

**mathematik-abc für das Lehramt**

**E. Warmuth / W. Warmuth**

**Elementare  
Wahrscheinlichkeits-  
rechnung**

# mathematik-abc für das Lehramt

Herausgegeben von

Prof. Dr. Stefan Deschauer, Dresden

Prof. Dr. Klaus Menzel, Schwäbisch Gmünd

Prof. Dr. Kurt Peter Müller, Karlsruhe

Die Mathematik-**ABC**-Reihe besteht aus thematisch in sich abgeschlossenen Einzelbänden zu den drei Schwerpunkten:

**A**lgebra und Analysis,  
**B**ilder und Geometrie,  
**C**omputer und Anwendungen.

In diesen drei Bereichen werden Standardthemen der mathematischen Grundbildung gut verständlich behandelt, wobei Zielsetzung, Methoden und Schulbezug des behandelten Themas im Vordergrund der Darstellung stehen.

Die einzelnen Bände sind nach einem „Zwei-Seiten-Konzept“ aufgebaut: Der fachliche Inhalt wird fortlaufend auf den linken Seiten dargestellt, auf den gegenüberliegenden rechten Seiten finden sich im Sinne des „learning by doing“ jeweils zugehörige Beispiele, Aufgaben, stoffliche Ergänzungen und Ausblicke.

Die Beschränkung auf die wesentlichen fachlichen Inhalte und die Erläuterungen anhand von Beispielen und Aufgaben erleichtern es dem Leser, sich auch im Selbststudium neue Inhalte anzueignen oder sich zur Prüfungsvorbereitung konzentriert mit dem notwendigen Rüstzeug zu versehen. Aufgrund ihrer Schulrelevanz eignet sich die Reihe auch zur Lehrerweiterbildung.

# Elementare Wahrscheinlichkeits- rechnung

Vom Umgang mit dem Zufall

Von Dr. Elke Warmuth  
Humboldt-Universität zu Berlin

und Dr. Walter Warmuth  
Berlin



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1998

**Dr. Elke Warmuth**

Geboren 1949 in Oybin. Studium der Mathematik in Wrocław. Promotion 1977. Seit 1973 tätig als Mathematikerin, seit 1985 in der Lehramtsausbildung an der Humboldt-Universität zu Berlin.

Arbeitsgebiet: Didaktik der Mathematik.

**Dr. Walter Warmuth**

Geboren 1948 in Fürstenwalde. Studium der Mathematik in Moskau. Promotion 1975, Habilitation 1988 an der Humboldt-Universität zu Berlin. Seit 1972 tätig als Mathematiker.

Arbeitsgebiet: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Datenanalyse.

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Warmuth, Elke :**

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung :

vom Umgang mit dem Zufall / von Elke Warmuth und Walter Warmuth. –

Stuttgart ; Leipzig : Teubner, 1998

(Mathematik-ABC für das Lehramt)

ISBN-13: 978-3-519-00225-3

e-ISBN-13: 978-3-322-86761-2

DOI: 10.1007/978-3-322-86761-2

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© 1998 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

# Vorwort

*Plus on vieillit, plus on se persuade, que sa sacrée Majesté le Hazard fait les trois quarts de la besogne de ce misérable Univers.*

*Friedrich II.<sup>1</sup>*

Regnet es morgen bei unserer Klassenfahrt? Welcher Partei gelingt es, bei der nächsten Wahl mehr als 3 % zuzulegen? Wie lange werden wir heute an der Kasse im Einkaufsmarkt warten müssen? Reichen die sechs Blumensträuße aus, die wir für die Geburtstagskinder unter den erwarteten ca. 350 Eröffnungsgästen bereitgelegt haben? Wird wenigstens eines der zusätzlich eingebauten Sicherheitselemente der zufällig schwankenden Belastung standhalten?

Wir sind es im täglichen Leben gewohnt, oft mit dem Ungewissen umzugehen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich damit, zufällige Erscheinungen mit mathematischen Modellen zu erfassen. In diesem Buch wollen wir Grundideen und Begriffe dieser Theorie vermitteln.

Bei einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h legen wir in 120 Minuten genau 160 km zurück. Zum Zeitpunkt unserer Zeugung kannten unsere Eltern unseren Geburtstag wohl kaum. Der Gewinnfall beim Roulette ist völlig unvorhersehbar.

