Gerhard Frey

Elementare Zahlentheorie

vieweg studium

Grundkurs Mathematik

Diese Reihe wendet sich an den Studenten der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächer. Ihm – und auch dem Schüler der Sekundarstufe II – soll die Vorbereitung auf Vorlesungen und Prüfungen erleichtert und gleichzeitig ein Einblick in die Nachbarfächer geboten werden. Die Reihe wendet sich aber auch an den Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieur in der Praxis und an die Lehrer dieser Fächer.

Zu der Reihe vieweg studium gehören folgende Abteilungen:

Basiswissen, Grundkurs und Aufbaukurs Mathematik, Physik, Chemie, Biologie

Gerhard Frey

Elementare Zahlentheorie

Friedr. Vieweg & Sohn
Braunschweig / Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Frey, Gerhard:
Elementare Zahlentheorie/Gerhard Frey. –
Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1984.
(Vieweg-Studium; 56: Grundkurs Mathematik)
ISBN 978-3-528-07256-8

NE: GT

Dr. rer. nat. *Gerhard Frey* ist Professor im Fachbereich Mathematik der Universität des Saarlandes, 6600 Saarbrücken.

1984

Alle Rechte vorbehalten
© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1984

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien. Dieser Vermerk umfaßt nicht die in den §§ 53 und 54 URG ausdrücklich erwähnten Ausnahmen.

Satz: Vieweg, Braunschweig

ISBN 978-3-528-07256-8 ISBN 978-3-322-88793-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-88793-1

Vorwort

Die folgende Einführung in die Zahlentheorie entstand aus Vorlesungen, die ich an der Universität des Saarlandes gehalten habe; sie umfaßt ziemlich genau den Stoff, der im Verlauf eines Wintersemesters im Rahmen der Vorlesung über „Elementare Zahlentheorie" behandelt wurde.

Diese Vorlesung hat zwei Ziele: Einerseits sollen möglichst viele Studenten angesprochen werden, denen die Vorlesung „mathematische Allgemeinbildung" auf dem Gebiet der Zahlentheorie vermitteln soll; die für die Vorlesung notwendigen Voraussetzungen z.B. auf dem Gebiet der Algebra sollen also möglichst gering sein. Tatsächlich sollte die Kenntnis der algebraischen Grundstrukturen und ihrer elementarsten Eigenschaften genügen; wenn an einigen Stellen etwas weitergehende Überlegungen erforderlich sind, wird versucht, diese an Ort und Stelle bereitzustellen. Der Abschnitt über abelsche Gruppen kann als Beispiel dazu dienen. Natürlich muß man für diese Vorgehen auch bezahlen, oft ersetzt das Rechnen zu Fuß den eigentlich viel einleuchtenderen strukturellen Beweis, die lästigen Nachrechnungen bei Verknüpfungen von Restklassen sind ein deutliches Beispiel dafür.

Andererseits soll die Vorlesung interessierte Studenten auf die Algebraische Zahlentheorie vorbereiten; das Erreichen dieses Ziels sollte durch die Stoffauswahl unterstützt werden.

Neben der üblichen Teiler- und Kongruenz-Theorie in $\mathbb{Z}$ werden die Bewertungen von $\mathbb{Q}$ ausführlich diskutiert (einschließlich des Satzes von Ostrowski), die Theorie der p-adischen Zahlen (und zur Bequemlichkeit des Lesers, auch der reellen Zahlen) nimmt einen breiten Raum ein. Auf die Sätze über Nullstellen von Polynomen über p-adischen Körpern wird großen Wert gelegt, die Theorie der quadratischen Reste wird im Rahmen dieser Körper gegeben, und der Zusammenhang mit Hilbert-Symbolen wird ausführlich diskutiert. Als Beispiel für das Lokal-Global-Prinzip wird der Satz von Hasse-Minkowski für quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ behandelt. Daß auch die quadratischen Zahlkörper als bewährtes Bindeglied zwischen elementarer und algebraischer Zahlentheorie behandelt werden, versteht sich von selbst. Für manchen Geschmack wird die „klassische" elementare Zahlentheorie, z.B. die mehr kombinatorisch ausgerichteten Sätze und die Diskussion von Zahlen mit bestimmten Eigenschaften (Fermatzahlen, ...) zu kurz gekommen sein. Ich hoffe aber, daß der interessierte Leser soviel Handwerkszeug erwerben kann, daß er diese reizvollen Überlegungen durch geeignete Lektüre selbständig sich aneignen kann.

Die nach jedem Abschnitt eingefügten Übungsaufgaben sind zum größten Teil zu der Vorlesung gestellt worden, naturgemäß dienen sie deshalb überwiegend zum Einarbeiten in den gerade behandelten Stoff oder auch einfach zum Nachprüfen des Verständnisses. Zum geringen Teil sind „Routinebeweise"

aus der Vorlesung in die Übungen verschoben worden (z.B. Nachprüfen von Wohldefiniertheit von Abbildungen). Es wird auffallen, daß einige Übungsaufgaben „an der falschen Stelle stehen", d.h. daß sie etwas später mit passender Theorie eleganter gelöst werden können. Das Lösen der Übungsaufgaben ist nach meiner Meinung ein sehr wichtiger Bestandteil des Erarbeitens des Stoffes der Vorlesung, trotzdem habe ich zu vermeiden versucht, Ergebnisse von Übungsaufgaben an späterer Stelle im Text zu verwenden; lieber habe ich dann den entsprechenden Beweis durchgeführt.

Eine Ausarbeitung einer Kursusvorlesung kann und darf meiner Ansicht nach nicht den Anspruch auf Extravaganz und übertriebene Originalität erheben; es ist vielmehr klar, daß alles schon irgendwo steht und daß die Vorlesung aus vielen Quellen geschöpft hat. Eine der Hauptquellen für mich war, wie jeder Kundige sofort sieht, das schöne Buch von Borevič-Šafarevič über Zahlentheorie, besonders deutlich wird dies im 5. Kapitel.

Die Darstellung im Kapitel IV ist durch ein Skriptum von Herrn Prof. Roquette über p-adische Zahlen beeinflußt, im Kapitel über quadratische Körper verdanke ich Herrn Prof. Ritter wesentliche Hinweise. Mein Dank gebührt auch den Studenten, Mitarbeitern und Kollegen an der Universität des Saarlandes, die durch Zuhören, Betreuung der Vorlesung und Ratschläge mir geholfen haben, insbesondere muß ich hier Herrn Dr. C. G. Schmidt erwähnen. Nicht zuletzt aber möchte ich Frl. Wilk für geduldiges Umsetzen meiner Handschrift in ein wohl gegliedertes Schreibmaschinenschriftbild und dem Vieweg-Verlag für die Aufnahme meiner Ausarbeitung in seine „Grundkurs Mathematik"-Reihe und die gute Zusammenarbeit während der Herstellung des Buches danken.

Saarbrücken, im Januar 1983 *Gerhard Frey*

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis