V. G. Boltjanskij/V. A. Efremovič
Anschauliche kombinatorische Topologie

V. G. Boltjanskij · V. A. Efremovič

Anschauliche kombinatorische Topologie

Mit 210 Abbildungen

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

Titel der Originalausgabe:
В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович, Наглядная топология
„Наука", Москва 1982
Die Ausgabe in deutscher Sprache besorgten:
Detlef Seese und Martin Weese

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Boltjanskij, Vladimir G.:
Anschauliche kombinatorische Topologie / V. G. Boltjanskij u. V. A. Efremovič. [Die Ausg. in dt. Sprache besorgten: Detlef Seese u. Martin Weese]. — Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1986.

NE: Efremovič, V. A. [Mitarb.]

ISBN-13: 978-3-528-08974-0 e-ISBN-13: 978-3-322-87601-0
DOI: 10.1007/978-3-322-87601-0

Vorwort der Übersetzer

Die Topologie ist ein wichtiger Zweig der Mathematik, und die aus ihr entstehenden Methoden haben viele Anwendungen in anderen mathematischen Gebieten, so z. B. der Algebra und der Analysis. Ebenso lassen sich einige physikalische Erscheinungen mit Hilfe topologischer Methoden beschreiben. Im vorliegenden Büchlein ist das sehr schön am Fall nematischer Flüssigkristalle dargestellt.

Die Topologie ist eine weit entwickelte Theorie, die sich komplizierter Methoden bedient. Dabei sind häufig die Ausgangsideen, die meist einen sehr anschaulichen Hintergrund haben, nicht mehr erkennbar. Das erschwert es besonders Anfängern, sich in dieses mathematische Gebiet einzuarbeiten. Um so erfreulicher ist es, daß hier ein Buch vorliegt, in dem für eine Reihe von topologischen Methoden die Grundideen klar herausgearbeitet werden. Diese werden dann an einer Vielzahl von Beispielen und Übungsaufgaben vertieft.

Wir hatten Gelegenheit, etwa zwei Drittel dieses Buches im Rahmen eines mathematischen Zirkels mit Schülern einer zehnten Klasse durchzuarbeiten. Dabei konnten wir feststellen, daß die Schüler durchaus in der Lage waren, den im Buch behandelten Stoff zu verstehen und die im Text gestellten Übungsaufgaben zu lösen.

Das Buch wendet sich an alle, die etwas über Topologie erfahren möchten. Es werden nur sehr wenig mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. So scheint es besonders für Studenten der ersten Studienjahre sowie mathematisch interessierte Schüler höherer Klassen geeignet zu sein.

Wir haben uns erlaubt, dem Buch ein Sachwortverzeichnis anzufügen, um das Lesen zu erleichtern.

Wir danken Herrn Dr. habil. G. Bothe für eine Reihe fachlicher Hinweise sowie der Lektorin des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Frau E. Arndt, für ihre Hilfe und gute Zusammenarbeit bei der Übersetzung.

Berlin, im Frühjahr 1986

Detlef Seese
Martin Weese

Vorwort des Redakteurs der russischen Ausgabe

Die einfachen Grundbegriffe der Topologie beruhen auf Beobachtungen realer Sachverhalte. Offensichtlich kann man die geometrischen Eigenschaften einer Figur nicht allein durch die Angabe ihrer metrischen Größen (wie z. B. Abmessungen, Winkel) erfassen. Es verbleibt noch etwas außerhalb der Grenzen der alten Geometrie. So kann eine Kurve (ein Seil, ein Draht, ein langes Molekül) nicht allein durch ihre Länge beschrieben werden. Sie kann geschlossen sein oder auch nicht; wenn sie geschlossen ist, kann sie auf komplizierte Art „verknotet" sein. Zwei oder mehrere geschlossene Kurven können miteinander verkettet sein, und hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten. Körper und ihre Oberflächen können Löcher haben. Diese Eigenschaften von Körpern sind dadurch charakterisiert, daß sie sich bei solchen Deformationen nicht ändern, die man durch Verzerrungen erhalten kann. Bei diesen Verzerrungen dürfen die Figuren nicht zerschnitten werden. Solche Eigenschaften werden auch topologisch genannt. Nicht nur die elementargeometrischen Figuren besitzen topologische Eigenschaften, sondern auch viele rein mathematische Objekte. Hierauf beruht die Bedeutung der Topologie.

