

## **vieweg studium**

### **Grundkurs Mathematik**

Diese Reihe wendet sich an Studierende der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächer. Ihnen – und auch den Schülern der Sekundarstufe II – soll die Vorbereitung auf Vorlesungen und Prüfungen erleichtert und gleichzeitig ein Einblick in die Nachbarfächer geboten werden. Die Reihe wendet sich aber auch an Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieure in der Praxis und an die Lehrer dieser Fächer.

Zu der Reihe vieweg studium gehören folgende Abteilungen:

Basiswissen, Grundkurs Mathematik und  
Aufbaukurs Mathematik

Gerd Fischer

# Analytische Geometrie

Eine Einführung für Studienanfänger

7., durchgesehene Auflage

Mit 129 Abbildungen



Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme  
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei  
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

Prof. Dr. Gerd Fischer  
Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität  
40225 Düsseldorf

gerdfischer@cs.uni-duesseldorf.de

Die Reproduktion von Abbildungen aus Albrecht Dürer, *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*, mit freundlicher Genehmigung des Germanischen Nationalmuseums Nürnberg.

1. Auflage 1978  
2., verbesserte Auflage 1979  
3., neubearb. Auflage 1983  
4., durchges. Auflage 1985  
1 Nachdruck

5., überarbeitete Auflage 1991  
6., überarbeitete Auflage 1992  
2 Nachdrucke  
7., durchgesehene Auflage  
Oktober 2001

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/  
Wiesbaden, 2001

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe  
BertelsmannSpringer.  
[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlagkonzeption und -layout: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN-13: 978-3-528-67235-5

e-ISBN-13: 978-3-322-88921-8

DOI: 10.1007/978-3-322-88921-8

# Inhaltsverzeichnis

## 1. Affine Geometrie

### 1.0. Allgemeine affine Räume

1.0.1. Parallelverschiebungen	1
1.0.2. Affine Unterräume von Vektorräumen	1
1.0.3. Gruppenhomomorphismen und Untergruppen	2
1.0.4. Operationen von Gruppen	3
1.0.5. Affine Räume	4
1.0.6. Vektorräume und affine Räume	5
1.0.7. Parallelogramme, freie Vektoren, Ortsvektoren	5
1.0.8. Synthetische Einführung affiner Räume	6

### 1.1. Affine Abbildungen und Unterräume

1.1.0. Affine Abbildungen von Vektorräumen	7
1.1.1. Affine Abbildungen affiner Räume	8
1.1.2. Einfache Eigenschaften affiner Abbildungen	9
1.1.3. Charakterisierung von Translationen	11
1.1.4. Affine Unterräume	11
1.1.5. Jeder affine Unterraum ist ein affiner Raum	12
1.1.6. Durchschnitt und Verbindung affiner Räume	12
1.1.7. Geometrische Charakterisierung affiner Unterräume	13
1.1.8. Der Translationsraum des Verbindungsraumes	15
1.1.9. Geometrische Charakterisierung des Verbindungsraumes	16
1.1.10. Dimensionsformel	17
1.1.11. Projektionen in Vektorräumen	18
1.1.12. Parallele Unterräume, Parallelprojektionen	19

### 1.2. Affine Koordinaten

1.2.1. Affin unabhängige Punkte, affine Basen	21
1.2.2. Affine Basen und affine Abbildungen	22
1.2.3. Affine Koordinatensysteme	23
1.2.4. Das Teilverhältnis	23
1.2.5. Drei Sätze der Elementargeometrie	25
1.2.6. Parameterdarstellungen, Affinkombinationen	26
1.2.7. Parameterdarstellung des Durchschnitts	28
1.2.8. Beschreibung affiner Abbildungen durch Matrizen	29
1.2.9. Fixpunkte	30
1.2.10. Dilatationen	31

