ZWEITES BUCH: ELEMENTARE PRÄDIKATENLOGIK

G.W.Leibniz erkannte als notwendige Bedingung der Realisierung des alten Traums von einer allgemeinen Methode zur Lösung beliebiger wissenschaftlicher Probleme die Entwicklung einer characteristica universalis, einer mathematischer Präzision genügenden universellen Sprache, in der sämtliche Sachverhalte eindeutig ausgedrückt werden können. Den Leibnizschen Bemühungen um den Aufbau solch einer Sprache, in der sich zudem die Struktur von Dingen und Tatsachen in der Struktur der darstellenden sprachlichen Terme und Ausdrücke widerspiegeln sollte, war erst in der Präzisierung durch Frege ein erster Erfolg beschieden: Frege entwickelte eine universelle Sprache zur Formalisierung aller (damals bekannten) mathematischen Sachverhalte mit dem Ziel, "logische" von historischen, psychologischen und ähnlichen Inhalten in mathematischen Gedankengängen zu trennen und alle legitimen mathematischen Schlußweisen und Begriffe auf wenige übersichtliche und klare Grundprinzipien zu reduzieren. Die Explikation und Trennung inhaltlicher (semantischer) und formallogischer (syntaktischer) Anteile einer universellen Logiksprache nahm ihre noch heute gültige Form in den Arbeiten von Tarski 1936 und Gödel 193o an und fand ihren grundlagentheoretischen Abschluß im Gödelschen Vollständigkeitssatz, der eine syntaktische (lies: algorithmische, nur von der äußeren Form vorkommender Zeichen und nicht von ihrer Bedeutung abhängige) Charakterisierung des semantischen Begriffs der logischen Allgemeingültigkeit (Wahrheit) lieferte.

Kapitel D ist diesem Thema gewidmet. Als unmittelbare Folgerungen aus dem angegebenen Beweis des Vollständigkeitssatzes behandeln wir in DIII einige einfache Charakterisierbarkeitsprobleme mathematischer Begriffe und Strukturen durch Formeln erster (oder höherer) Stufe, die sehr deutlich die Rolle der jeweils unterliegenden formalen Logiksprache bei zahlreichen mathematischen Fragestellungen beleuchten. Als Anwendung einer einfachen Modellkonstruktion von Skolem beweisen wir hier auch die Herbrandsche Reduktion des Prädikatenkalküls auf den aussagenlogischen Teilkalkül und folgern daraus die Vollständigkeit des Resolutionskalküls, der vielen Computerimplementierungen der Prädikatenlogik in automatischen Beweisverfahren oder Programmiersprachen wie PROLOG zugrundeliegt.

Die erfolgreiche Präzisierung und Trennung syntaktischer und semantischer Aspekte formaler Logiksprachen stellt einen einfachen Prototyp der für

Programmiersprachen nötigen Unterscheidung zwischen syntaktischen und semantischen Anteilen dar. Darüberhinaus sind (erst- oder höherstufige) Logiksprachen zum Ausdruck zahlreicher mit Programmiersprachen zusammenhängender Probleme geeignet und haben dort (z.B. in der Datenbanktheorie) namhafte Anwendungen gefunden. Viele logiksprachliche Elemente gehen sogar direkt in manche höhere Programmiersprache ein; das logic programming erhebt logische (Konstruktions- und Beweis-) Methoden geradezu zum Prinzip. Angestoßen von Hoare hat man aller Art formale Regeln zum Beweisen der Korrektheit strukturierter Programme aufgestellt, die der durch Gentzen geleisteten logischen Analyse des erststufigen Beweisbegriffs nachempfunden sind und Grundstrukturen mathematischer Beweisführungen entsprechen. Wir verfolgen diesen Gentzenschen Ansatz ein Stück weit in Kapitel E und geben damit gleichzeitig einen elementaren Einblick in den Charakter beweistheoretischer Untersuchungen. Insbesondere führen wir die Herleitungsnormalform aus dem Hauptsatz von Gentzen vor, die das Zusammenspiel von aussagen- und quantorenlogischen Anteilen in Herleitungen deutlicher expliziert, als dies im Resolutionskalkül geschieht, und die den engen Zusammenhang zwischen logischen Beweissystemen (Aufzählungsverfahren) und logischen Testsystemen (Erkennungsverfahren) unmittelbar ablesen läßt. Als Anwendungsbeispiel folgern wir aus Gentzens Normalformmethode einige modelltheoretische Sätze, die in jüngeren komplexitätstheoretischen Untersuchungen (s. Kap.F) eine Rolle spielen.

