Ernst Kunz

Algebra

vieweg studium

Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von Gerd Fischer

Manfredo P. do Carmo
Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb
Funktionentheorie

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb
Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie

Otto Forster
Analysis 3

Manfred Knebusch und Claus Scheiderer
Einführung in die reelle Algebra

Ernst Kunz
Algebra

Ulrich Krengel
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Alexander Prestel
Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie

Joachim Hilgert und Karl-Hermann Neeb
Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Advanced Lectures in Mathematics

Herausgegeben von Gerd Fischer

Johann Baumeister
Stable Solution of Inverse Problems

Manfred Denker
Asymptotic Distribution Theory in Nonparametric Statistics

Alexandru Dimca
Topics on Real and Complex Singularities
An Introduction

Francesco Guaraldo, Patrizia Macri und Alessandro Tancredi
Topics on Real Analytic Spaces

Heinrich von Weizsäcker und Gerhard Winkler
Stochastic Integrals
An Introduction

Jochen Werner
Optimization
Theory and Applications

Ernst Kunz

Algebra

Prof. Dr. Ernst Kunz
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
Postfach 397
8400 Regensburg

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Kunz, Ernst:
Algebra / Ernst Kunz. - Braunschweig: Vieweg, 1991
(Vieweg-Studium; 43: Aufbaukurs Mathematik)

NE: GT

Satz: Vieweg, Braunschweig

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN-13: 978-3-528-07243-8 e-ISBN-13: 978-3-322-85355-4
DOI: 10.1007/978-3-322-85355-4

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Text ist eine erweiterte Fassung einer Algebravorlesung, die ich im Wintersemester 1971/72 und dann noch einmal im Wintersemester 1990/91 an der Universität Regensburg gehalten habe. Diese Vorlesung richtete sich hauptsächlich an Studenten im dritten Fachsemester. Es waren Vorlesungen "Lineare Algebra I und II" vorausgegangen, die schon so angelegt waren, daß anschließend in einem einsemestrigen Kurs die Algebra bis zu den Grundzügen der Galoistheorie entwickelt werden konnte. Die "Lineare Algebra I" behandelte i.w. den Inhalt des Buches [F] von Gerd Fischer, also Vektorräume, lineare Abbildungen, Matrizen und Determinanten einschließlich der einfachsten Tatsachen über Gruppen und Ringe. Die "Lineare Algebra II" war auf die beabsichtigte Fortsetzung in der Algebra-Vorlesung zugeschnitten. Sie enthielt u.a. die Teilbarkeitstheorie in Ringen, die den jetzigen § 4 ausmacht, ferner die lineare Algebra für Moduln über kommutativen Ringen bis hin zum Hauptsatz für Moduln über Hauptidealringen. Vom Leser dieses Textes wird daher erwartet, daß er schon etwas mit Ringen und Moduln umgehen kann.

Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern der Algebra ist der Stoff nicht nach dem Schema "Gruppen-Ringe-Körper" organisiert. Vielmehr wollte ich eine wohlmotivierte Einführung in die Körper- und Galoistheorie geben, die besonders auch die Interessen der Lehramtsstudenten berücksichtigt, und in der jeweils der nächste Schritt durch den vorhergehenden nahegelegt wird. Ich beginne, dem Beispiel meines Lehrers F.K. Schmidt folgend, mit den klassischen Problemen der Konstruktion mit Zirkel und Lineal und der Auflösung algebraischer Gleichungen durch Radikale, die ja über zwei Jahrtausende hinweg starke Anstöße für die Entwicklung der heutigen Algebra gewesen sind. Der Fortschritt des Textes wird häufig daran gemessen, was die dargestellten Sätze zur Lösung dieser leicht verständlichen Probleme beitragen. Die Stoffauswahl ist unter diesem Gesichtspunkt getroffen worden. Die meisten der behandelten algebraischen Begriffe waren bereits in den zwanziger Jahren geprägt, als van der Waerdens "Algebra" [vdW$_1$] (damals "Moderne Algebra") veröffentlicht wurde, und die Sätze dieses Buches waren zum größten Teil zu dieser Zeit schon bekannt; allerdings wurden für manche von ihnen später einfachere Beweise gefunden. Natürlich gibt es auch ganz anders aufgebaute Einführungen in die Algebra, etwa solche, die von Anfang an mehr auf die algebraische Geometrie hinzielen und in denen moderne Konzepte der Algebra stärker zur Geltung kommen.

Die Zahlentheorie wird in diesem Text häufig angesprochen, aber nicht systematisch entwickelt, sondern zur Illustration algebraischer Gesetzmäßigkeiten in Beispielen verwendet. Die Gruppentheorie kommt erst spät vor und nur etwa in dem Maße,

wie sie für die Galoistheorie benötigt wird. Dafür sind aber die Aufgaben zur Gruppentheorie besonders zahlreich. Kurze Beweise des Hilbertschen Basissatzes und des Hilbertschen Nullstellensatzes bereiten auf die algebraische Geometrie vor.

Der Inhalt einschließlich der Übungsaufgaben entspricht ungefähr dem, was in den letzten 20 Jahren in den bayerischen Staatsexamina für Gymnasiallehrer von den Kandidaten an Kenntnissen in Algebra erwartet wurde. Eine große Zahl von Aufgaben entstammt dieser Quelle; den bayerischen Kollegen, die zu diesem Fundus beigetragen haben, sei an dieser Stelle gedankt. Anhand der Aufgaben kann der Leser seine Beherrschung des Stoffes überprüfen, andererseits enthalten sie aber auch viel zusätzliches Material, zusammengenommen vielleicht mehr als der eigentliche Text selbst. Ich stelle mir vor, daß der Leser sie zunächst so zu lösen versucht, wie sie gegeben sind. Am Ende des Buches sind Hinweise zusammengestellt, die Hilfen zum Lösen der Aufgaben oder zum Kontrollieren der eigenen Lösung anbieten.