1.3. Kollineationen	
1.3.1. Affinitäten und Kollineationen	31
1.3.2. Körperautomorphismen	32
1.3.3. Semiaffinitäten	33
1.3.4. Der Hauptsatz der affinen Geometrie	35
1.4. Quadriken	
1.4.0. Ellipse, Hyperbel und Parabel	36
1.4.1. Definition von Quadriken	53
1.4.2. Beispiel einer Hauptachsentransformation	56
1.4.3. Satz über die Hauptachsentransformation	57
1.4.4. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	61
1.4.5. Geometrische Äquivalenz und projektiver Abschluß	64
1.4.6. Topologischer Abschluß	65
1.4.7. Geometrischer Klassifikationssatz	70
1.4.8. Normalformen	72
1.5. Euklidische affine Räume	
1.5.1. Definitionen und Beispiele	74
1.5.2. Isometrien	75
1.5.3. Kongruenzen	76
1.5.4. Eulersche Winkel	77
1.5.5. Ähnlichkeiten	79
1.5.6. Geometrische Charakterisierung von Ähnlichkeiten	80
1.5.7. Hauptachsentransformation von Affinitäten	81
1.5.8. Geometrische Hauptachsenkonstruktion	82
1.5.9. Metrische Hauptachsentransformation von Quadriken	85
1.5.10. Beispiele zur Hauptachsentransformation	89
<b>2. Konvexe Mengen und lineare Optimierung</b>	
2.0. Problemstellung	
2.0.1. Ein Beispiel	92
2.0.2. Formulierung der allgemeinen Aufgabe	94
2.1. Konvexe Mengen und ihre Extrempunkte	
2.1.1. Strecken, konvexe Mengen, Halbräume	95
2.1.2. Konvexe Hüllen und Konvexkombinationen	96
2.1.3. Simplex und Polyeder	97
2.1.4. Extrempunkte und Ecken	98
2.1.5. Existenz optimaler Extrempunkte	99
2.1.6. Berechnung der Extrempunkte	100
2.1.7. Vorläufige Lösung der Optimierungsaufgabe	102

2.2. Das Simplexverfahren	
2.2.1. Ein Trennungslemma	103
2.2.2. Polyeder und Lösungen von Ungleichungssystemen	104
2.2.3. Ein Satz von Minkowski	105
2.2.4. Kanten von Polyedern	106
2.2.5. Das Austauschlemma	107
2.2.6. Das Eckentableau	109
2.2.7. Charakterisierung optimaler Ecken	110
2.2.8. Einfache und mehrfache Ecken	111
2.2.9. Übergang zu einer benachbarten Ecke	112
2.2.10. Pivotsuche mit Hilfe charakteristischer Quotienten	114
2.2.11. Rechenverfahren für den Übergang	115
2.2.12. Lösung der Optimierungsaufgabe	117
2.2.13. Ein Beispiel	119
2.3. Ausnahmefälle	
2.3.1. Nicht kompakte Lösungsmenge	121
2.3.2. Mehrere optimale Ecken	122
2.3.3. Mehrfache Ecken	122
2.3.4. Pivotsuche bei mehrfachen Ecken	123
2.3.5. Stationärer Austausch	124
2.3.6. Konvexe Optimierung	125
<b>3. Projektive Geometrie</b>	
3.0. Vorbemerkungen	
3.1. Projektive Räume und Unterräume	
3.1.1. Projektive Räume	134
3.1.2. Homogene Koordinaten	134
3.1.3. Projektive Unterräume	135
3.1.4. Unendlich ferne Hyperebene	135
3.1.5. Durchschnitt und Verbindung	137
3.2. Projektive Abbildungen und Koordinaten	
3.2.1. Projektive Abbildungen	138
3.2.2. Projektive Räume und affine Räume	140
3.2.3. Abschluß affiner Räume	144
3.2.4. Projektiv unabhängige Punkte, projektive Basen	144
3.2.5. Projektivitäten mit vorgeschriebenen Werten	146
3.2.6. Projektive Koordinaten	147
3.2.7. Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen	147
3.2.8. Beschreibung von projektiven Unterräumen durch Gleichungen	149
3.2.9. Zentralprojektionen und Perspektivitäten	150