Wir werden Vorgänge mit ungewissem Ausgang modellieren. Den Grad der Ungewißheit, die Überzeugtheit über den Ausgang des Vorgangs werden wir messen - als Maß dafür die Wahrscheinlichkeit festlegen. Dabei werden wir aufzeigen, daß auch das Zufällige Gesetzen genügt. Mit Wahrscheinlichkeiten in einem Modell werden wir rechnen, aber auch großen Wert darauf legen, die erhaltenen Ergebnisse bezogen auf den modellierten Sachverhalt zu interpretieren.

---

<sup>1</sup> Brief an Voltaire am 26.12.1773 - „Je älter man wird, desto mehr überzeugt man sich davon, daß Seine Majestät der Zufall drei Viertel aller Geschäfte dieses armseligen Universums besorgt.“

Wir stellen „abc-gerecht“ immer auf der linken Seite die Theorie dar, auf den rechten Seiten unterstützen mehr als 250 Beispiele und Aufgaben das Lernen und Lehren. Die Lösungen bzw. Hinweise zu den Aufgaben finden Sie am Schluß des Buches.

Gegenstand des Kapitels 1 ist die Aufbereitung und Veranschaulichung von Daten. Im Kapitel 2 werden Modelle für solche Vorgänge erstellt, bei denen sich die Ergebnisse nicht unbedingt genau vorhersagen lassen und Wahrscheinlichkeiten deren Eintreten „steuern“. Wie Teilinformationen über den Ablauf des Vorgangs für die Verteilung von Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden oder auch nicht relevant sind, davon ist im 3. Kapitel die Rede. Die dabei wirkenden Gesetze sind die Pfadregeln und die Produktregel für unabhängige Ereignisse. Die Beschreibung von Größen, die bestimmte Werte nur mit gewissen Wahrscheinlichkeiten annehmen, und ihre Charakterisierung durch Kenngrößen erfolgt im Kapitel 4. Im nächsten Kapitel werden Folgen von Vorgängen untersucht, wo jeweils nur das Eintreten oder Nichteintreten eines fixierten Ereignisses - Erfolg genannt - registriert wurde. Dem Testen von Hypothesen über Erfolgswahrscheinlichkeiten widmen wir das Kapitel 6. Im letzten Kapitel zeigen wir, wie mit Hilfe von Zufallsgeneratoren Vorgänge mit zufälligem Ergebnis nachgeahmt werden können. Solche Simulationen bieten auch für den Stochastikunterricht zahlreiche Potenzen: Es werden passende Modelle für Vorgänge entworfen, ihre Adäquatheit wird auf experimentellem Wege untersucht, und es können Erfahrungen im Umgang mit zufälligen Phänomenen gesammelt werden.

Wir bedanken uns bei Herrn Prof. Dr. Menzel (Schwäbisch Gmünd) und bei Herrn Weiß vom Teubner-Verlag für die vertrauensvolle Zusammenarbeit.

Ein besonderer Dank gilt unseren Kindern: Die Graphiken fertigte Michael an, Nadine las kritisch das Manuskript, und Daniel hatte Verständnis für unsere Absicht, das Buch pünktlich fertigzustellen.

