 Risikomaße . . . 85

3.2.3 Superhedging . . . 90

3.2.4 Risikominimierende Hedgingstrategien . . . 92

3.3 Bestimmung der Bewertungsfunktion mittels impliziter Verfahren . . . 96

3.3.1 Schritt 1: Spezifikation des Modells . . . 98

3.3.2 Schritt 2: Bestimmung der Bewertungsfunktion . . . 100

3.3.3 Schritt 3: Analyse des Modells . . . 105

3.4 Portfolioplanung und Bewertung bei Marktunvollständigkeit . . . 107

3.5 Zusammenfassung . . . 110

4 Das Konzept der Entropie **113**

4.1 Entropie und Cross-Entropie . . . 114

4.1.1 Die Entropie nach Shannon . . . 115

4.1.2 Die Cross-Entropie nach Kullback-Leibler . . . 118

4.2 Verteilungen mit maximaler Entropie und minimaler Cross-Entropie . . . 121

4.2.1 Formale Darstellung des Auswahlproblems . . . 122

4.2.2 Die Verteilung mit maximaler Entropie . . . 124

4.2.3 Die Verteilung mit minimaler Cross-Entropie gegenüber P . . . 128

4.3 Erweiterte Entropie und erweiterte Cross-Entropie von Zufallsvariablen . . 132

4.3.1 Erweiterte Entropie einer Zufallsvariablen . . . 135

4.3.2 Erweiterte Cross-Entropie einer Zufallsvariablen gegenüber einer Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . 143

4.3.3 Erweiterte Cross-Entropie einer Zufallsvariablen Y gegenüber einer Zufallsvariablen X . . . 146

4.4 Zusammenfassung der Entropiekriterien . . . 149

5 Implizite Verfahren auf Basis der Entropiekriterien **155**

5.1 Überblick über das Vorgehen . . . 156

5.1.1 Spezifikation des Modells . . . 157

5.1.2 Implizite Verfahren: Entropieverfahren . . . 160

5.1.3 Analyse der Bewertungsfunktionen . . . 168

5.2 Auswahl des äquivalenten Martingalmaßes . . . 173

5.2.1 A-priori Maß: Äquivalentes Martingalmaß mit minimaler Cross-Entropie . . . 176

5.2.2 Keine a-priori Information: Äquivalentes Martingalmaß mit maximaler Entropie . . . 194

5.2.3 A-priori Bewertungsfunktion: Äquivalentes Martingalmaß mit minimaler Cross-Entropie . . . 196

5.2.4 Zusammenfassung . . . 205

5.3 Auswahl des stochastischen Diskontierungsfaktors . . . 209

5.3.1 A-priori Maß: Stochastischer Diskontierungsfaktor mit minimaler Cross-Entropie . . . 211

5.3.2 A-priori Bewertungsfunktion: Stochastischer Diskontierungsfaktor mit minimaler Cross-Entropie gegenüber dem abgeleiteten a-priori Maß . . . 223

5.3.3 A-priori Bewertungsfunktion: Stochastischer Diskontierungsfaktor mit minimaler erweiterter Cross-Entropie gegenüber der a-priori Bewertungsfunktion . . . 233

