

Hanspeter Kraft

**Geometrische Methoden
in der Invariantentheorie**

Aspects of Mathematics

Aspekte der Mathematik

Herausgeber: Klas Diederich

Vol. E1: G. Hector/U. Hirsch, Introduction to the
Geometry of Foliations, Part A

Vol. E2: M. Knebusch/M. Kolster, Wittrings

Vol. E3: G. Hector/U. Hirsch, Introduction to the
Geometry of Foliations, Part B

Vol. E4: M. Laska, Elliptic Curves over Number Fields
with Prescribed Reduction Type

Vol. E5: P. Stiller, Automorphic Forms and the Picard
Number of an Elliptic Surface

Vol. E6: G. Faltings/G. Wüstholz et al., Rational Points
(A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik,
Bonn)

Band D1: H. Kraft, Geometrische Methoden in der
Invariantentheorie

Die in dieser Reihe veröffentlichten Texte wenden sich an
graduierete Studenten und alle Mathematiker, die ein aktuelles
Spezialgebiet der Mathematik neu kennenlernen wollen, um
Ergebnisse und Methoden in der eigenen Forschung zu ver-
wenden oder um sich einfach ein genaueres Bild des betreffen-
den Gebietes zu machen. Sie sollen eine lebendige Einführung
in forschungsnahen Teilgebiete geben und den Leser auf die
Lektüre von Originalarbeit vorbereiten.

Die Reihe umfaßt zwei Unterreihen, eine deutsch- und eine
englischsprachige.

Hanspeter Kraft

Geometrische Methoden in der Invariantentheorie



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

Prof. Dr. *Hanspeter Kraft* ist ordentlicher Professor am Mathematischen Institut der Universität Basel, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel

1984

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1984

Die Vervielfältigung und Übertragung einzelner Textabschnitte, Zeichnungen oder Bilder, auch für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, gestattet das Urheberrecht nur, wenn sie mit dem Verlag vorher vereinbart wurden. Im Einzelfall muß über die Zahlung einer Gebühr für die Nutzung fremden geistigen Eigentums entschieden werden. Das gilt für die Vervielfältigung durch alle Verfahren einschließlich Speicherung und jede Übertragung auf Papier, Transparente, Filme, Bänder, Platten und andere Medien.

ISBN-13: 978-3-528-08525-4

e-ISBN-13: 978-3-322-83813-1

DOI: 10.1007/978-3-322-83813-1

VORWORT

Die vorliegende Einführung in die Invariantentheorie entstand aus einer Vorlesung, welche ich im Wintersemester 1977/78 in Bonn gehalten habe. Wie schon der Titel ausdrückt stehen dabei die geometrischen Aspekte im Vordergrund. Aufbauend auf einfachen Kenntnissen aus der Algebra werden die Grundlagen der Theorie der algebraischen Transformationsgruppen entwickelt und eine Reihe klassischer und moderner Fragestellungen aus der Invariantentheorie behandelt. Der Leser wird dabei bis an die heutige Forschung herangeführt und sollte dann auch in der Lage sein, die entsprechende Originalliteratur zu verstehen.

Ich habe versucht, den algebraisch-geometrischen Apparat klein zu halten, um einen möglichst breiten Leserkreis anzusprechen; die benötigten Definitionen und Resultate sind in einem Anhang zusammengestellt. Für weiterführende Studien wird man allerdings gut daran tun, etwas tiefer in die algebraische Geometrie und die Theorie der halbeinfachen Gruppen einzudringen. Hierfür gibt es inzwischen einige sehr gute Lehrbücher.

