

Andreas Herz, Martin Schalk
Repetitorium der Funktionentheorie

uni—script

Mathematik

Andreas Herz, Martin Schalk

Repetitorium der Funktionentheorie

**Mit über 120 ausführlich bearbeiteten
Prüfungsaufgaben**



DeutscherUniversitätsVerlag

GABLER · VIEWEG · WESTDEUTSCHER VERLAG

Die Deutsche Bibliothek — CIP-Einheitsaufnahme

Herz, Andreas:

Repetitorium der Funktionentheorie : mit über 120 ausführlich
bearbeiteten Prüfungsaufgaben / Andreas Herz ; Martin Schalk.

— Wiesbaden : Dt. Univ.-Verl., 1994

(DUV : Mathematik) (Uni script)

NE: Schalk, Martin:

Der Deutsche Universitäts-Verlag ist ein Unternehmen der
Verlagsgruppe Bertelsmann International.

© Deutscher Universitäts-Verlag GmbH, Wiesbaden 1994



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Gedruckt auf chlorarm gebleichtem und säurefreiem Papier

ISBN 978-3-8244-2054-4

ISBN 978-3-322-86195-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-86195-5

VORWORT

Als Pflichtveranstaltung für viele Studierende verschiedener Fachrichtungen kommt jeweils dem ersten Semester einer Vorlesungsreihe über Funktionentheorie eine besonders große Bedeutung zu. Deshalb setzten wir uns zum Ziel, die möglichen Inhalte einer solchen einführenden Veranstaltung zu einem Repetitorium zusammenzufassen, thematisch zu gliedern und anhand ausführliche bearbeiteter Prüfungsaufgaben zu erläutern.

Dem Studierenden soll mit diesem Repetitorium die Einordnung und das Erlernen des Vorlesungsstoffes erleichtert werden. Die zahlreichen bearbeiteten Aufgaben sollen das Verständnis der Theorie vertiefen, sowie eine Hilfe sein beim Lösen von Übungsaufgaben und bei der Vorbereitung auf die Semesterklausuren.

Bei der Auswahl des Inhalts berücksichtigten wir auch diejenigen Themen, die in einer einsemestrigen Einführungsvorlesung oft nur am Rande oder erst im zweiten Semester behandelt werden können, deren Wichtigkeit aber eine Aufnahme in dieses Repetitorium rechtfertigt. Beispiele hierzu sind die konformen Abbildungen, die harmonischen Funktionen, die Indexfunktion, die Homologieversionen der Integralsätze, die Riemannsche Zahlensphäre, der Holomorphiebegriff im unendlich fernen Punkt sowie die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß.

Jeder Paragraph gliedert sich in einen Theorie- und einen Aufgabenteil. Der erste Abschnitt faßt die wichtigsten Definitionen und Aussagen zusammen, die zum Lösen der Aufgaben des zweiten Teils benötigt werden.

Anders als in den meisten Lehrbüchern richten sich der Inhalt, die Gliederung und die Darstellung des Theorieteils nicht nach beweistechnischen oder historischen Gesichtspunkten. Es wurde vielmehr auf eine knappe, im wesentlichen vollständige und didaktisch sinnvolle Darstellung des Vorlesungsstoffes Wert gelegt. So wurden zum Beispiel die drei Vertauschungssätze bei kompakter Konvergenz, nämlich die Übertragung der Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit auf die Grenzfunktion, wegen ihrer Zusammengehörigkeit zu einem Paragraphen zusammengefaßt. Dies wurde in diesem Buch ermöglicht durch das Weglassen der zugehörigen Beweise, die der Studierende in Lehrbücher finden kann, die im Literaturverzeichnis angegeben wurden.

Die zahlreichen Gegenüberstellungen von komplexer und reeller Version wichtiger Sätze sollen Vergleiche ermöglichen, das Lernen erleichtern und die Vorteile der komplexen gegenüber der reellen Analysis verdeutlichen.

Der Aufgabenteil nimmt entsprechend der Bedeutung der Übung für den Lernprozeß einen besonders großen Platz ein.

Die über 120 bearbeiteten Aufgaben entnahmen wir der Bayerischen Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien. Für bayerische Lehramtskandidaten ist somit dieses Repetitorium zur Vorbereitung auf das Staatsexamen besonders geeignet. Es wurden alle Examensaufgaben der Funktionentheorie aus den Jahren 1989 bis 1993 aufgenommen. Sie wurden durch eine Auswahl weiterer Aufgaben aus den Jahren 1983 bis 1988 ergänzt.