3.3. Invarianten von Projektivitäten	
3.3.1. Doppelverhältnis	152
3.3.2. Berechnung des Doppelverhältnisses	154
3.3.3. Doppelverhältnis bei Permutation der Punkte	156
3.3.4. Doppelverhältnis und Teilverhältnis	157
3.3.5. Harmonische Punktepaare	157
3.3.6. Vollständige Vierseite	158
3.3.7. Die Sätze von Desargues und Pappos	159
3.3.8. Kollineationen und Semiprojektivitäten	163
3.3.9. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie	163
3.3.10. Beweis des Hauptsatzes der affinen Geometrie	168
3.4. Dualität	
3.4.1. Pol und Polare beim Kreis	169
3.4.2. Korrelationen	171
3.4.3. Dualer projektiver Raum	172
3.4.4. Der Hauptsatz über Korrelationen	173
3.4.5. Korrelationen und Sesquilinearformen	173
3.4.6. Hyperebenenkoordinaten	174
3.4.7. Das Dualitätsprinzip	175
3.4.8. Hyperebenenbüschel	177
3.5. Quadriken	
3.5.1. Homogene Polynome, Kegel, Quadriken	179
3.5.2. Die Schnitte eines Kreiskegels	181
3.5.3. Quadriken und Bilinearformen	183
3.5.4. Projektive Bilder von Quadriken	184
3.5.5. Projektive Hauptachsentransformation	186
3.5.6. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	188
3.5.7. Bestimmung der Hauptachsenform	191
3.5.8. Verschiedene Gleichungen für eine Quadrik	193
3.5.9. Geometrische Klassifikation	195
3.5.10. Normalformen	198
3.5.11. Tangenten und Tagentialhyperebenen	201
3.5.12. Der Satz von Pascal	202
Anhang. Das Erlanger Programm von Felix Klein	208
Literaturhinweise	210
Sachregister	212
Namensregister	214
Symbolverzeichnis	215

### Der euklidische Raum

Was mach ich armer Teufel bloß?  
 Nun bin ich alt und arbeitslos.  
 Ich diene viele hundert Jahr  
 ergeben, redlich, treu und wahr,  
 mit Umsicht, Tatkraft und Geschick  
 im hohen Hause der Physik.  
 Verdiente meinen guten Lohn.  
 Doch plötzlich war das alles aus.  
 Ein neuer Herr bezog das Haus.  
 Der sprach: „Ich geb Ihnen hiermit zu wissen:  
 Sie lassen leider ganz vermissen

die unumgängliche Präzision.  
 Die angenäherte Schlampigkeit,  
 die geht mir, das muß ich schon sagen, zu weit.  
 Sie können mir daher nicht weiter dienen,  
 und kurz und gut, ich kündige Ihnen  
 hiermit zum Ersten des folgenden Jahres.“  
 Ich war ganz sprachlos, doch so war es.  
 Und finden Sie mich morgens mal  
 erhängt an einem Integral –  
 ach, reden hat ja keinen Zweck!  
 So ging der Raum betrübt hinweg.

aus Hubert Cremer [34]

## Vorwort

Dieses Buch schließt an die „Lineare Algebra“ (vieweg studium, 12. Auflage 2000, zitiert als „L.A.“) an. Es ist entstanden aus Vorlesungen für Studenten der Mathematik ab dem zweiten Semester. Ihnen sollte ein Eindruck vermittelt werden, wie sich der Formalismus der linearen Algebra anwenden läßt.

Im Vordergrund steht dabei die sogenannte „Analytische Geometrie“. Nach dem heute üblichen Sprachgebrauch versteht man darunter den Teil der Geometrie, der mit Hilfsmitteln der linearen Algebra betrieben wird. Verwendung von höherer Algebra führt zur „algebraischen Geometrie“, in der „Differentialgeometrie“ werden geometrische Gebilde vom Standpunkt der Analysis untersucht. (Es sei bemerkt, daß solche Unterscheidungen, verbunden mit dem Streben nach „Reinheit der Methoden“, der Geometrie insgesamt mehr geschadet als genützt haben.)

