

Wieland Richter

**Numerische Lösung
partieller Differentialgleichungen
mit der
Finite-Elemente-Methode**

Wieland Richter

**Numerische Lösung
partieller
Differentialgleichungen
mit der
Finite-Elemente-Methode**

Herausgegeben von Gisela Engeln-Müllges



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Richter, Wieland:

Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen
mit der Finite-Elemente-Methode / Wieland Richter.

Hrsg. von Gisela Engeln-Müllges. — Braunschweig;
Wiesbaden: Vieweg, 1986.

1986

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1986

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

ISBN-13: 978-3-528-08930-6 e-ISBN-13: 978-3-322-84329-6

DOI: 10.1007/978-3-322-84329-6

Vorwort

Die Idee, ein elementar gehaltenes Buch über die Methode der Finiten Elemente zu schreiben, entstand zu der Zeit, als ich noch wissenschaftlicher Mitarbeiter am Gießerei-Institut der RWTH Aachen war. Unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. P.R. Sahm beschäftigte ich mich mit Temperaturberechnungen in abkühlenden Gußstücken. Zahlreiche Gespräche mit Ingenieuren und Studenten zeigten mir, daß zwar die Bereitschaft vorhanden war, sich mit diesem Näherungsverfahren vertraut zu machen, jedoch fehlte in den meisten Fällen die Einstiegsliteratur. Der Schwerpunkt der meisten Bücher über Finite Elemente liegt in der Anwendung dieser Methode in der Mechanik (Elastizitätstheorie) - geschrieben von Fachleuten für Fachleute. Auf die näherungsweise Lösung elliptischer oder gar parabolischer Differentialgleichungen wird, wenn überhaupt, nur sehr kurz eingegangen.

In diesem Sinne ist das vorliegende Buch genau als Gegenstück zur bekannten Literatur anzusehen. Es richtet sich in erster Linie an Naturwissenschaftler und Ingenieure der verschiedensten Fachrichtungen, die sich mit diesem Problemkreis vertraut machen wollen. Der Kenner wird sicherlich einige interessante Themen in diesem Buch vermissen, der Anfänger wird es zu schätzen wissen.

Inhaltlich teilt sich das Buch in drei Themenbereiche auf: Der erste behandelt die numerische Lösung elliptischer Randwert- und parabolischer Randanfangswertaufgaben. Die prinzipielle Vorgehensweise wird anhand eindimensionaler Probleme erklärt und auf zweidimensionale übertragen. Danach werden die beiden Differentialgleichungstypen für drei Ortskoordinaten behandelt. Die Elementgleichungen für Tetraeder werden, wie vorher die Gleichungen für Dreiecke, ausführlich hergeleitet, diejenigen für Prismen und Parallelepipede werden lediglich angegeben. In allen Fällen beschränke ich mich auf lineare Ansatzfunktionen.

Im zweiten Teil des Buches werden die zuvor erarbeiteten Ideen auf die lineare Elastizitätstheorie übertragen. Nach ausführlicher Herleitung der Formänderungsenergiegleichung werden einige spezielle ein- und zweidimensionale Beispiele behandelt. Der letzte Teil behandelt einige sogenannte Hilfsmittel, die für eine effiziente Anwendung der Finiten-Elemente-Methode notwendig sind. Insbesondere sind dies die Bandbreitenreduzierung, die Lösung linearer Gleichungssysteme und die Erstellung von Netzen (Zerlegung des Gebiets in Elemente). Auch hier wurde eine Auswahl getroffen.

Sämtliche Beispiele sind so ausgewählt, daß sie vom Leser ohne große Rechenhilfsmittel nachvollzogen werden können. Auf eine Anführung von Computerprogrammen wurde bewußt verzichtet, da die meisten Algorithmen schon in den neueren Lehrbüchern enthalten sind. Programme für die Netzgenerierung sind i.a. recht teuer und werden daher verständlicherweise ungern veröffentlicht.