Meine Vorlesung im WS 90/91 war von einem Proseminar begleitet, in dem zusätzlich zu den regulären Übungen einige der umfangreicheren Aufgaben vorgetragen wurden, z.B. die über die Transzendenz von π (§ 10, Aufgabe 10)). Herr Wolfgang Rauscher, der für den Übungsbetrieb zuständig war, hat alle Aufgaben durchgearbeitet und viele Verbesserungsvorschläge gemacht. Er hat mich ebenso wie Herr Dr. Reinhold Hübl bei den Korrekturen unterstützt. Das Manuskript ist von Frau Eva Rütz mit großem Geschick hergestellt worden. Das Computerprogramm "Word" hat den Text nach orthographischen Fehlern abgesucht und gelegentlich originelle Verbesserungsvorschläge gemacht, z.B. "Körperbehinderung" für "Körpererweiterung". Den Studenten, die auf klareren oder ausführlicheren Beweisen bestanden, sowie allen Mitarbeitern danke ich für ihre Hilfe sehr herzlich.

Regensburg, im März 1991 Ernst Kunz

Vereinbarungen

Der Leser soll schon einen Kurs über lineare Algebra absolviert haben und dort mit Grundbegriffen der Algebra wie "Gruppe", "Ring", "Modul" und "Körper" vertraut geworden sein, vor allem auch mit dem Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen. Ohne nähere Erläuterung werden Begriffe wie "Erzeugendensystem eines Moduls", "Basis und Dimension eines Vektorraums", "Matrizen" und "Determinanten" etc. benutzt. Unter einem **Ring** soll ein assoziativer kommutativer Ring mit 1 verstanden werden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Für zwei Ringe R und S ist ein **Ringhomomorphismus** $h\colon R \to S$ eine Abbildung mit $h(r+s) = h(r) + h(s)$, $h(r \cdot s) = h(r) \cdot h(s)$ für alle $r, s \in R$ und $h(1) = 1$. Ist h überdies bijektiv, so heißt h ein **Ringisomorphismus**.

$R[X]$ bezeichnet den **Polynomring** in der Unbestimmten X über dem Ring R. Seine Elemente f sind von der Form

$$f = \sum_{\nu \in \mathbf{N}} a_\nu X^\nu \quad (a_\nu \in R,\ a_\nu \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \nu \in \mathbf{N})$$

Es wird als bekannt vorausgesetzt, wie Polynome addiert und multipliziert werden und was, zumindest wenn R ein Körper ist, unter der "Polynomdivision mit Rest" zu verstehen ist. $\deg f$ bezeichnet den **Grad** eines Polynoms f, d.h. das Maximum aller $\nu \in \mathbf{N}$ mit $a_\nu \neq 0$, wenn $f \neq 0$ ist. Das Nullpolynom soll jeden Grad besitzen. Ist $d := \deg f$, so heißt a_d der **Gradkoeffizient** von f, ferner heißt a_0 das **konstante Glied** von f.

Früh tritt auch schon der Polynomring $R[X_1, \ldots, X_n]$ in endlich vielen Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über R auf. Er kann induktiv durch die Formel

$$R[X_1, \ldots, X_n] := (R[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$$

definiert werden. Seine Elemente f sind von der Form

$$(1)\quad f = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbf{N}} a_{\nu_1 \cdots \nu_n} X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} \quad (a_{\nu_1 \cdots \nu_n} \in R, \text{ nur endlich viele } a_{\nu_1 \cdots \nu_n} \neq 0)$$

und man rechnet mit ihnen wie man das aus der Analysis mit Funktionen in mehreren Variablen ja schon gewohnt ist. Wir wollen Polynome aber nicht als Funktionen betrachten, sondern als Ausdrücke, mit denen nach formalen Regeln gerechnet wird.

Verzichtet man in (1) auf die Endlichkeitsbedingung, so erhält man **formale Potenzreihen** und den Ring $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ der formalen Potenzreihen in Unbestimmten $X_1 \ldots, X_n$ über R, der jedoch in diesem Text nicht auftreten wird. Für eine (unendliche) Familie $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Unbestimmten ist der Polynomring $R[\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$

erklärt als die Vereinigung der Polynomringe $R[X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}]$ in je endlich vielen Unbestimmten aus $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Was aus der Gruppentheorie bekannt sein soll, wird im Vorspann zu § 11 gesagt und in den Übungsaufgaben 1)-8) zu § 11 wiederholt. Für ein Element x aus einer additiven Gruppe und ein $n \in \mathbf{N}$ ist definitionsgemäß $n \cdot x := \underbrace{x + \cdots + x}_{n}$ und $(-n) \cdot x := -(n \cdot x)$. Insbesondere gilt dies für die additive Gruppe eines Rings oder Körpers. Entsprechend ist in einer multiplikativen Gruppe $x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n}$ und $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.

Für eine komplexe Zahl a bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ eine der n-ten Wurzeln von a. Ist $a \in \mathbf{R}_+$, so soll $\sqrt[n]{a}$ stillschweigend die reelle Wurzel > 0 sein. **Primzahlen** sind natürliche Zahlen $p > 1$, die keine echten Teiler in $\mathbf{N}$ besitzen. Jede natürliche Zahl > 1 ist Produkt von endlich vielen Primzahlen.