Es ist leichter, die Existenz topologischer Eigenschaften einer Figur festzustellen, als eine Berechnungsmöglichkeit zu schaffen, d. h. ein Gebiet der Mathematik zu entwickeln, das exakte Begriffe, strenge Gesetze und Methoden sowie mathematische Formeln zur Darstellung der topologischen Größen besitzt.

Die ersten wichtigen Entdeckungen und exakten topologischen Beziehungen wurden schon von EULER, GAUSS und RIEMANN gefunden. Jedoch kann man ohne Übertreibung sagen, daß die Topologie als eigenständiges Wissenschaftsgebiet Ende des 19. Jahrhunderts von HENRI POINCARÉ geschaffen wurde. Der Entwicklungsprozeß der Topologie und die Lösung ihrer inneren Probleme erwies sich als schwierig und langwierig. Dieser Zeitraum dauerte 70 bis 80 Jahre. Es wurden viele Entdeckungen gemacht, die in einer Reihe von Fällen zu einer Revision der Grundlagen führten. An dieser Entwicklung nahmen mehrere der bedeutendsten Mathematiker ihrer Zeit teil.[1]) Etwa bis zum Ende der fünfziger Jahre wurde die Topologie auch von Mathematikern anderer Gebiete als eine zwar schöne, ansonsten jedoch nutzlose Spielerei betrachtet. Da ich von der Schönheit und Andersartigkeit dieses Gebietes (im Vergleich zu traditionellen Gebieten der Mathematik) begeistert war, habe ich mir die Topologie in den fünfziger Jahren während meiner Studienzeit für die zukünftige Arbeit ausgewählt. Und in dieser Zeit (bis zum Ende der sechziger Jahre) erlebte ich das Unbefriedigende der weiteren Entwicklung dieses Gebietes, besonders den Mangel an aus ihr hervorgehenden Anwendungen. Man muß darauf hinweisen, daß eine Reihe schöner topologischer Gesetzmäßigkeiten schon zu jener Zeit gefunden wurde — in der Funktionentheorie und der komplexen Analysis, in der qualitativen Theorie dynamischer Systeme und bei partiellen Differentialgleichungen, in der Operatorenrechnung und sogar in der Algebra.

Erst mit Beginn der siebziger Jahre begann ein intensives Eindringen topologischer Methoden in den Apparat der modernen Physik. Heute ist die Bedeutung topologischer Methoden für verschiedene Gebiete der Physik unumstritten; so benutzt man Methoden der Topologie in der Feldtheorie und allgemeinen Relativitätstheorie, der Anisotropie fester Medien, der Physik der tiefen Temperaturen und der modernen Quantentheorie. Das führt zur Notwendigkeit, hinreichend elementare populäre Bücher über Topologie und deren Anwendung herauszugeben, die für Schüler höherer Klassen (wenigstens teilweise) sowie Studenten der ersten Semester mit naturwissenschaftlichem und technischem Interesse geeignet sind.

Die beiden namhaften Autoren V. G. Boltjanskij und V. A. Efremovič sind seit vielen Jahren bemüht, topologische Methoden populär zu machen. Ein Anhang von V. P. Mineev, der sich bei der Einführung topologischer Methoden in die theoretische Physik verdient gemacht hat, behandelt eine interessante Anwendung der Topologie in der Theorie nematischer Flüssigkristalle.

Ich hoffe, daß dieses Buch einem breiten Leserkreis sehr nützlich sein wird.

