

**Jean-Pierre Serre**

**Lineare Darstellungen  
endlicher Gruppen**

# **Logik und Grundlagen der Mathematik**

Herausgegeben von  
Prof. Dr. Dieter Rödding, Münster

**Band 11**

**Band 1**

L. Félix, Elementarmathematik in moderner Darstellung

**Band 2**

A. A. Sinowjew, Über mehrwertige Logik

**Band 3**

J. E. Whitesitt, Boolesche Algebra und ihre Anwendungen

**Band 4**

G. Choquet, Neue Elementargeometrie

**Band 5**

A. Monjallon, Einführung in die moderne Mathematik

**Band 6**

S. W. Jablonski / G. P. Gawrilow / W. B. Kudrjawzew,  
Boolesche Funktionen und Postsche Klassen

**Band 7**

A. A. Sinowjew, Komplexe Logik

**Band 8**

J. Dieudonné, Grundzüge der modernen Analysis

**Band 9**

N. Gastinel, Lineare und numerische Analysis

**Band 10**

W. V. O. Quine, Mengenlehre und ihre Logik

**Band 11**

J. P. Serre, Lineare Darstellungen endlicher Gruppen

Jean-Pierre Serre

# Lineare Darstellungen endlicher Gruppen



Friedr. Vieweg + Sohn · Braunschweig

**Übersetzung und Redaktion: Prof. Dr. Günther Eisenreich**

**Titel der französischen Originalausgabe:**

**Jean-Pierre Serre**

**Représentations linéaires des groupes finis**

**Erschienen 1967 im Verlag Hermann, Paris**

ISBN 978-3-528-03556-3

ISBN 978-3-322-85863-4 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-85863-4

**1972**

**Copyright © 1972 der deutschen Ausgabe by Friedr. Vieweg + Sohn GmbH, Verlag, Braunschweig**

**Alle Rechte an der deutschen Ausgabe vorbehalten**

**Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza**

# Inhaltsverzeichnis

Einführung . . . . .	1
----------------------	---

## Teil I: Darstellungen und Charaktere

§ 1. Allgemeines über lineare Darstellungen . . . . .	3
1.1. Definitionen . . . . .	3
1.2. Erste Beispiele . . . . .	5
1.3. Teildarstellungen . . . . .	5
1.4. Irreduzible Darstellungen . . . . .	8
1.5. Tensorprodukt zweier Darstellungen . . . . .	9
§ 2. Theorie der Charaktere . . . . .	10
2.1. Der Charakter einer Darstellung . . . . .	10
2.2. Das SCHURsche Lemma — erste Anwendungen . . . . .	12
2.3. Die Orthogonalitätsrelationen der Charaktere . . . . .	14
2.4. Zerlegung der regulären Darstellung . . . . .	16
2.5. Anzahl der irreduziblen Darstellungen . . . . .	17
2.6. Die kanonische Zerlegung einer Darstellung . . . . .	19
§ 3. Ergänzungen . . . . .	22
3.1. Kommutative Gruppen . . . . .	22
3.2. Produkt zweier Gruppen . . . . .	22
§ 4. Erweiterung auf kompakte Gruppen . . . . .	24
4.1. Kompakte Gruppen . . . . .	24
4.2. Invariantes Maß auf einer kompakten Gruppe . . . . .	25
4.3. Lineare Darstellungen kompakter Gruppen . . . . .	25
§ 5. Beispiele . . . . .	27
5.1. Die zyklische Gruppe $C_n$ . . . . .	27
5.2. Die Gruppe $C_\infty$ . . . . .	27
5.3. Die Diedergruppe $D_n$ . . . . .	28
5.4. Die Gruppe $D_{nh}$ . . . . .	31
5.5. Die Gruppe $D_\infty$ . . . . .	32
5.6. Die Gruppe $D_{\infty h}$ . . . . .	33

