

Helga Braunger-Galuschka

**Mathematik
für die Kollegstufe**

Aus dem Programm
Mathematik

Mathematische Formelsammlung

von F. Kemnitz und R. Engelhard

Analysis für Fachoberschulen

von K.-H. Pfeffer

Mathematik für Fachschulen Technik

von H. Rapp

Mathematik für die Kollgestufe

von H. Braunger-Galuschka

Mathematik für Ingenieure, Band 1 und 2

von L. Papula

Übungen zur Mathematik für Ingenieure

von L. Papula

Mathematische Formelsammlung

von L. Papula

Helga Braunger-Galuschka

Mathematik für die Kollegstufe

Mit 157 Abbildungen



Der Herausgeber:

Dipl.-Ing. Kurt Mayer, Oberstudienrat a.D., war bis 1990 Leiter der Wilhelm-Maybach-Schule, Stuttgart-Bad Cannstatt und bis 1992 Leiter des einjährigen Berufskollegs zur Erlangung der Fachhochschulreife beim Kolping-Bildungswerk, Stuttgart.

Die Autorin:

Helga Braunger-Galuschka, Assistentin des Lehramtes, unterrichtet seit 1987 am Kolping-Berufskolleg in Stuttgart-Bad Cannstatt.

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1993
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1993

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Verlagsgruppe Bertelsmann International.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Klaus Birk, Wiesbaden

Druck und buchbinderische Verarbeitung: W. Langelüddecke, Braunschweig

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN-13: 978-3-528-04923-2
DOI: 10.1007/978-3-322-86590-8

e-ISBN-13: 978-3-322-86590-8

Vorwort

Mathematik für die Kollegstufe -

... für wen?

Das einjährige Berufskolleg zur Erlangung der Fachhochschulreife faßt Kollegiatinnen und Kollegiaten der verschiedensten Berufsgruppen in Klassen mit Schwerpunktfach Technik, Betriebswirtschaftslehre, Biologie oder Gestaltung zusammen. Daß im Fach Mathematik aufgrund dieser beruflichen Fächerung die unterschiedlichsten Voraussetzungen gegeben sind, liegt auf der Hand. Dazu kommt, daß für den einen oder anderen Kollegiaten die Schulzeit schon lange zurückliegt und die Inhalte verständlicherweise in Vergessenheit geraten sind. Vor diesem Hintergrund entstand die Idee, für diesen Leserkreis ein Buch zu konzipieren, das inhaltlich den gesamten Pflichtstoff 'Analysis' abdeckt. Da sich die Mathematik in vergleichbaren Bildungseinrichtungen im wesentlichen nicht unterscheidet, ist auch der Einsatz z.B. im dreijährigen Kolleg oder in beruflichen Gymnasien u.a. denkbar. Darüber hinaus entspricht das vorliegende Buch wesentlichen Inhalten der Bildungsprogramme anderer Bundesländer. Bei der Erstellung des Buches wurde darauf geachtet, daß es nicht nur unterrichtsbegleitend eingesetzt werden kann, sondern daß es in besonderem Maße zum Selbststudium anregt.

... mit welchem Ziel?

Ziel dieses vorliegenden Buches ist es, jeden einzelnen Leser an der Stelle abzuholen, wo er stehen geblieben ist, und ihm in einem Art Marathonlauf - schließlich stehen nur wenige Unterrichtswochen zur Verfügung - die Kenntnisse zu vermitteln, die er braucht, sich qualifiziert den mathematischen Forderungen der Fachhochschulen zu stellen.

.... auf welchem Weg?

Um diesem Ziel gerecht zu werden, sind innerhalb dieses Buches einige Weichen gestellt:

- Im Kapitel 'Grundlagen' wird das gedanklich-theoretische wie auch das rechnerisch-praktische Fundament für die weiteren Überlegungen bereitgestellt.
- Methodisch sollen zwar "die mathematischen Inhalte vorwiegend anwendungsbezogen eingeführt und behandelt werden"¹, um wirklich jedem den Weg in die Mathematik zu ebnen. Ohne sachliche und formale Präzision würde dieses Buch jedoch den Weg in die weiterführende Mathematik verbauen. So sollen Praxis und Theorie sich nicht ausschließen, sondern gegenseitig bereichern.

¹Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg: Kultus und Unterricht, Bildungsplan für das Berufskolleg (1989), S. 86

- Die Aufgaben wurden in verschiedene Typen eingeteilt: Mit einer Folge von GRUNDAUFGABEN werden die neuen Lerninhalte vorgestellt, präzisiert und verallgemeinert. Kontrollergebnisse gestatten das neu Gelernte zu überprüfen. Eine breite Auswahl von Übungsaufgaben ermöglicht, je nach Bedarf, das Erarbeitete zu festigen. Dabei wurde auf einen angemessen steigenden Schwierigkeitsgrad geachtet. Beispiele aus der Praxis runden diese Aufgaben ab.

