

Dynamische Systeme: Steuerbarkeit und chaotisches Verhalten

Von Prof. Dr. rer. nat. Werner Krabs
Technische Universität Darmstadt



B.G.Teubner Stuttgart · Leipzig 1998

Prof. Dr. rer. nat. Werner Krabs

Geboren 1934 in Hamburg-Altona. Von 1954 bis 1959 Studium der Mathematik, Physik und Astronomie an der Universität Hamburg, Abschluß als Diplom-Mathematiker, 1963 Promotion. 1967/68 Visiting Assistant Professor an der University of Washington in Seattle. 1968 Habilitation im Fach Angewandte Mathematik an der Universität Hamburg. Von 1970 bis 1972 Wiss. Rat und Professor an der RWTH Aachen. 1971 Visiting Associate Professor an der Michigan State University in East Lansing. Seit 1972 Professor an der TH Darmstadt. 1977 Visiting Full Professor an der Oregon State University in Corvallis. Von 1979 bis 1981 Vizepräsident der TH Darmstadt. Von 1986 bis 1987 Vorsitzender der Gesellschaft für Mathematik, Ökonomie und Operations Research.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Werner Krabs:

Dynamische Systeme : Steuerbarkeit und chaotisches Verhalten / von
Werner Krabs. – Stuttgart ; Leipzig : Teubner, 1998

ISBN-13: 978-3-519-02638-9 e-ISBN-13: 978-3-322-80102-9

DOI: 10.1007978-3-322-80102-9

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© 1998 B.G.Teubner Stuttgart · Leipzig

Vorwort

Gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts haben Lyapunov und Poincaré die sog. qualitative Theorie der Differentialgleichungen entwickelt und dabei geometrisch-topologische Betrachtungsweisen eingeführt, aus denen sich der Begriff des dynamischen Systems herausgebildet hat. In seiner heutigen abstrakten Form geht er auf G.D. Birkhoff zurück.

Von dieser geht auch das Kapitel 1 dieses Buches aus, in dem ungesteuerte Zeit-kontinuierliche und Zeit-diskrete Systeme untersucht werden. Der Zeit-kontinuierliche Fall ist in der Lehrbuchliteratur bisher bereits ausführlich behandelt worden, der Zeit-diskrete hingegen weit weniger. Die von J.P. LaSalle entwickelte Stabilitätstheorie Zeit-diskreter Systeme entstand auch erst in den siebziger Jahren unseres Jahrhunderts.

Gesteuerte Systeme haben auf den ersten Blick nicht die Eigenschaften dynamischer Systeme. Indem man aber die Steuerungen in den Zustandsraum miteinbezieht, erhält man aus einem gesteuerten System ein dynamisches System. Diese Sichtweise haben wir jedoch in Kapitel 2 über gesteuerte Systeme nicht eingenommen, sondern folgen der üblichen Betrachtungsweise der Steuerungstheorie. Uns interessiert hauptsächlich die Frage nach der Steuerbarkeit eines dynamischen Systems in einem Gleichgewichtszustand. Diese Fragestellung tritt in zahlreichen Anwendungen auf.

Sie liegt auch dem Kapitel 3 über dynamische Spiele zugrunde und wird hier gekoppelt mit einer kooperativen oder nicht-kooperativen Lösung des Steuerungsproblems.

Kapitel 4 ist dem chaotischen Verhalten dynamischer Systeme gewidmet. Dieses war schon Poincaré bekannt, wenngleich ihm noch nicht die mathematischen Mittel zu Gebote standen, Chaos systematisch zu untersuchen. Er war auch der erste, der erkannt hat, daß die Kausalität eines dynamischen Systems eine theoretische Fiktion ist und daß die Vorhersagbarkeit des Verhaltens eines Systems von der Genauigkeit unserer Kenntnis seiner Ausgangsdaten abhängt.