5.3.4 Zusammenfassung . . . 240

5.4 Auswahl der Arrow-Debreu-Preise . . . 244

5.5 Zusammenfassung . . . 249

6 Zusammenfassung **259**

Literaturverzeichnis **277**

Abbildungsverzeichnis

2.1 Veranschaulichung des Konzeptes der Partitionen 48

2.2 Beschreibung der Bewertungsfunktion durch die Arrow-Debreu-Preise und den Preisprozeß eines Numeraire 52

Tabellenverzeichnis

2.1 Darstellungsmöglichkeiten der Bewertungsfunktion Teil 1 47

2.2 Darstellungsmöglichkeiten der Bewertungsfunktion Teil 2 57

4.1 Entropie, Cross-Entropie, erweiterte Entropie und erweiterte Cross-Entropie 151

4.2 Entropie-Kriterien 152

5.1 Übersicht über die Auswahlverfahren 169

5.2 Auswahl eines äquivalenten Martingalmaßes mittels Entropieverfahren . . . 206

5.3 Auswahl eines stochastischen Diskontierungsfaktors mittels Entropieverfahren 241

5.4 Auswahl einer Bewertungsfunktion mittels Entropieverfahren 250

Symbolverzeichnis

α	Sensitivitäten der Rendite bezüglich der Unsicherheitsquellen Basismartingale
α_Z	Sensitivitäten der Rendite bezüglich der Unsicherheitsquellen Basismartingale in der mit Z normierten Ökonomie
$AD(t,u)$	Arrow-Debreu-Preis in t für Zustände in u
$AD_s(t,u)$	Arrow-Debreu-Preis in t für Zustände in u, berechnet aus Sicht von $s \leq t$
$AD_{prior}(0,T)$	a-priori Arrow-Debreu-Preise
$\widetilde{AD}_{prior}(0,T)$	modifizierte a-priori Arrow-Debreu-Preise, folgen aus den a-priori Arrow-Debreu-Preisen durch Multiplikation mit einer Konstanten, die die richtige Bewertung des Numeraire sicherstellt
$B(t,u)$	Preis in t der in u fälligen Nullkuponanleihe mit Nennwert 1
$C(t)$	Preis eines Contingent Claim in t
$\frac{dQ}{dP}$	Radon-Nikodym-Ableitung des Maßes Q bezüglich dem Maß P
$\frac{dQ}{dP}(t,u)$	Radon-Nikodym-Ableitung des Maßes Q bezüglich dem Maß P, eingeschränkt auf das Teilmodell von t bis u
$\Delta Co(t)$	Kosten in t aus einer Portfoliostrategie; resultieren aus der Anpassung des Portfoliowertes $V^-(t)$ vor der Umschichtung auf den Portfoliowert $V^+(t)$ nach der Umschichtung in t
$\Delta G(t)$	Gewinn in t aus einer Portfoliostrategie bzw. aus dem Halten eines Portfolios von $t-1$ bis t; resultiert aus den Wertänderungen der im Portfolio enthaltenen Basiswertpapiere von $t-1$ bis t
$EH(X)$	erweiterte Entropie der positiven Zufallsvariablen X
$EH(X \mid P)$	erweiterte Cross-Entropie der positiven Zufallsvariablen X gegenüber der Wahrscheinlichkeitsverteilung P

$EH(X \mid Y)$	erweiterte Cross-Entropie der positiven Zufallsvariablen X gegenüber der Zufallsvariablen Y, berechnet unter einem Maß P (das nicht explizit angegeben ist, sondern aus dem Zusammenhang folgt)
$EH_P(X \mid Y)$	erweiterte Cross-Entropie der positiven Zufallsvariablen X gegenüber der Zufallsvariablen Y, berechnet unter dem Maß P, das explizit angegeben ist
$\mathcal{F}$	σ-Algebra, die die Menge aller möglichen Ereignisse in der Ökonomie beschreibt
$\mathcal{F}_t$	σ-Algebra, die die Informationen zum Zeitpunkt t repräsentiert
$\mathbb{F}$	Filtration, stellt die Entwicklung der Unsicherheit im Zeitablauf dar
$\mathcal{G}(t,u)$	Menge aller Zahlungen in $u \geq t$, die mit einem beliebigen Anfangsvermögen in t und bei Verfolgen einer von t bis u selbstfinanzierenden Strategie erreichbar sind
$\mathcal{G}(t,u,c)$	Menge aller Zahlungen in $u \geq t$, die mit einem Anfangsvermögen in t von c und bei Verfolgen einer von t bis u selbstfinanzierenden Strategie erreichbar sind
$\mathcal{G}_Z(t,u)$	Menge aller mit Z normierten Zahlungen in $u \geq t$, die mit einem beliebigen Anfangsvermögen in t und bei Verfolgen einer von t bis u selbstfinanzierenden Strategie erreichbar sind
$\mathcal{G}_Z(t,u,c_Z)$	Menge aller mit Z normierten Zahlungen in $u \geq t$, die mit einem normierten Anfangsvermögen in t von c_Z und bei Verfolgen einer von t bis u selbstfinanzierenden Strategie erreichbar sind
$H(P)$	Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung P nach Shannon
$H(Q \mid P)$	Cross-Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung Q gegenüber der Wahrscheinlichkeitsverteilung P nach Kullback-Leibler
$K(t)$	Money Market Account: Ergebnis in t der rollierenden Anlage einer Geldeinheit zum jeweils lokal risikolosen Zins
λ	Marktpreis des Risikos; $\lambda_j(t)$ beschreibt die erwartete Überrendite von t bis $t+1$ über den risikolosen Zins pro Einheit übernommenes Risiko, wobei der Risikofaktor das Basismartingal X_j ist
	zugleich: der Parameter $\lambda(0)$ und der vorhersagbare Prozeß λ beschreiben die mittels Entropiekriterien ausgewählten Bewertungsfunktionen
λ_Z	Marktpreis des Risikos bezüglich dem Numeraire Z; $\lambda_{j,Z}(t)$ beschreibt die erwartete Rendite von t bis $t+1$ in der mit Z normierten Ökonomie pro Einheit übernommenes Risiko, wobei der Risikofaktor das Basismartingal X_j ist
μ	erwartete Rendite