Bei der Gestaltung und der Themenauswahl schwebte mir vor, eine solide Grundlage zu schaffen und gleichzeitig klassische und moderne Originalliteratur aufzuarbeiten. Viele Einzelheiten stammen aus Gesprächen und Briefwechseln mit verschiedenen Kollegen, speziell mit Walter Borho, Wim Hesselink, Jens-Carsten Jantzen, Victor Kac, Domingo Luna, Claudio Procesi, Vladimir Popov, Nicolas Spaltenstein und Thierry Vust. Alfred Wiedemann hat die Bonner Vorlesung ausgearbeitet und damit die Grundlage für das vorliegende Buch geschaffen. Gisela Menzel und Christine Riedtmann haben den Text gelesen und viele Unstimmigkeiten behoben. Frau M. Barrón hat die Schreibaarbeit übernommen und mit grosser Sorgfalt das Manuskript erstellt, und Mark Aellen hat mir bei der endgültigen Gestaltung geholfen. Ihnen allen möchte ich recht herzlich danken.

Basel, im April 1984

H. Kraft

INHALTSVERZEICHNIS

<u>Einführung</u>	1
Kapitel I. <u>Einführende Beispiele</u>	5
1. Euklidische Geometrie.....	6
2. Quadratische Formen.....	9
3. Konjugationsklassen von Matrizen.....	14
4. Invarianten mehrerer Vektoren.....	24
5. Nullformen.....	29
6. Assoziierte Kegel und Deformationen.....	36
7. Ternäre kubische Formen.....	42
Kapitel II. <u>Gruppenoperationen, Invariantenringe und Quotienten</u>	49
1. Algebraische Gruppen.....	53
1.1. Definitionen.....	53
1.2. Zusammenhangskomponente, Zentrum und homomorphe Bilder.....	55
1.3. Die klassischen Gruppen.....	57
1.4. Die Liealgebra einer algebraischen Gruppe.....	60
1.5. Die Liealgebren der klassischen Gruppen.....	62
2. Gruppenoperationen und lineare Darstellungen.....	64
2.1. Definitionen.....	64
2.2. Fixpunkte, Bahnen, Stabilisatoren.....	64
2.3. Lineare Darstellungen.....	66
2.4. Die reguläre Darstellung.....	72
2.5. Zusammenhang zwischen Gruppe und Liealgebra.....	74
2.6. Schichten.....	78
2.7. Die Varietät der Darstellungen einer Algebra.....	81
3. Quotienten bei linear reduktiven Gruppen.....	89
3.1. Linear reduktive Gruppen und isotypische Zerlegung.....	89
3.2. Der Endlichkeitssatz.....	95
3.3. Einfache Eigenschaften und Beispiele.....	100
3.4. Ein Kriterium für Quotienten.....	105

3.5.	Zur Charakterisierung der linear reduktiven Gruppen.....	107
3.6.	Der endliche Fall.....	111
4.	Beispiele und Anwendungen.....	115
4.1.	Das klassische Problem für GL_n	115
4.2.	Allgemeine Faser und Nullfaser.....	129
4.3.	Einige Strukturaussagen für Quotienten.....	138
Kapitel III. <u>Darstellungstheorie und die Methode der U-Invarianten</u>....		147
1.	Darstellungstheorie linear reduktiver Gruppen.....	150
1.1.	Tori und unipotente Gruppen.....	150
1.2.	Auflösbare Gruppen und Borelgruppen.....	154
1.3.	Darstellungen von Tori.....	157
1.4.	Die irreduziblen Darstellungen von GL_n	159
1.5.	Die irreduziblen Darstellungen einer linear reduktiven Gruppe.....	166
2.	Das Hilbertkriterium.....	171
2.1.	Einparameter-Untergruppen.....	171
2.2.	Torusoperationen.....	173
2.3.	Das Hilbertkriterium für GL_n	175
2.4.	Der allgemeine Fall.....	178
2.5.	Assoziierte parabolische Untergruppen.....	181
2.6.	Dimensionsabschätzungen für die Nullfaser.....	184
3.	U-Invarianten und Normalitätsfragen.....	186
3.1.	Ω -Gradierung auf dem U-Invariantenring.....	186
3.2.	Endliche Erzeugbarkeit der U-Invarianten.....	189
3.3.	Ein Normalitätskriterium.....	192
3.4.	Geometrische Interpretation der Multiplizitäten.....	194
3.5.	Anwendung auf Abschlüsse von Bahnen.....	196
3.6.	Multiplizitätenfreie Operationen.....	198
3.7.	Normalität der Determinantenvarietäten.....	203
3.8.	U-Invariantenringe von quasihomogenen Varietäten.....	204
3.9.	Der Satz von Weitzenböck.....	206