Die Angaben wurden fast durchgehend im originalen Wortlaut übernommen. Nur selten wurden aus Gründen der Einheitlichkeit Symbole abgeändert.

Bedanken möchten wir uns bei unseren Kolleginnen und Kollegen Lisa Amann, Christine Frank, Andrea Hechenleitner, Rainer Hoff und Tine Sedlmeir, die das Skript sehr sorgfältig auf Fehler überprüften und uns viele Verbesserungsvorschläge gaben. Ein besonderer Dank gilt auch Herrn Professor Dr. Günther Kraus für die Unterstützung bei der Erstellung und Veröffentlichung des Skriptes. Auch für die Ermutigungen und die wertvollen Informationen von Herrn und Frau Oehler möchten wir uns recht herzlich bedanken.

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL I

Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie. Harmonische Funktionen	1
§1 Reelle Differenzierbarkeit - Komplexe Differenzierbarkeit	1
§2 Holomorphie	3
Aufgaben zu §1 und §2	4
§3 Fundamentale Eigenschaften holomorpher Funktionen	7
Aufgaben zu §3	8
§4 Biholomorphe Abbildungen	14
Aufgaben zu §4	16
§5 Harmonische Funktionen	17
Aufgaben zu §5	19

KAPITEL II

Folgen und Reihen von Punkten und Funktionen	23
§1 Konvergenzbegriffe	23
Aufgaben zu §1	26
§2 Vertauschungssätze bei kompakter Konvergenz. Der Satz von Montel	26
Aufgaben zu §2	29
§3 Potenzreihen	33
Aufgaben zu §3	35
§4 Laurentreihen	38
Aufgaben zu §4	40

KAPITEL III

Elementare holomorphe Funktionen. Erweiterung des Holomorphiebegriffs	41
§1 Polynome und rationale Funktionen	41
§2 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktionen	42
Aufgaben zu §2	44
§3 Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen	45
Aufgaben zu §3	50
§4 Transzendente Funktionen	53
§5 Erweiterung des Holomorphiebegriffs	58
Aufgaben zu §5	62

KAPITEL IV

Konforme Abbildungen	65
§1 Winkel- und Orientierungstreue. Der Riemannsche Abbildungssatz	65
Aufgaben zu §1	67
§2 Gebrochen lineare Abbildungen (Möbiustransformationen)	68
Aufgaben zu §2	70
§3 Liste der wichtigsten konformen Abbildungen	77
Aufgaben zu §3	86

KAPITEL V

Integration komplexer Funktionen. Stammfunktion. Integralsatz von Cauchy	105
§1 Integralbegriffe in der Funktionentheorie	105
§2 Stammfunktion und Integrabilität.	108
Aufgaben zu §1 und §2	110
§3 Der Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie	114
Aufgaben zu §3	116
§4 Parameterintegrale.	118
Aufgaben zu §4	119

KAPITEL VI

Reihenentwicklung holomorpher Funktionen. Meromorphe Funktionen. Die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß	121
§1 Entwicklung nach Taylor: Holomorphe Funktionen in Kreisscheiben	121
Aufgaben zu §1	123
§2 Entwicklung nach Laurent: Holomorphe Funktionen in Kreisringen	128
Aufgaben zu §2	130
§3 Nullstellen und isolierte Singularitäten im Endlichen	131
Aufgaben zu §3	134
§4 Nullstellen und isolierte Singularitäten im Punkt ∞	140
Aufgaben zu §4	142
§5 Meromorphe Funktionen	145
Aufgaben zu §5	147
§6 Der Satz von Mittag-Leffler und der Weierstraßsche Produktsatz	151
Aufgaben zu §6	154

KAPITEL VII

Das Residuum. Der Residuensatz. Anwendungen	159
§1 Das Residuum - Der Residuensatz	159
Aufgaben zu §1	160
§2 Berechnung spezieller Integrale	168
Aufgaben zu §2	169
§3 Der Residuensatz für den Punkt ∞	174
Aufgaben zu §3	176

ANHANG A

Topologische Grundbegriffe	180
-----------------------------------	------------

ANHANG B

Wege und Gebiete in der Funktionentheorie	183
--	------------

ANHANG C

Zusammenfassung der Holomorphiecharakteristika	188
---	------------

SYMBOLVERZEICHNIS	190
--------------------------	------------

LITERATURVERZEICHNIS	194
-----------------------------	------------

VERZEICHNIS DER AUFGABEN	196
---------------------------------	------------

SACHVERZEICHNIS	202
------------------------	------------