Die Theorie des Chaosverhaltens Zeit-diskreter Systeme ist schon recht weit fortgeschritten und hat teilweise auch bereits zu abgerundeten Ergebnissen geführt. Weit schwieriger ist es, Zeit-kontinuierliche chaotische Systeme in den Griff zu bekommen. Davon kann sich der Leser durch die Lektüre des Abschnittes 4.6 und 4.7 dieses Buches überzeugen. Gewöhnlich studiert man chaotisches Verhalten Zeit-kontinuierlicher Systeme mit Hilfe der Poincaréschen Schnitt-Abbildung, die dazu benutzt wird, um aus einem Zeit-kontinuierlichen System ein Zeit-diskretes Teilsystem "herauszuschneiden", dessen Chaosverhalten sich leichter beschreiben läßt.

Danken möchte ich Frau A. Garhammer für das Schreiben dieses Buches auf dem Computer und Herrn J. Li für die Anfertigung der Graphiken sowie des Sachverzeichnisses.

Darmstadt, Juni 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Ungesteuerte Systeme	7
1.1	Abstrakte Definition dynamischer Systeme.	7
1.2	Elementare Eigenschaften dynamischer Systeme.	10
1.3	Dynamische Systeme in der Ebene.	13
1.4	Stabilität von Zeit-kontinuierlichen dynamischen Systemen.	19
1.5	Diskrete dynamische Systeme.	26
1.5.1	Grundlegende Definitionen.	26
1.5.2	Lyapunov-Funktionen und eine Erweiterung der direkten Methode von Lyapunov.	29
1.5.3	Stabilität und Instabilität.	32
1.6	Diskretisierung Zeit-kontinuierlicher dynamischer Systeme.	35
2	Gesteuerte Systeme	40
2.1	Der Zeit-kontinuierliche Fall.	40
2.1.1	Das Problem der Steuerbarkeit.	40
2.1.2	Steuerbarkeit linearer Systeme.	41
2.1.3	Restringierte Null-Steuerbarkeit linearer Systeme.	45
2.1.4	Steuerbarkeit nichtlinearer Systeme in Ruhepunkte.	48
2.1.5	Eine Approximative Lösung des Problems der restringierten Null- Steuerbarkeit.	53
2.1.6	Ein Spezialfall.	55
2.2	Der Zeit-diskrete Fall.	60
2.2.1	Das Problem der Fixpunkt-Steuerbarkeit.	60
2.2.2	Fixpunkt-Steuerbarkeit linearer Systeme.	61
2.2.3	Ein weiterer Spezialfall.	66
3	Dynamische Spiele	70
3.1	Der Zeit-kontinuierliche Fall.	70
3.1.1	Das Problem der Steuerbarkeit.	70
3.1.2	Eine kooperative spieltheoretische Lösung.	72
3.1.3	Eine nicht-kooperative spieltheoretische Lösung.	75
3.2	Der Zeit-diskrete Fall.	81
3.2.1	Das Problem der Steuerbarkeit.	81
3.2.2	Eine schrittweise, kooperative, spieltheoretische Lösung.	83
3.2.3	Eine schrittweise, nicht-kooperative, spieltheoretische Lösung.	86

3.2.4	Hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit des Problems der Steuerbarkeit.	90
3.2.5	Ein Approximationsproblem zur näherungsweise Lösung des Problems der Steuerbarkeit.	91
3.2.6	Anwendung auf ein Konfliktmodell.	96
4	Chaotisches Verhalten dynamischer Systeme	101
4.1	Chaos im Sinne von Devaney.	101
4.2	Topologische Konjugiertheit.	105
4.3	Die topologische Entropie als ein Maß für Chaos.	113
4.4	Chaos im Sinne von Li und Yorke.	123
4.5	Seltsame (oder auch chaotische) Attraktoren.	129
4.6	Über chaotisches Verhalten von Abbildungen in der Ebene	139
4.7	Periodische Systeme in der Ebene.	152
4.7.1	Das nichtlineare Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt.	152
4.7.2	Die Poincaré-Abbildung und ihr chaotisches Verhalten.	154
5	Bibliographische Bemerkungen	157
	Literaturverzeichnis	161
	Sachverzeichnis	163