Mit der Realisierung der Leibnizschen Idee einer characteristica universalis als Sprache der Prädikatenlogik der ersten Stufe hat der eingangs erwähnte, schon in der ars magna des R.Lullus zum Ausdruck kommende Traum von einer allumfassenden Problemlösungsmethode die Form einer mathematischen Aufgabe angenommen: nach einem Algorithmus zu suchen, der für jeden prädikatenlogischen Ausdruck in endlich vielen Schritten entscheidet, ob er allgemeingültig ist oder nicht. Hilbert nannte dieses Problem das Entscheidungsproblem schlechthin; den historischen Hintergrund bildete das - in der Absicht einer gegen das Auftreten von Paradoxen gefeiten Begründung der gesamten Mathematik formulierte - Hilbertsche Programm, die verschiedenen Zweige der Mathematik durch erststufige Axiomatisierungen zu charakterisieren, so daß jeder mathematische Beweis zu einer logischen Herleitung der Behauptung aus vorher gegebenen Axiomen würde. Church und Turing haben 1935 auf der Grundlage ihrer mathematischen Präzisierung des intuitiven Begriffs von Algorithmus (s. Kap.A) beweisen können, daß es keinen derartigen Algorithmus gibt und somit der erststufige Begriff der logischen Allgemeingültigkeit zwar kalkülisierbar im Sinne von rekursiver Aufzählbarkeit, nicht aber effektiv entscheidbar ist. Verfeinerungen und Übertragungen der Churchschen und Turingschen Beweismethode haben zu entsprechenden Aussagen über die Komplexität eingeschränkter (entscheidbarer wie unentscheidbarer) logischer Entscheidungsprobleme geführt, die sich aus der Formalisierbarkeit geeigneter Entscheidungsprobleme für bestimmte Klassen von Algorithmen (s. Komplexitätsklassen in Kap.C) ergeben; stellvertretend nennen wir hier die PROLOG-Definierbarkeit aller berechenbaren Funktionen und die NP-Vollständigkeit des Entscheidungsproblems der Aussagenlogik (lies: desjenigen entscheidbaren Teils der Prädikatenlogik, der die Theorie Boolescher Funktionen beschreibt). Inhaltlich wie methodisch gehört hierhin auch die im ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zutage tretende prinzipielle Unmöglichkeit, den Wahrheitsbegriff einer erststufigen Theorie zu kalkülisieren, in der alle Zahlgleichungen $\underline{n}+\underline{m}=\underline{n+m}$ und $\underline{n}\cdot\underline{m}=\underline{n\cdot m}$ für Zahlen r repräsentierende Zahlterme $\underline{r}$ herleitbar sind. Dies und Verwandtes ist Inhalt von Kapitel F.

KAPITEL D: LOGISCHE ANALYSE DES WAHRHEITSBEGRIFFS

Ziel dieses Kapitels ist: I.Syntaktische Definition von Sprachen der Prädikatenlogik erster Stufe, in denen Objekte (Individuen) durch Terme und Aussagen über sie durch Ausdrücke (Formeln) dargestellt werden, sowie eine mathematisch präzise Definition der inhaltlichen Bedeutung (Semantik) solcher Terme und Formeln und insbesondere des Begriffs logischer Wahrheit (Allgemeingültigkeit) der letzteren; II.Nachweis der rekursiven Aufzählbarkeit des logischen Gültigkeitsbegriffs durch Angabe eines Kalküls, mit dessen Hilfe alle und nur die logisch gültigen Formeln rein syntaktisch herleitbar sind.

TEIL I. SYNTAX UND SEMANTIK

§ 1.Formale Sprachen der ersten Stufe. Wir wollen formale Sprachen entwickeln, in denen Beziehungen zwischen Objekten wie "n<m" und Eigenschaften von Objekten aus einem gegebenen Individuenbereich wie "3 ist eine Primzahl" sowie rein logische Verknüpfungen derartiger elementarer Aussagen wie "nicht α", "α und (bzw. oder bzw. impliziert) β", "Für mindestens ein (bzw. alle) Objekt(e) x des gegebenen Individuenbereichs gilt α" ausgedrückt werden können. Dazu benötigen wir insbesondere eine Bestimmung der zulässigen Namen für Objekte, für die wir außer Variablen (für beliebige Objekte) und Konstanten (für fest gewählte Objekte) der Allgemeinheit halber auch beliebige mittels Funktionsnamen gebildete Terme wie beispielsweise $17+3\cdot x$ zulassen wollen. Da wir semantisch die Wahrheitsbedingungen komplexer Aussa-