Beenden möchte ich das Vorwort mit einer Danksagung an alle, die mir bei der Erstellung des Buches behilflich waren. Insbesondere bedanke ich mich bei meinem Freund Dipl.-Ing. Helmut Perzborn, der die Durchsicht des Manuskripts übernahm und durch etliche Anregungen (und kritische Bemerkungen) sehr zum Gelingen beigetragen hat. Des weiteren gilt mein Dank meiner lieben Frau Anne, die mir bei der Erstellung des Sachverzeichnisses geholfen hat. Bei Frau Prof. Dr. G. Engeln-Müllges bedanke ich mich dafür, daß sie sich als Herausgeberin sehr stark für meine Belange eingesetzt und mir nützliche Hinweise gegeben hat. Abschließend gilt mein Dank dem Vieweg Verlag für die Bereitschaft, das Manuskript als Buch erscheinen zu lassen.

Burg Kinzweiler, im Mai 1985

Wieland Richter

Bezeichnungen

A^t	transponierte Matrix
c^t	transponierter Vektor
d_m	Jakobi-Determinante des m-ten Elements
\dot{f}	zeitliche Ableitung der Funktion f : $\frac{\partial f}{\partial t}$
f_t	zeitliche Ableitung der Funktion f
f_x	erste part. Ableitung der Funktion f nach x : $\frac{\partial f}{\partial x}$
f_{xx}	zweite part. Ableitung von f nach x
n	Normalenvektor
n_x, n_y, n_z	Komponenten des Normalenvektors n
t	Zeitkomponente
u, v, w	Verschiebung in x-, y- und z-Richtung (Kapitel 2)
u, v, w	transformierte x-, y-, z-Koordinaten
x, y, z	Komponenten im dreidimensionalen Raum

Inhalt

1 Elliptische und parabolische Differentialgleichungen	7
1.1 Differentialgleichungen für eine und zwei Ortsvariablen	11
1.1.1 Eindimensionale Rand-Anfangswertprobleme	11
1.1.2 Beispiel	21
1.1.3 Eindimensionale Randwertprobleme	24
1.1.4 Beispiel	26
1.1.5 Ansatzfunktionen höheren Grades	27
1.1.6 Das zweidimensionale Rand-Anfangswertproblem	32
1.1.7 Beispiel zum zweidimensionalen Rand-Anfangswert- problem	41
1.1.8 Das zweidimensionale Randwertproblem	49
1.1.9 Beispiel	50
1.1.10 Andere Elementformen	52
1.1.11 Ansatzfunktionen höheren Grades	54
1.2 Der dreidimensionale Fall	55
1.2.1 Rotationssymmetrische Probleme	55
1.2.2 Allgemeine dreidimensionale Rand-Anfangswertprobleme	62
1.2.3 Beispiel	70
1.2.4 Allgemeine dreidimensionale Randwertprobleme	73
1.2.5 Andere Elementformen	76
1.2.6 Ansatzfunktionen höheren Grades	81

2 Anwendungen der finiten Elemente in der Mechanik . . .	83
2.1 Formänderungsenergie und Hookesches Gesetz . . .	83
2.1.1 Eindimensionale Beispiele	89
2.1.2 Zweidimensionale Beispiele	91
2.2 Der Verschiebungsansatz	94
2.2.1 Ein eindimensionales Beispiel	95
2.2.2 Ein zweidimensionales Beispiel	98
3 Hilfsmittel für die Anwendung der Finiten-Elemente- Methode	103
3.1 Netzgenerierung	103
3.1.1 Zweidimensionale Netzgenerierung	104
3.1.2 Dreidimensionale Netzgenerierung	108
3.2 Bandbreitenoptimierung	110
3.3 Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme . .	114
3.3.1 Das Cholesky-verfahren	115
3.3.2 Das Einzelschrittverfahren	119
4.1 Literatur	122
4.2 Sachverzeichnis	124