μ_Z	erwartete Rendite in der mit Z normierten Ökonomie
Ω	Zustandsraum, beschreibt alle in der Zukunft möglichen Entwicklungen der Ökonomie
$\mathcal{P}_t$	Partition, stellt die Information zum Zeitpunkt t dar
P_{prior}	a-priori Wahrscheinlichkeitsverteilung
P_X	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X
P^X	künstliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, die aus der Zufallsvariablen X berechnet wird
$\underline{\pi}(H)$	Untergrenze für den Preis des Derivates H; ergibt sich als das größte Anfangsvermögen eines selbstfinanzierenden Portfolios, das durch H dominiert wird
$\bar{\pi}(H)$	Obergrenze für den Preis des Derivates H; ergibt sich als das kleinste Anfangsvermögen eines selbstfinanzierenden Portfolios, das H dominiert
$Q(Z)$	äquivalentes Martingalmaß zum Numeraire Z
$Q_{prior}(Z)$	äquivalentes Martingalmaß zum Numeraire Z, stellt die modifizierte a-priori Bewertungsfunktion dar
$r(t)$	lokal risikoloser Zins in t für die Anlage von t bis $t+1$
$S(t)$	Preise der Basiswertpapiere in t
$S_Z(t)$	mit Z normierte Preise der Basiswertpapiere in t
$SDF(t,u)$	stochastischer Diskontierungsfaktor in t für Zahlungen in u
$SDF^P(t,u)$	stochastischer Diskontierungsfaktor in t für Zahlungen in u, angegeben bezüglich des Maßes P
$SDF_s(t,u)$	stochastischer Diskontierungsfaktor in t für Zahlungen in u aus Sicht von $s \leq t$
$SDF_{prior}(0,T)$	a-priori stochastischer Diskontierungsfaktor
$SDF^{glob}(0,T)$	stochastischer Diskontierungsfaktor mit der minimalen quadratischen Norm; die durch ihn beschriebene Bewertungsfunktion weist jedem Derivat das optimale Anfangsvermögen bei globaler Risikominimierung zu
$SDF^{lok}(0,T)$	stochastischer Diskontierungsfaktor, für den die einperiodigen stochastischen Diskontierungsfaktoren jeweils minimale quadratische Norm haben; die durch ihn beschriebene Bewertungsfunktion weist jedem Derivat das optimale Anfangsvermögen bei globaler Risikominimierung zu
$\mathbb{T}$	Menge der Handelszeitpunkte

(t, ω)	Menge der Partition $\mathcal{P}_t$, die den Endzustand ω enthält; repräsentiert einen Zustand in t
ϑ	Handelsstrategie, kann durch geeignete Ergänzung durch eine Position im Numeraire zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie werden
ϑ_Z	Position im Numeraire, durch die eine beliebige Strategie zu einer selbstfinanzierenden Strategie wird.
$V(t)$	Wert eines Portfolios in t
$V_Z(t)$	mit Z normierter Wert eines Portfolios in t
$V^-(t)$	Wert eines Portfolios vor der Umschichtung in t
$V^+(t)$	Wert eines Portfolios nach der Umschichtung in t
X	Basismartingale
$Y(t)$	Stand des Numeraire Y in t
$Z(t)$	Stand des Numeraire Z in t