§ 6. Grade der irreduziblen Darstellungen . . . . .	34
6.1. Gruppenring . . . . .	34
6.2. Ganze Elemente . . . . .	35
6.3. Ganzheitseigenschaften der Charaktere. . . . .	36
6.4. Grade der irreduziblen Darstellungen . . . . .	37
§ 7. Induzierte Darstellungen . . . . .	38
7.1. Definition . . . . .	38
7.2. Charakter einer induzierten Darstellung . . . . .	39
7.3. FROBENIUSSches Reziprozitätsgesetz . . . . .	40
7.4. Einschränkung auf Untergruppen . . . . .	41
7.5. Irreduzibilitätskriterium von MACKEY . . . . .	42
§ 8. Satz von ARTIN . . . . .	43
8.1. Erster Beweis . . . . .	44
8.2. Zweiter Beweis von (1) $\Rightarrow$ (2) . . . . .	45
§ 9. Anwendungen der induzierten Darstellungen . . . . .	46
9.1. Invariante Untergruppen und Anwendungen auf die Grade der irreduziblen Darstellungen. . . . .	46
9.2. Semidirekte Produkte . . . . .	48
9.3. Hinweis auf gewisse Klassen von Untergruppen. . . . .	48
9.4. Satz von SYLOW . . . . .	50
9.5. Darstellungen der überauflösbaren Gruppen . . . . .	50
§ 10. Satz von BRAUER. . . . .	52
10.1. $p$ -elementare Gruppen . . . . .	52
10.2. $p$ -reguläre Elemente . . . . .	53
10.3. Konstruktion spezieller Charaktere . . . . .	53
10.4. Beweis von Satz 21. . . . .	55
10.5. Satz von BRAUER . . . . .	56
§ 11. Anwendungen des Satzes von BRAUER. . . . .	56
11.1. Charakterisierung der Charaktere . . . . .	56
11.2. Umkehrung des Satzes von BRAUER . . . . .	58
11.3. Spektrum von $R(G) \otimes A$ . . . . .	59
§ 12. Rationalität der Darstellungen . . . . .	61
12.1. Die Ringe $R_K(G)$ und $\bar{R}_K(G)$ . . . . .	61
12.2. Ein Satz von BRAUER. . . . .	63
12.3. Der Rang der Gruppe $R_K(G)$ . . . . .	64
12.4. Ein Analogon des Satzes von BRAUER. . . . .	66
12.5. Der Fall des Körpers der rationalen Zahlen . . . . .	66
12.6. Der Fall des Körpers der reellen Zahlen. . . . .	68

**Teil II: Einführung in die BRAUERSche Theorie**

Einleitung . . . . .	71
§ 1. Die Gruppen $R_K(G)$ , $R_k(G)$ und $P_k(G)$ . . . . .	71
1.1. Bezeichnungen und Vereinbarungen . . . . .	71
1.2. Die Ringe $R_K(G)$ und $R_k(G)$ . . . . .	72
1.3. Die Gruppen $P_k(G)$ und $P_A(G)$ . . . . .	72
1.4. Struktur von $P_k(G)$ . . . . .	72
1.5. Struktur von $P_A(G)$ . . . . .	73
1.6. Dualität . . . . .	74
1.7. Erweiterung des Skalarenbereichs . . . . .	75
§ 2. Das Dreieck $cde$ . . . . .	76
2.1. Definition von $c: P_k(G) \rightarrow R_k(G)$ . . . . .	76
2.2. Definition von $d: R_K(G) \rightarrow R_k(G)$ . . . . .	76
2.3. Definition von $s: P_k(G) \rightarrow R_K(G)$ . . . . .	77
2.4. Erste Eigenschaften des Dreiecks $cde$ . . . . .	78
2.5. Ein trivialer Fall . . . . .	78
2.6. Der Fall der $p$ -Gruppen . . . . .	78
§ 3. Sätze . . . . .	79
3.1. Eigenschaften des Dreiecks $cde$ . . . . .	79
3.2. Charakterisierung des Bildes von $e$ . . . . .	80
3.3. Charakterisierung der projektiven $A[G]$ -Moduln durch ihren Charakter . . . . .	81
3.4. Anwendung auf die ARTINSchen Darstellungen . . . . .	83
§ 4. Beweise . . . . .	84
4.1. Relationen für die Untergruppen . . . . .	84
4.2. Der Satz von BRAUER . . . . .	85
4.3. Beweis von Satz 1. . . . .	86
4.4. Beweis der Sätze 2 und 2' . . . . .	88
4.5. Beweis des Satzes von FONG-SWAN . . . . .	89
4.6. Surjektivität des Zerlegungshomomorphismus (allgemeiner Fall). . . . .	92
Anhang — Modulare Charaktere . . . . .	94
Nachtrag — Einige Definitionen . . . . .	97
Literaturverzeichnis . . . . .	99
Sachverzeichnis . . . . .	101