Zum Schluß...

gilt der Dank all denen, die mich beim Erstellen dieses Buches begleiteten. Anführen möchte ich dabei:

- Herrn OStD Mayer, der den Anstoß für das Entstehen dieses Buches gab,
- den Mitarbeitern des Verlages, die die Realisierung des Buches ermöglichten, vor allem Herrn Kühn von Burgsdorff und Herrn Ewald Schmitt.

Ganz besonders möchte ich in diesem Zusammenhang meine Studienkollegin Margot Krank erwähnen, die sich um die mathematische Durchsicht dieses Buches bemühte.

Helga Braunger-Galuschka

Stuttgart, im Juli 1993

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Mengentheoretische Grundbegriffe.....	1
1.1.1 Definition und Darstellung einer Menge.....	1
1.1.2 Mengenoperationen	3
1.1.3 Zahlmengen.....	4
1.2 Rechenpraktische Hinweise.....	5
1.2.1 Rechenoperationen und ihre Gesetzmäßigkeiten	5
1.2.2 Das Rechnen mit Brüchen.....	6
1.2.3 Die binomischen Formeln	10
1.2.4 Das PASCALSche Dreieck	12
1.2.5 Termumformungen.....	13
1.3 Der Funktionsbegriff: Die Funktion und ihr Schaubild.....	15
1.3.1 Zuordnungen und Funktionen	15
1.3.2 Definitions- und Wertemenge von Funktionen.....	17
1.3.3 Schaubild und Wertetabelle einer Funktion.....	23
2 Die Grundfunktionen und ihre Schaubilder	27
2.1 Lineare Funktionen und Gleichungen	27
2.1.1 Lineare Funktionen und ihre Schaubilder	27
2.1.2 Aufstellen von Geradengleichungen	30
2.1.3 Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme	35
2.1.3.1 Rechnerische Behandlung	35
2.1.3.2 Zeichnerische Behandlung.....	37
2.1.4 Klassifizierung linearer Gleichungssysteme.....	38
2.1.5 Parallelität und Orthogonalität.....	40
2.2 Quadratische Funktionen und Gleichungen.....	43
2.2.1 Quadratische Funktionen und ihre Schaubilder	43
2.2.2 Quadratische Gleichungen.....	48
2.2.2.1 Beträge.....	48
2.2.2.2 Betragsgleichungen	48
2.2.2.3 (Rein-) Quadratische Gleichungen	49
2.2.2.4 Gemischtquadratische Gleichungen.....	50
2.2.3 Klassifizierung quadratischer Gleichungen.....	51
2.2.4 Bestimmung quadratischer Funktionen.....	55
2.2.4.1 Der allgemeine Ansatz.....	55
2.2.4.2 Der Ansatz über die Scheitelform der Parabelgleichung.....	56
2.2.4.3 Der Nullstellenansatz.....	57
2.2.4.4 Die Diskriminantenmethode	57

2.3	Potenz- und Wurzelfunktionen.....	61
2.3.1	Potenzen und Potenzfunktionen mit Exponenten aus \mathbb{N}	61
2.3.1.1	Potenzen mit Exponenten aus \mathbb{N}	61
2.3.1.2	Potenzfunktionen mit Exponenten aus \mathbb{N} und ihre Schaubilder	64
2.3.2	Potenzen und Potenzfunktionen mit Exponenten aus \mathbb{Z}	66
2.3.2.1	Potenzen mit Exponenten aus \mathbb{Z}	66
2.3.2.2	Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ und ih- re Schaubilder	67
2.3.3	Potenzen und Potenzfunktionen mit Exponenten aus \mathbb{Q}	69
2.3.3.1	Potenzen mit Exponenten aus \mathbb{Q}	69
2.3.3.2	Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ und ihre Schaubilder.....	71
2.3.4	Umkehrfunktionen.....	74
2.4	Exponential- und Logarithmenfunktionen	76
2.4.1	Die allgemeine Exponentialfunktion	76
2.4.1.1	Wachstumsvorgänge	76
2.4.1.2	Die allgemeine Exponentialfunktion und ihr Schau- bild	77
2.4.2	Wachstums- und Zerfallsprozesse	78
2.4.3	Die natürliche Exponentialfunktion	81
2.4.3.1	Die EULERSche Zahl e	82
2.4.3.2	Die natürliche Exponentialfunktion und ihr Schaubild.....	82
2.4.4	Die allgemeine Logarithmenfunktion und ihr Schaubild	84
2.4.5	Das Rechnen mit Logarithmen	85
2.4.5.1	Die wichtigsten Logarithmensysteme.....	86
2.4.5.2	Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.....	86
2.4.5.3	Die Logarithmengesetze	87
2.4.6	Exponential- und Logarithmengleichungen.....	89
2.4.7	Die natürliche Logarithmenfunktion und ihr Schaubild.....	94
2.4.8	Zusammenhang zwischen der allgemeinen und der natürlichen Exponentialfunktion.....	95
2.5	Trigonometrische Funktionen.....	98
2.5.1	Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus.....	101
2.5.1.1	Veranschaulichung der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus am Einheitskreis.....	101
2.5.1.2	Wichtige Eigenschaften der Sinus- und der Kosinus- funktion	102
2.5.1.3	Wichtige Sinus- und Kosinuswerte.....	102
2.5.2	Die trigonometrische Funktion Tangens	104
2.5.2.1	Veranschaulichung der Winkelfunktion Tangens am Einheitskreis	104
2.5.2.2	Wichtige Eigenschaften der Tangensfunktion.....	105
2.5.3	Der Sinus- und der Kosinussatz.....	107
2.5.3.1	Der Kosinussatz.....	107
2.5.3.2	Der Sinussatz.....	108

