Mathematische Methoden in der Technik

Band 1: **Törnig/Gipser/Kaspar, Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik**
183 Seiten. DM 36,–

Band 2: **Dutter, Geostatistik**
159 Seiten. DM 34,–

Band 3: **Spellucci/Törnig, Eigenwertberechnung in den Ingenieurwissenschaften**
196 Seiten. DM 36,–

Band 4: **Buchberger/Kutzler/Feilmeier/Kratz/Kulisch/Rump, Rechnerorientierte Verfahren**
281 Seiten. DM 48,–

Band 5: **Babovsky/Beth/Neunzert/Schulz-Reese, Mathematische Methoden in der Systemtheorie: Fourieranalysis**
173 Seiten. DM 36,–

Band 8: **Weiß, Stochastische Modelle für Anwender**
192 Seiten. DM 36,–

Band 9: **Antes, Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluiddynamik**
196 Seiten. DM 36,–

Band 10: Vogt, **Methoden der Statistischen Qualitätskontrolle**
295 Seiten. DM 48,–

In Vorbereitung

Band 6: **Krüger/Scheiba, Mathematische Methoden in der Systemtheorie: Stochastische Prozesse**

Preisänderungen vorbehalten

B. G. Teubner Stuttgart

Inverse und schlecht gestellte Probleme

Von Prof. Dr. rer. nat. Alfred Karl Louis
Technische Universität Berlin

Mit zahlreichen Abbildungen

B. G. Teubner Stuttgart 1989

Prof. Dr. rer. nat. Alfred Karl Louis

Geboren 1949 in Elversberg/Saar. Von 1968 bis 1972 Studium der Mathematik und Physik an der Universität Saarbrücken, 1976 Promotion an der Universität Mainz, 1980/81 Assistant Professor an der State University of New York at Buffalo, 1982 Habilitation an der Universität Münster, von 1983 bis 1986 Professor an der Universität Kaiserslautern, seit 1986 Professor an der Technischen Universität Berlin.

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Louis, Alfred K.:
Inverse und schlecht gestellte Probleme / von Alfred Karl
Louis. – Stuttgart : Teubner, 1989
(Teubner-Studienbücher : Mathematik)

Umschlaggestaltung: M. Koch, Reutlingen

ISBN-13: 978-3-519-02084-4 e-ISBN-13: 978-3-322-84808-6
DOI: 10.1007/978-3-322-84808-6

Vorwort

Inverse Probleme treten bei der Bestimmung der ein System beschreibenden Parameter aus Beobachtungen des Systems auf. Ein Beispiel hierfür ist die Identifizierung einer " Black Box " aus Input und Output. Ist der Input die Intensität eines Röntgenstrahles und der Output die Intensität des Strahles nach Durchlaufen eines Körpers, so kann man aus vielen Strahlen, etwa einer halben Million, in der Computer – Tomographie die Dichte des durchlaufenen Körpergewebes berechnen. Von der physikalischen Annahme hängt das mathematische Modell, also die zu behandelnde Gleichung, ab. All diesen inversen Problemen gemein ist, daß die Daten wegen der unvermeidbaren Meßfehler nie exakt gegeben sind. Leider auch gemein ist diesen Problemen, daß die Datenfehler in der Lösung verstärkt werden. Die von Hadamard eingeführte Bezeichnung " schlecht gestellte Probleme " ist irreführend, die mathematische Beschreibung eines realen inversen Problems spiegelt natürlich auch die praktisch vorhandene Instabilität wider.

Die reizvolle Aufgabe ist nun, eine Näherungslösung, möglicherweise unter Zuhilfenahme zusätzlicher Information, so zu bestimmen, daß die Datenfehler sich nicht über ein unvermeidbares Maß hinaus verstärken. Das Titelbild zeigt eine glatte Kurve, welche die exakte Lösung eines ungestörten schlecht gestellten Problems darstellt. Die wild oszillierende Funktion ergibt sich bei (fast) " naiver " Lösung ohne Berücksichtigung der Schlechtgestelltheit. Abbildung 5.1.1 zeigt die wirklich " naive " Lösung, die keine erkennbare Darstellung der anderen Funktionen bei gleichem Maßstab gestattet. Das Ziel des vorliegenden Buches ist, den Leser in die Lage zu versetzen, die dritte der gezeigten Kurven bei gestörten Daten als " Lösung " zu berechnen.