Im ersten Kapitel werden affine Räume eingeführt und einfache Eigenschaften von affinen Unterräumen und Quadriken hergeleitet. Mit Hilfsmitteln der linearen Algebra kann man auch Systeme linearer Ungleichungen untersuchen. Damit beschäftigt sich das zweite Kapitel über „lineare Optimierung“. Hier wird besonderer Wert darauf gelegt, die geometrischen Hintergründe zu erläutern. Im dritten Kapitel wird schließlich versucht, den Leser davon zu überzeugen, daß ein tieferer Einblick in geometrische Zusammenhänge erst vom projektiven Standpunkt aus möglich wird.

Etwa so, wie es in gebildeten Kreisen gerne als ein Zeichen für Leute von Welt angesehen wird, nichts von Mathematik zu verstehen, ist mancher Mathematiker stolz darauf, nie mit projektiver Geometrie in Berührung gekommen zu sein. Zugegeben, ihr „goldenes Zeitalter“ ging vor über hundert Jahren zu Ende. Aber eine Aussage wie etwa der *Satz von Pascal* kann auch heute niemanden, der Sinn für Mathematik hat, unbewegt lassen. Außerdem ist die projektive Geometrie eine der stärksten Wurzeln gewesen für die Entwicklung der algebraischen Geometrie, deren weitverzweigter Baum heute in vollem Saft steht.



Zusammen mit dem Band über Lineare Algebra kann dieses Buch als Begleittext zu einer der üblichen zweisemestrigen Anfängervorlesungen über „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“ dienen. Die Trennung in zwei Bände eröffnet dem Leser mannigfache Möglichkeiten, nach eigenem Geschmack das Studium der linearen Algebra durch geometrische Exkurse aufzulockern. Dabei wird man sich aus Zeitgründen auf eine Auswahl aus der analytischen Geometrie beschränken müssen. Um dies zu erleichtern, sind die drei Kapitel weitgehend unabhängig voneinander gehalten.

Das zweite Kapitel ist ganz unabhängig, es benötigt keine Hilfsmittel aus den beiden anderen. Die Zusammenhänge zwischen affiner und projektiver Geometrie zu unterdrücken, wäre jedoch widersinnig gewesen. An zwei schwierigen Stellen in der affinen Geometrie setzen wir Ergebnisse der projektiven Geometrie ein: Beim Beweis des Hauptsatzes über Kollineationen (1.3.4) und bei der Klassifikation von Quadriken (1.4.5 bis 1.4.8). Die restlichen Abschnitte der affinen Geometrie hängen jedoch davon nicht ab. Schließlich sollte man als Motivation für die projektive Geometrie ein klein wenig affine Geometrie kennengelernt haben.

Ob man sich mit der Einführung allgemeiner affiner Räume abgeben will oder nicht, ist eine Frage des Geschmacks. Vom handwerklichen Standpunkt kann man sich damit begnügen, Geometrie in einem Vektorraum zu betreiben. Einer der Gründe, warum der allgemeine Begriff hier doch ausführlich dargestellt wurde, war der, einen zukünftigen Lehrer für den Fall zu wappnen, daß er diesen Dingen einmal in Schulbüchern begegnet.

Zahlreiche Probleme von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad sollen dem Leser als Anregung für selbständige Arbeit dienen: Die meisten davon sind einfache *Übungsaufgaben*. Einige erfordern mehr Anstrengung, sie sind als *Aufgaben* gekennzeichnet.

An Quellen, aus denen ich analytische Geometrie gelernt habe, möchte ich besonders die Vorlesungen meines verehrten Lehrers *G. Nöbeling*, sowie die Vorlesungsausarbeitung von *H. Hermes* [3] erwähnen. Die Grundlagen der linearen Optimierung habe ich erstmals durch die Bücher von *S. Guber* [2] und *W. Nef* [6] kennengelernt.

Viele Kollegen sind mir mit guten Ratschlägen beigestanden, in erster Linie die Herren *O. Forster* und *R. Sacher*. Beim Korrekturlesen haben mir Frau *C. Horst*, sowie die Herren *V. Aurich* und *G. Baumann* geholfen. Schließlich danke ich dem Vieweg Verlag für die stets angenehme Zusammenarbeit.

München, im November 1977

*Gerd Fischer*

In der vorliegenden Neuauflage wurden wieder einige Kleinigkeiten berichtigt.

Düsseldorf, im September 2001

*Gerd Fischer*