2.5.4	Die Schaubilder trigonometrischer Funktionen	112
2.5.4.1	Das Bogenmaß	112
2.5.4.2	Das Schaubild der Sinus- und der Kosinusfunktion.....	114
2.5.4.3	Das Schaubild der Tangensfunktion.....	116
2.5.5	Dehnung und Stauchung der Sinus- und der Kosinuskurve senkrecht zu den Koordinatenachsen	118
2.6	Übersicht über die bisherigen Funktionen und ihre Schaubilder.....	122
3	Zusammengesetzte Funktionen und ihre Schaubilder	134
3.1	Linearkombinationen von Funktionen.....	134
3.1.1	Beispiele für zusammengesetzte Funktionen.....	134
3.1.2	Der Begriff 'Linearkombination von Funktionen'	135
3.1.3	Schaubilder 'linearkombinierter' Funktionen	136
3.2	Die ganzrationalen Funktionen.....	138
3.2.1	Der Begriff 'ganzrationale Funktion'.....	138
3.2.2	Symmetrieuntersuchung der Schaubilder ganzrationaler Funk- tionen.....	140
3.2.3	Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen.....	144
4	Einführung in die Differentialrechnung	154
4.1	Das Tangentenproblem.....	154
4.1.1	Problemstellung.....	154
4.1.2	Verallgemeinerung des Tangentenbegriffes	154
4.1.3	Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle.....	156
4.1.4	Die Ableitungsfunktion	160
4.1.5	Zusammenstellung der wichtigsten Ableitungsfunktionen	162
4.1.6	Drei wichtige Ableitungsregeln	167
4.1.6.1	Die Faktorregel.....	168
4.1.6.2	Die Summenregel	169
4.1.6.3	Die vereinfachte Kettenregel.....	170
4.2	Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen: Das Newton-Verfahren.....	175
4.2.1	Vorbemerkung	175
4.2.2	Das NEWTON-Verfahren	177
4.3	Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Schaubildes einer Funktion.....	181
4.3.1	Extremstellen und Extremwerte einer Funktion.....	181
4.3.2	Zwei Kriterien zur Ermittlung von Hoch- und Tiefpunkten	183
4.3.3	Wendestellen einer Funktion.....	190
4.3.4	Zwei Kriterien zur Ermittlung von Wendepunkten	191
4.4	Das Verfahren einer vollständigen Funktionsuntersuchung.....	195
4.4.1	Der Acht-Punkte-Katalog.....	195
4.4.2	Die Funktionsuntersuchung am Beispiel ganzrationaler Funk- tionen.....	197
4.4.3	Die Funktionsuntersuchung am Beispiel transzienter Funk- tionen.....	202
4.5	Praxisorientierte Problemstellungen der Differentialrechnung.....	207
4.5.1	Bestimmung ganzrationaler Funktionen.....	207
4.5.2	Extremwertprobleme.....	214

5	Einführung in die Integralrechnung.....	220
5.1	Das bestimmte Integral	220
5.1.1	Problemstellung	220
5.1.2	Definition des bestimmten Integrals.....	222
5.1.3	Weiterführende Beispiele	222
5.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.....	225
5.2.1	Stammfunktionen	225
5.2.2	Formulierung des Hauptsatzes	227
5.3	Die wichtigsten Eigenschaften des bestimmten Integrals.....	230
5.3.1	Linearität des bestimmten Integrals	230
5.3.2	Intervalladditivität	233
5.4	Berechnung weiterer Flächeninhalte mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.....	236
5.4.1	Inhaltsberechnung von Flächen, die teils unter- teils oberhalb der x -Achse liegen	236
5.4.2	Inhaltsberechnung von Flächen zwischen zwei (sich schneidenden) Kurven.....	240
	Stichwortverzeichnis.....	245