VIEWEG
MATHEMATIK
LEXIKON

Taschenbücher für das Grundstudium Mathematik

Gerd Fischer
Analytische Geometrie

Gerd Fischer
Lineare Algebra

Otto Forster
Analysis (3 Bände)

Gerhard Frey
Elementare Zahlentheorie

Ulf Friedrichsdorf
Alexander Prestel
Mengenlehre für den Mathematiker

Ulrich Krengel
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Ernst Kunz
Algebra

Gerhard Opfer
Numerische Mathematik für Anfänger

VIEWEG MATHEMATIK LEXIKON

Begriffe/Definitionen/Sätze/Beispiele für das Grundstudium

Erarbeitet von
Otto Kerner, Joseph Maurer, Jutta Steffens,
Thomas Thode und Rudolf Voller

2., überarbeitete Auflage

vieweg

Dieses Buch ist eine vollständig neubearbeitete und erweiterte Fassung des 1981 erschienenen Werkes
Joseph Maurer, Mathemecum.

1. Auflage 1988
2., überarbeitete Auflage 1993

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Weisbaden 1993

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Verlagsgruppe Bertelsmann International.

Satz: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-16308-2 ISBN 978-3-322-86393-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-86393-5

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist entstanden unter Erinnerungen an die Zeit des eigenen Mathematikstudiums und unter dem Eindruck der Betreuung und Ausbildung von Mathematikstudenten heute. Beides hatte zu dem Wunsch geführt, über ein kleines handliches Nachschlagewerk zu verfügen, wenn der Student feststellen muß, daß er Definitionen oder den Wortlaut von Sätzen nicht in der notwendigen Präzision behalten hat oder daß ihm Dinge, die ihm vor wenigen Monaten noch vertraut waren, schon wieder entfallen sind.
Man braucht dann kein Lehrbuch und keinen straffen Übersichtsartikel über die Theorie, denn darin ist die Stelle, an der es hakt, oft schwer zu finden und meist so in einen logischen Aufbau eingefügt, daß es vor allem den jüngeren Studenten schwerfällt, die richtige Auskunft heranzuziehen.
Man braucht ein Büchlein, das in Abgrenzung auf den heute üblichen Stoffumfang der mathematischen Standardvorlesungen möglichst diejenigen Informationen unter geeigneten Stichwörtern zusammenfaßt, die einem Studenten erfahrungsgemäß an der Stelle am nützlichsten sind. Dazu gehören bei den Definitionen Beispiele und Gegenbeispiele, bei den Sätzen gelegentlich Angaben über wichtige Beweismittel und allgemein Hinweise auf Begriffe, die man möglicherweise in Zusammenhang mit dem vorliegenden Stichwort ebenfalls nachschlagen sollte. Es mag auch die englische und französische Übersetzung des Begriffes dazugehören. Der Student kann an diesen Aufstellungen die Stichworte auch als Prüfungsfragen interpretieren und das Buch so z.B. im Sinne eines Repetitoriums verwenden.
Aus vielerlei Gründen war es notwendig, für diese Auflage das „Mathemecum“ – unter Wahrung der ursprünglichen Intention – vollständig zu überarbeiten.
Das Buch wendet sich in erster Linie an Studenten im Grundstudium; damit ist gleichzeitig ein wesentliches Problem bei der Neubearbeitung angesprochen: Der Inhalt des Grundstudiums ist nicht allgemein gültig festgelegt. Die Autoren waren sich darüber einig, daß die Vorlesungen Analysis einschließlich Differentialgleichungen und Funktionentheorie, Lineare Algebra, Algebra, Topologie, Elementare Stochastik und Numerische Mathematik das Kernstück des Grundstudiums bilden und somit umfassender abgedeckt werden müssen; aus diesem Grunde wurden die Gebiete Elementare Stochastik und Numerische Mathematik völlig neu in das Lexikon aufgenommen. Funktionalanalysis,

Differentialgeometrie und Zahlentheorie wurden nur stützend für die oben genannten Gebiete berücksichtigt; ebenso wurde mit Begriffen aus den Grundlagen sparsam umgegangen; das war schon deshalb nötig, um den Rahmen des Buches nicht zu sprengen.
Um von vornherein Fehler und Inkonsistenzen von Begriffen gering zu halten, wurde die Arbeit nach Sachgebieten auf mehrere Autoren verteilt; dies schien außerdem die sicherste Grundlage für eine ausgewogene Berücksichtigung der einzelnen Teilgebiete zu sein.
Da es keinen Konsens darüber gibt, was z.B. eine Einführung in die Algebra oder in die numerische Mathematik enthalten soll, mußten die Autoren eine subjektive Auswahl in den einzelnen Gebieten treffen; diese wurde durch eigene Erfahrungen auf dem Gebiet als Student und als Unterrichtender bestimmt.
Unser Dank gilt Herrn *C. Vogt*, der mit viel Sorgfalt das Gebiet der Analysis übernommen hatte, nach erster Bearbeitung aber leider ausschied; weiterhin danken wir allen, die uns durch Rat und Tat unterstützt haben, allen Sekretärinnen im Institut, die neben ihren anderen Aufgaben die ständig Veränderungen unterworfenen Manuskripte unermüdlich neu geschrieben haben. Nicht zuletzt gilt unser besonderer Dank Frau *Ulrike Schmickler-Hirzebruch*, ohne deren geduldige Betreuung diese Überarbeitung sicher nicht zustande gekommen wäre.
Die zahlreichen Äußerungen der Leser zur Mathemecum-Ausgabe haben die Überarbeitung des Buches in starkem Maße beeinflußt; für Reaktionen und Verbesserungsvorschläge sind die Autoren dankbar und werden sie so weit wie möglich berücksichtigen.