Nächst Neuendorf, Mai 1998

Elke und Walter Warmuth

# Inhalt

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Auswertung von statistischen Daten</b> .....                             | <b>9</b>  |
| 1.1      | Merkmale, Urliste, Strichliste, Stengel-und-Blatt-Diagramm .....            | 9         |
| 1.2      | Klasseneinteilungen.....  | 12        |
| 1.3      | Relative Häufigkeiten und Häufigkeitsverteilungen.....                      | 14        |
| 1.4      | Kenngrößen von Häufigkeitsverteilungen.....                                 | 16        |
| 1.4.1    | Mittelwerte .....   | 16        |
| 1.4.2    | Streuungsmaße .....   | 20        |
| 1.4.3    | Glockenförmige Häufigkeitsverteilungen .....                                | 24        |
| <br>     |   |           |
| <b>2</b> | <b>Modelle für Vorgänge mit zufälligem Ergebnis</b> .....                   | <b>26</b> |
| 2.1      | Ergebnismenge und Ereignisse.....   | 26        |
| 2.2      | Das empirische Gesetz der großen Zahlen .....                               | 28        |
| 2.3      | Operationen mit Ereignissen .....   | 30        |
| 2.4      | Wahrscheinlichkeit.....   | 32        |
| 2.4.1    | Axiome einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.....                             | 32        |
| 2.4.2    | Weitere Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung .....             | 36        |
| 2.4.3    | Wahrscheinlichkeit und Erfahrung.....                                       | 40        |
| 2.5      | Mehrstufige Vorgänge und Baumdiagramme .....                                | 42        |
| 2.6      | Die Pfadregeln .....  | 44        |
| 2.7      | Anzahlbestimmung mit Hilfe von Baumdiagrammen .....                         | 48        |
| 2.7.1    | Anzahl der Anordnungen einer $n$ -elementigen Menge (Permutationen).....    | 48        |
| 2.7.2    | Anzahl der Anordnungen von $k$ Elementen einer $n$ -elementigen Menge.....  | 50        |
| 2.7.3    | Anzahl der $k$ -elementigen Teilmengen einer $n$ -elementigen Menge.....    | 52        |
| 2.7.4    | Der allgemeine Zählalgorithmus oder die Produktregel der Kombinatorik ..... | 52        |
| <br>     |   |           |
| <b>3</b> | <b>Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit</b> .....               | <b>54</b> |
| 3.1      | Bedingte Wahrscheinlichkeiten .....   | 54        |
| 3.2      | Unabhängigkeit von zwei Ereignissen .....                                   | 58        |
| 3.3      | Unabhängigkeit von $n$ Ereignissen .....                                    | 60        |
| 3.4      | Operationen mit unabhängigen Ereignissen .....                              | 62        |
| 3.5      | Genetische Modelle .....  | 64        |
| 3.6      | Zuverlässigkeit von Systemen .....  | 66        |
| 3.7      | Bernoulli-Experimente und Bernoulli-Ketten .....                            | 70        |
| 3.7.1    | Die Bernoulli-Formel .....  | 70        |
| 3.7.2    | Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg .....                    | 74        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Diskrete Zufallsgrößen</b> .....  | <b>76</b>  |
| 4.1      | Zufallsgrößen und ihre Verteilung .....  | 76         |
| 4.2      | Der Erwartungswert einer Zufallsgröße .....  | 80         |
| 4.3      | Die Varianz einer Zufallsgröße .....   | 84         |
| 4.4      | Eigenschaften des Erwartungswertes und der Varianz.....                            | 86         |
| 4.4.1    | Eine andere Formel für den Erwartungswert.....                                     | 86         |
| 4.4.2    | Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz .....                                 | 88         |
| <b>5</b> | <b>Die Binomialverteilung und das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen</b> ...92 |            |
| 5.1      | Die Verteilung der Anzahl der Erfolge in einer Bernoulli-Kette.....                | 92         |
| 5.2      | Kenngrößen der Verteilung der Anzahl der Erfolge .....                             | 94         |
| 5.3      | Lange Bernoulli-Ketten .....   | 98         |
| 5.3.1    | Die Anzahl der Erfolge in langen Bernoulli-Ketten .....                            | 98         |
| 5.3.2    | Die relative Häufigkeit der Erfolge in langen Bernoulli-Ketten.....                | 102        |
| 5.4      | Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen.....                                    | 106        |
| <b>6</b> | <b>Testen von Hypothesen über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit</b> .....         | <b>110</b> |
| 6.1      | Das Testproblem.....   | 110        |
| 6.2      | Die Entscheidungsregel .....   | 112        |
| 6.3      | Die Fehlermöglichkeiten und signifikante Abweichungen .....                        | 116        |
| 6.4      | Das beobachtete Signifikanzniveau.....   | 120        |
| <b>7</b> | <b>Simulation von Vorgängen mit zufälligem Ergebnis</b> .....                      | <b>122</b> |
| 7.1      | Zufallsgeneratoren .....   | 122        |
| 7.2      | Zwei Simulationsstudien .....  | 126        |
| 7.2.1    | Warten auf den ersten Erfolg.....  | 126        |
| 7.2.2    | Die vollständige Serie.....  | 128        |
| 7.3      | Testen von Zufallsziffern .....  | 130        |
| 7.4      | Ziehen von zufälligen Stichproben.....   | 132        |
|          | <b>Lösungen</b> .....  | <b>134</b> |
|          | <b>Literaturhinweise</b> .....   | <b>148</b> |
|          | <b>Stichwortverzeichnis</b> .....  | <b>149</b> |