4.	SL_2 -Einbettungen.....	208
4.1.	Erste Eigenschaften.....	208
4.2.	Ein Fortsetzungssatz.....	211
4.3.	Bestimmung des U-Invariantenringes.....	213
4.4.	Existenzsätze.....	216
4.5.	Struktursätze.....	218
4.6.	Tangentialraum im Fixpunkt.....	221
4.7.	Konstruktion von Einbettungen und Bestimmung der Höhe.....	222
4.8.	Homomorphismen und Automorphismen.....	224
4.9.	Verallgemeinerung auf endliche Stabilisatoren.....	226
	<u>Anhang I. Einige Grundlagen aus der algebraischen Geometrie</u>	229
1.	Affine Varietäten.....	230
1.1.	Reguläre Funktionen.....	230
1.2.	Nullstellengebilde.....	230
1.3.	Zariski-Topologie.....	231
1.4.	Abgeschlossene Untervarietäten.....	232
1.5.	Nullstellensatz.....	232
1.6.	Affine Varietäten.....	233
1.7.	Spezielle offene Mengen.....	235
1.8.	Irreduzible Varietäten.....	236
1.9.	Zerlegung in irreduzible Komponenten.....	236
1.10.	Rationale Funktionen.....	237
1.11.	Lokale Ringe.....	238
2.	Reguläre Abbildungen.....	239
2.1.	Definition.....	239
2.2.	Hauptsatz.....	239
2.3.	Dominante Morphismen.....	240
2.4.	Lokale Bestimmtheit eines Morphismus.....	240
2.5.	Abgeschlossene Bilder, Urbilder und Fasern.....	241
2.6.	Beispiele.....	242
2.7.	Produkte.....	244
2.8.	Beispiele.....	245

3.	Dimension.....	248
3.1.	Definitionen.....	248
3.2.	Beispiele.....	249
3.3.	Dimensionsformel für Morphismen.....	249
3.4.	Hauptidealsatz von Krull.....	251
3.5.	Abbildungsgrad.....	251
3.6.	Beispiele.....	252
3.7.	Birationale Morphismen.....	256
4.	Normale Varietäten.....	258
4.1.	Endliche Morphismen.....	258
4.2.	Noethersches Normalisierungslemma.....	258
4.3.	Normale Varietäten und Normalisierung.....	259
4.4.	Normalisierung von Gruppenoperationen.....	261
4.5.	Going-down Theorem.....	262
5.	Tangentialraum und reguläre Punkte.....	263
5.1.	Definition.....	263
5.2.	Tangentialvektoren.....	264
5.3.	Tangentialräume von Untervarietäten.....	265
5.4.	Differential einer regulären Abbildung.....	266
5.5.	Tangentialräume von Produkten und Fasern.....	268
5.6.	Reguläre Punkte.....	271
5.7.	Reguläre Abbildungen von maximalem Rang.....	272
6.	Hyperflächen und Divisoren.....	275
6.1.	Divisorengruppe.....	275
6.2.	Normalitätskriterium von Serre.....	277
7.	\mathbb{C} -Topologie auf affinen Varietäten.....	279
7.1.	Definition und Eigenschaften.....	279
7.2.	\mathbb{C} -Abschlüsse.....	279
Anhang II. <u>Lineare Reduktivität der klassischen Gruppen</u>		281
1.	Topologische Gruppen, Liegruppen.....	283
2.	Klassische Gruppen.....	283
3.	Haarsches Mass auf kompakten Gruppen.....	285
4.	Volle Reduzibilität der Darstellungen kompakter Gruppen.....	286
5.	Lineare Reduktivität der klassischen Gruppen.....	287

6. Maximal kompakte Untergruppen.....	288
7. Cartan- und Iwasawazerlegung.....	289
<u>Literaturverzeichnis</u>	291
<u>Symbole und Notationen</u>	297
<u>Register</u>	301