Februar 1988 *O. Kerner, J. Maurer, J. Steffens, T. Thode, R. Voller*

Vorwort zur zweiten Auflage

Gegenüber der 1. Auflage wurden in dieser nur Kleinigkeiten verbessert bzw. ergänzt. Durch drucktechnische Vorgaben waren die Möglichkeiten der Umgestaltung sehr eingeschränkt. In vielen Zuschriften wurden Wünsche geäußert, noch dieses oder jenes Stichwort aufzunehmen. Leider erlaubt der Umfang des Buches nicht, diesen Anregungen zu folgen.

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zum Gebrauch

Unter einem Stichwort steht *kursiv* zuerst der englische, dann der französische Ausdruck für das Stichwort (es sei denn, Übersetzungen sind nicht üblich oder ganz offensichtlich).

Das Zeichen → ist (je nach dem Zusammenhang) zu lesen als „wird erklärt unter dem Stichwort ...“ oder „Näheres hierzu noch bei ...“ oder „In diesem Zusammenhang sei erinnert an ...“. In jedem Fall stehen hinter → Stichwörter, die im Buch erläutert werden.

Im Text sind diejenigen Begriffe *kursiv* gedruckt, die an dieser Stelle erklärt werden (insbesondere also das Stichwort selbst). Wird für die Erklärung eines Stichwortes auf ein anderes verwiesen, wie z.B. bei alternierend → multilineare Abbildung, so steht *alternierend* im Artikel zu „multilineare Abbildung“ im Kursivdruck.

Durch das Zeichen ° unmittelbar vor einem Begriff wird angedeutet, daß dazu im Buch ein Stichwortartikel vorhanden ist. (Es kann vorkommen, daß das Stichwort nicht ganz genau denselben Wortlaut hat; so ist z.B. bei °Matrizenrechnung das Stichwort „Matrix“ gemeint). Der Benutzer soll dadurch ermutigt werden, bei Bedarf dort nachzuschlagen. In offensichtlichen Fällen (z.B. wenn der Begriff in einem Artikel mehrfach vorkommt) kann das Zeichen ° auch fehlen, obwohl das Stichwort im Buch erklärt ist.

Die Überarbeitung durch mehrere Mitarbeiter hat möglicherweise den Mechanismus der Zeichen → und ° gestört. Für Hinweise auf derartige „Fehlverweise“ sind die Autoren dankbar.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	$=$	$\{1,2,3,\ldots\}$	: Menge der natürlichen Zahlen (ohne 0)
$\mathbb{N}_0$	$=$	$\{0,1,2,\ldots\}$	: Menge der natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{Z}$	$=$	$\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$	: Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	$=$	$\left\{\frac{p}{q}\,\middle\vert\, p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0\right\}$	: Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	:	Körper der reellen Zahlen	
$\mathbb{R}^*$	:	Menge der reellen Zahlen $\neq 0$	
$\mathbb{R}_+$	:	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	
$\mathbb{R}_+^*$	:	Menge der positiven reellen Zahlen	
$\mathbb{C}$	:	Körper der komplexen Zahlen	
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	:	n-faches Produkt von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit sich, versehen mit entsprechender Vektorraum- oder topologischer Struktur	
$\mathbb{K}$	$\in$	$\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$	
$\forall$	:	Allquantor ($\forall x\in X$: „Für alle Elemente x der Menge X gilt:“)	
$\exists$	:	Existenzquantor ($\exists x\in X$: „Es existiert (mindestens) ein Element x in der Menge X, so daß …“)	
$\Rightarrow$	:	Implikation ($a\Rightarrow b$: „a impliziert b“ oder „aus a folgt b“ oder „a ist hinreichend für b“ oder „b ist notwendig für a“)	
$\Leftrightarrow$	:	Äquivalenz ($a\Leftrightarrow b$: „a gilt genau dann, wenn b gilt“ oder „a ist dann und nur dann wahr, wenn b wahr ist“)	
$:=$	:	„per definitionem gleich“ ($a:=b$: „a wird durch b definiert“)	
$\ll$	:	„sehr viel kleiner als“	
$i=k(m)n$	:	„i läuft von k bis höchstens n in Schritten der Weite m“	
S^{n-1}	$=$	$\{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle x,x\rangle = 1\}$: Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$	
$\mathscr{C}(X,Y)$	:	Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y	