S. P. Novikov

[1]) In den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts entstand in Moskau die sowjetische topologische Schule. Sie wurde von P. S. Uryson und P. S. Alexandrov begründet.

Vorwort der Autoren zur russischen Ausgabe

Die Topologie ist ein verhältnismäßig junger und sehr wichtiger Zweig der Mathematik. Der bekannte französische Mathematiker ANDRÉ WEIL sagte, daß der Engel der Topologie und der Teufel der abstrakten Algebra um die Seele jeden Mathematikers streiten. Damit weist er einerseits auf die ungewöhnliche Feinheit und Schönheit der Topologie hin, andererseits aber auch darauf, daß die gesamte moderne Mathematik auf merkwürdige Weise in die Ideen der Topologie und der Algebra eingebunden ist. In letzter Zeit dringt die Topologie immer mehr in die Physik, die Chemie und die Biologie ein. Ein Beispiel für die Anwendung topologischer Ideen in der Physik findet der Leser in dem von V. P. MINEEV verfaßten Anhang. Es ist jedoch beschwerlich, in die Zauberwelt der Topologie einzudringen. So wie man durch ein ein unvollendetes Gebäude umgebendes Baugerüst daran gehindert wird, die Schönheit des architektonischen Planes zu erfassen, so erschweren es die vielen ermüdenden Details der Theorie, die die Bücher über Topologie füllen, dieses herrliche Gebäude der mathematischen Wissenschaft mit geistigem Auge aufzunehmen. Sogar Spezialisten der Mathematik kapitulieren häufig vor den Schwierigkeiten auf dem Wege zur Beherrschung der Topologie (insbesondere der algebraischen Topologie, deren Anfangsgründe im dritten Kapitel dieses Buches behandelt werden).

Dies alles macht es sehr wichtig, ein populäres Buch über die Topologie zu schreiben. Ein erstes Buch dieser Art wurde in unserem Land schon in den dreißiger Jahren herausgegeben.[1]) Danach, beginnend 1957, wurde in den Nummern 2, 3, 4 und 6 der sowjetischen Zeitschrift „Mathematische Bildung" unser Buch „Abriß der Grundbegriffe der Topologie" kapitelweise veröffentlicht (verschiedene Ausgaben des Buches erschienen in Polen, Japan und Ungarn). Jedoch sind beide Bücher längst bibliographische Raritäten

---

[1]) P. S. ALEXANDROV und V. A. EFREMOVIČ, Abriß der Grundideen der Topologie (russ.). Moskau 1936.

geworden. In dem hier vorliegenden Buch ist ein Teil des Materials aus dem „Abriß“ enthalten. Dies ist zugleich der Anteil von V. A. EFREMOVIČ an diesem Buch. (Er war ebenfalls Hauptinitiator für das Entstehen des „Abriß“ und der Popularisierung der Topologie). Der Hauptanteil des Textes ist jedoch von mir umgeschrieben worden. Dabei wurden einige wissenschaftliche Resultate berücksichtigt, die in den letzten Jahren erzielt wurden. Weiterhin wurden von mir mehr als 200 Aufgaben in das Buch eingearbeitet, denn das Studium eines wissenschaftlichen Buches (auch eines populärwissenschaftlichen) ist nur dann von Nutzen, wenn man selbständig über die behandelten Probleme nachdenkt.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, S. P. NOVIKOV für seine wertvollen Hinweise zu danken; ebenso allen Lesern, die ihre Meinung zu diesem Buch mitteilen und Hinweise geben.

V. G. BOLTJANSKIJ

Diese Ausgabe wurde von V. G. BOLTJANSKIJ zum Druck vorbereitet. Dazu überarbeitete und ergänzte er das Material aus dem „Abriß“. Ich möchte ihm hierfür herzlich danken; ebenfalls herzlicher Dank gilt S. P. NOVIKOV für seine wertvollen Hinweise.

V. A. EFREMOVIČ

Inhalt