Ernst Kunz

Einführung in die algebraische Geometrie

vieweg studium
Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von M. Aigner, G. Fischer,
M. Grüter, M. Knebusch, R. Scharlau, G. Wüstholz

Martin Aigner
Diskrete Mathematik

Albrecht Beutelspacher und Ute Rosenbaum
Projektive Geometrie

Manfredo P. do Carmo
Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Gerd Fischer
Ebene algebraische Kurven

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb
Funktionentheorie

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb
Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie

Otto Forster
Analysis 3

Manfred Knebusch und Claus Scheiderer
Einführung in die reelle Algebra

Horst Knörrer
Geometrie

Ulrich Krengel
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Ernst Kunz
Algebra

Ernst Kunz
Einführung in die algebraische Geometrie

Reinhold Meise und Dietmar Vogt
Einführung in die Funktionalanalysis

Erich Ossa
Topologie

Alexander Prestel
Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie

Jochen Werner
Numerische Mathematik 1 und 2

Jürgen Wolfart
Einführung in die Zahlentheorie und Algebra

Ernst Kunz

Einführung in die algebraische Geometrie

Mit 145 Übungsaufgaben

vieweg

Prof. Dr. Ernst Kunz
Universität Regensburg
Fachbereich Mathematik
Universitätsstr. 31
93053 Regensburg

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN-13:978-3-528-07287-2 e-ISBN-13:978-3-322-80313-9
DOI: 10.1007/978-3-322-80313-9

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Einführung in die algebraische Geometrie ist aus dem gleichen Kurs hervorgegangen, dem auch mein Algebra-Buch [K_4] entstammt. Sie schließt an dieses an und wendet sich hauptsächlich an Studierende, die sich über einen algebraischen Grundkurs hinaus in ein Gebiet der Algebra einarbeiten und Fragen der aktuellen Forschung näherkommen wollen.

Die algebraische Geometrie besitzt zahlreiche Facetten und erlaubt sehr unterschiedliche Zugänge. Viele Mathematiker verstehen unter algebraischer Geometrie hauptsächlich projektive algebraische Geometrie. In diesem Buch wird der Standpunkt eingenommen, daß man in der algebraischen Geometrie vor allem die Lösungsmengen algebraischer Gleichungssysteme mit Koeffizienten aus einem Körper, also die algebraischen Varietäten, verstehen möchte. Es werden die algebraischen Methoden beschrieben, die von van der Waerden, Krull, A. Weil und Zariski in die Geometrie eingeführt und in neuerer Zeit von Serre, Grothendieck und vielen anderen weiterentwickelt wurden. Zu den modernen Verallgemeinerungen der Varietäten, den Schemata, wird hingeführt, und es wird ihre Nützlichkeit auch für die klassische Theorie am Beispiel der elementaren Schnitt-Theorie zumindest angedeutet.

Der jetzige Text hat ein gemeinsames Gerüst mit meinem vergriffenen Buch [K_1], von dem nur noch eine amerikanische Ausgabe [K_2] vorliegt, die in Deutschland ziemlich teuer ist. Das frühere Buch setzte sich zum Ziel, einige zum Zeitpunkt seines Erscheinens aktuelle Entdeckungen über vollständige Durchschnitte zu erreichen. Hier wird Bescheideneres angestrebt. Das jetzige Buch ist elementarer, es betont die Geometrie etwas stärker, und es sind neue Übungsaufgaben gewählt worden.

Der Leser soll die Teile von [K_4] kennen, die sich mit der Körper- und Ringtheorie beschäftigen, z.B. den Hilbertschen Basissatz und den Nullstellensatz sowie Grundtatsachen über ganze Ringerweiterungen. Darüberhinaus wird Vertrautheit mit der linearen und multilinearen Algebra von Moduln über kommutativen Ringen erwartet, z.B. soll man mit dem Tensorprodukt von Moduln und Algebren umgehen können, und es wird vorausgesetzt, daß man über den Transzendenzgrad und Transzendenzbasen von Körpererweiterungen Bescheid weiß. Auf diesen Grundlagen aufbauend, werden stets vollständige Beweise angestrebt.

Was sonst noch aus der Algebra verwendet wird, ist in den Anhängen A-F zusammengefaßt, die man zu Beginn lesen kann, oder aber dann, wenn sie im mehr geometrischen Teil des Buches zum ersten Mal angewendet werden.

Für zahlreiche nützliche Hinweise und Verbesserungsvorschläge bin ich Markus Bockes, Bettina Kreuzer, Winfried Weber und vielen anderen Teilnehmern der Regensburger Vorlesungen und Seminare zu Dank verpflichtet. Die mit Metafont und

Maple erzeugten Bilder verdanke ich Bernhard und Wolfgang Rauscher sowie Markus Bockes. Der Text ist von Eva Rütz in bewährter Weise in $\TeX$ gesetzt worden.

Verlag und Herausgebern danke ich, daß sie mich ermuntert haben, ihr Lehrbuchprogramm erneut durch ein Buch über algebraische Geometrie zu ergänzen.

Regensburg, Januar 1997

Ernst Kunz

Vereinbarungen und Bezeichnungen

Unter einem **Ring** verstehen wir immer einen assoziativen, kommutativen Ring mit Eins. **Ringhomomorphismen** bilden die Eins auf die Eins ab. In einem **Modul** M gilt $1 \cdot m = m$ für alle $m \in M$. **Primideale** eines Rings werden immer $\neq R$ vorausgesetzt. Eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper K wird auch **affine** K**–Algebra** genannt. Neben Standardsymbolen werden noch folgende **Symbole** ohne nähere Erklärung verwendet:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots,\}$

$\mathbb{R}_+$ Menge der reellen Zahlen > 0

$|M|$ Anzahl der Elemente einer Menge M

$\emptyset$ leere Menge

$\supset, \subset$ Zeichen für Inklusion

$\supsetneqq, \subsetneqq$ Zeichen für echte Inklusion

$f\,|_U$ Einschränkung einer Abbildung f auf die Menge U

K^* Menge der Elemente $\neq 0$ eines Körpers K

$\mathbb{F}_q$ Körper mit q Elementen

$\operatorname{Trgr} L/K$ Transzendenzgrad einer Körpererweiterung L/K

$a \mid b$ a teilt b (in einem Ring)

$a \sim b$ a und b sind zueinander assoziiert (d.h. $a \mid b$ und $b \mid a$)

$\operatorname{Spec} R$ Menge der Primideale eines Rings R (Spektrum)

$\operatorname{Max} R$ Menge der maximalen Ideale von R (Maximalspektrum)

$\operatorname{Min} R$ Menge der minimalen Primideale von R

$(\dots)$ Ideal erzeugt von ...

$\langle \dots \rangle$ Untermodul erzeugt von ...

$\dim_K V$ Dimension eines K–Vektorraums V

$\deg_{X_i} f$ Grad eines Polynoms f bzgl. der Variablen X_i

$\operatorname{Grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}\right)$ Gradient eines Polynoms f

Zitate der Form (X,3.4) besagen, daß man das Betreffende im Kapitel X unter der Nummer 3.4 findet. Nummern ohne Kapitelangabe beziehen sich auf das Kapitel, in dem sie gerade stehen, und Zitate der Form X.4 auf den Anhang X.