$\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\complement$, $\emptyset$, $\subset$, $\in$, $\times$	(→ Mengenlehre)
$\prod$	(→ Kartesisches Produkt)
$\mathscr{P}$	(→ Potenzmenge)
$\operatorname{card}(M)$	(→ Kardinalzahl)

$[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$	(→ Intervall)
$n!$	(→ Fakultät)
$\binom{n}{k}$	(→ Binomialkoeffizient)
e	(→ Eulersche Zahl)
exp	(→ Exponentialfunktion)
sin, cos, tan, cot, arcsin, arccos, arctan, arccot	(→ trigonometrische Funktionen)
sinh, cosh, tanh, coth, Arsinh, Arcosh, Artanh, Arcoth	(→ Hyperbel-Funktionen)
1_A	(→ charakteristische Funktion)
f^{-1}, $f \circ g$, $f\vert_M$, i_M, id_M, $\mapsto$	(→ Abbildung)
$\mathring{A}$	(→ offener Kern)
$\bar{A}$	(→ abgeschlossene Hülle)
∂A, $\mathrm{Rd}(A)$	(→ Rand)
$\oplus$	(→ direkte Summe)
$\otimes$	(→ Tensorprodukt, → σ-Algebra, → Produktmaß)
$<\circ, \circ>$	(→ Skalarprodukt)
$[x]_R$	(→ Äquivalenzrelation)
$(A \mid b)$	(→ lineares Gleichungssystem)
det	(→ Determinante)
dim	(→ Dimension eines Vektorraums)
$\mathrm{End}_K(V)$	(→ Endomorphismus)
$\mathbb{F}_p$	(→ Körper)
$GL(V)$, $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, $O(n, \mathbb{K})$, $O(n)$, $SO(n, \mathbb{K})$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$,	(→ allgemeine lineare Gruppe, → klassische Gruppen,
$SO(V)$, $SU(V)$	(→ Drehung)
$[G:H]$	(→ Index (einer Untergruppe))
$\mathrm{Hom}_K(V, W)$	(→ Lineare Abbildung)

$K(x)$, K/k,	
$\operatorname{grad}(K/k)$,	
$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$	(→ Körpererweiterung)
$K[X]$,	
$K[X_1, \ldots, X_n]$	(→ Polynom)
$K[[X]]$,	
$K[[X_1, \ldots, X_n]]$,	
$K\{X\}$,	
$K\{X_1, \ldots, X_n\}$	(→ Potenzreihe)
$K^{(m,n)}$, $K^{m \times n}$,	
$M(m \times n, K)$,	
$M_{m,n}(K)$	(→ Matrix)
$L(X, Y)$	(→ Banachraum)
$\operatorname{ord}(g)$	(→ p-Gruppe)
$\perp$, $U^{\perp}$	(→ orthogonal)
$\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}_n(K)$	(→ projektiver Raum)
$Q(X)$	(→ Quotientenkörper)
$\operatorname{rang} M$, $\operatorname{rg}(M)$	(→ Rang (einer Matrix))
(m, n), $m \mid n$	(→ Teilbarkeit in Integritätsringen)
${}^tA$, A^{-1}	(→ transponierte Matrix, → inverse Matrix)
X^*	(→ dualer Vektorraum)
X'	(→ Dualraum (eines topologischen Vektorraumes))
$\lvert \circ \rvert$	(→ Absolutbetrag)
$\lVert \circ \rVert$, $\lVert \circ \rVert_p$	(→ Norm, → ℓ^p-, L^p-Räume)
o, O	(→ Landausche Symbole)
$v \wedge w$	(→ äußere Algebra)
dx, $dx \wedge dy$	(→ Differentialform)
$\frac{df}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, Df, f',	
$f^{(n)}$, J_f, $D_i f$, f_{x_i},	
grad, ∇	(→ differenzierbar)
Δ	(→ Laplace-Operator)
lim	(→ Konvergenz)
lim inf, lim sup,	
$\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$	(→ limes superior)
rot, div	(→ Vektoranalysis)
$\mathscr{B}^n$	(→ σ-Algebra)
$\mathscr{B}^n_\lambda$, λ^n	(→ Lebesgue-Maß)
$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$,	
$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$	(→ Meßraum)
$(\Omega, \mathscr{A}, P)$	(→ Wahrscheinlichkeitsraum)

$P(A)$	(→ Wahrscheinlichkeit)
$P(A \mid B)$	(→ bedingte Wahrscheinlichkeit)
$\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}\,X$	(→ Varianz)
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	(→ Kovarianz)
$E(X)$, EX	(→ Erwartungswert)
$B(n, p)$	(→ Binomialverteilung)
$N(a, \sigma^2)$	(→ Normalverteilung)
π_λ	(→ Poissonverteilung)