Grundlage für das vorliegende Buch sind Vorlesungen an der Universität Kaiserslautern und der Technischen Universität Berlin, die sich an Hörer mittlerer Semester der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften richteten. Wir beschränken uns hier auf lineare Probleme, weil eine entsprechend weitgehende Theorie für nichtlineare Probleme zur Zeit noch nicht existiert, im Literaturverzeichnis ist allerdings auf einige Arbeiten hingewiesen. Über Vordiplomkenntnisse hinausgehende mathematische Hilfsmittel werden bereitgestellt. Somit ist das Buch sowohl als Lektüre zu einer entsprechenden Vorlesung als auch zum Selbststudium geeignet. Es stellt eine Basis für weitergehende Untersuchungen inverser Probleme dar.

In der Einleitung werden inverse Probleme charakterisiert und typische Schwierigkeiten bei der Lösung solcher Aufgabenstellungen an einfachen Beispielen aufgezeigt. Um die praktische Relevanz zu verdeutlichen, schließen sich Anwendungsbeispiele aus Medizin und Technik an.

Im zweiten Kapitel werden wichtige mathematische Hilfsmittel bereitgestellt. Insbesondere wird die Spektralzerlegung kompakter Operatoren diskutiert, an Beispielen erläutert, und dann werden Hilberträume und Normen eingeführt, die es gestatten, die sich anschließenden Verfahren zu vergleichen.

Schlecht gestellte Probleme haben nur selten eine Lösung im klassischen Sinn, deshalb wird im dritten Kapitel der Lösungsbegriff zunächst verallgemeinert. Mit Hilfe der singulären Werte wird die Schlechtgestelltheit klassifiziert. Dabei gehen sowohl Zusatzinformation über die Regularität der Lösung, als auch Datenfehler ein. Die Lösung wird dann stabilisiert, indem der Einfluß der Datenfehler durch Filer reduziert wird. Hat man sich für die Art des Filters entschieden, dann ist ein dabei auftretender Parameter, der Regularisierungsparameter, noch geeignet zu wählen. Schließlich wird auf die Möglichkeit hingewiesen, durch Änderung des Problems eine Stabilisierung zu erreichen, allerdings braucht man dabei die Information vom Anwender, was mit der Lösung anschließend geschehen soll.

Im vierten Kapitel werden die wichtigsten Regularisierungsverfahren vorgestellt. Es handelt sich um Bandpaß – Filter, bei denen der störende Anteil in der Lösung völlig eliminiert wird. Die Tikhonov – Phillips Regularisierung wird als Stabilisierung der Normalgleichung interpretiert. Iterationsverfahren regularisieren, wenn man bei fehlerhaften Daten das Verfahren zu einem geeigneten Zeitpunkt abbricht. Stochastische Verfahren werden beschrieben und ihre Verwandtschaft zur Tikhonov – Phillips Regularisierung aufgezeigt. Schließlich kann man durch Projektionsverfahren regularisieren, wenn man die Schrittweite in Abhängigkeit vom Datenfehler hinreichend groß wählt. Alle diese Verfahren werden auch als Filter im obigen Sinne diskutiert und auf Optimalitätseigenschaften untersucht. Ihnen gemein ist eine Erkenntnis, die den bisherigen Erfahrungen in der Numerik widerspricht : liegen fehlerhafte Daten vor, so darf man nicht zu lange iterieren, sonst werden die Ergebnisse immer schlechter. Auch können zu kleine Schrittweiten bei Diskretisierungsverfahren zu völlig unbrauchbaren Ergebnissen führen.

Bei der numerischen Realisierung der Verfahren muß man endlichdimensionale Versionen der Verfahren benutzen. Diese werden in Kapitel 5 beschrieben und an mehreren Beispielen erläutert.

Schließlich enthält das letzte Kapitel ein zu Anfang beschriebenes Problem aus der Medizintechnik, nämlich die Röntgen – Computer – Tomographie. Das mathematische Modell, die Radon – Transformation, wird untersucht, eine Singulärwertzerlegung hergeleitet, um die Schlechtgestelltheit zu diskutieren, und numerische Rekonstruktionsverfahren werden angegeben.

Meinen Mitarbeitern, den Herren B. Eicke, N. Gorenflo, J. Kremer, Dr. P. Maaß , R. Plato und A. Rieder danke ich für die Unterstützung und die Durchsicht des Manuskriptes. Schließlich gebührt mein Dank Frau G. Dettling – Wilke für das Schreiben des Textes.

Berlin, im Februar 1989 A.K. Louis

Inhalt