

S. Scholz

Mathematik in Übungsaufgaben

Mathematik in Übungsaufgaben

Von Prof. Dr. Siegfried Scholz
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden (FH)



B.G.Teubner Stuttgart · Leipzig 1999

Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Scholz

Geboren 1939 in Eichwald/Nordböhmen. Ab 1958 Mathematikstudium an der TH/TU Dresden. Diplom 1963. Promotion 1971. Ab 1963 wissenschaftlicher Assistent am Institut für Angewandte Mathematik, ab 1972 wissenschaftlicher Oberassistent am Wissenschaftsbereich Numerische Mathematik der Technischen Universität Dresden. Seit 1992 Professor an der Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden (FH).

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Scholz, Siegfried:

Mathematik in Übungsaufgaben / von Siegfried Scholz. – Stuttgart ; Leipzig : Teubner, 1999

ISBN-13: 978-3-519-00256-7 e-ISBN-13: 978-3-322-80012-1

DOI: 10.1007/978-3-322-80012-1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© 1999 B.G.Teubner Stuttgart · Leipzig

Umschlaggestaltung: Peter Pfitz, Stuttgart

Vorwort

Schwierigkeiten mit der Mathematik zu Studienbeginn - wie viele Studentinnen und Studenten haben jährlich damit zu kämpfen ... Oft sind Monate intensiven Arbeitens nötig, um vorhandene Wissenslücken zu schließen und notwendige Kenntnisse und Fertigkeiten so zu festigen, daß die an der Universität oder Fachhochschule gebotene Mathematik auf einer soliden Grundlage aufbauen kann.

Daß die meisten Studienanfänger bemüht sind, diese Schwierigkeiten schnell zu überwinden, zeigen die hohen Teilnehmerzahlen an Vorbereitungskursen, das große Interesse am "Vorrechnen" von Übungsaufgaben und die rege Nachfrage nach einem gut verständlichen Einführungsbuch. So knüpft z.B. die erfolgreiche "Starthilfe Mathematik" an den bekannten Schulstoff an und erleichtert den Übergang von der Schule zur Hochschule; vgl. hierzu auch die Hinweise auf S. 192.

Vielfach besteht darüber hinaus der Wunsch, anhand von weiteren Aufgaben die richtige Handhabung des mathematischen Rüstzeugs zu üben und dabei gleichzeitig das Verständnis der theoretischen Zusammenhänge zu vertiefen. Diesem Bedürfnis kommt das vorliegende Buch entgegen. Es enthält mehr als 200 *Aufgaben* **A** (zählt man die Teilaufgaben, so sind es mehr als 900) mit zahlreichen *Hinweisen* **H** und umfaßt so - mit Ausnahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung - alle Stoffgebiete, die zum Abiturwissen im Fach Mathematik gehören sollten und in den Mathematikvorlesungen des 1. Semesters vertiefend behandelt werden. Der besondere Vorzug des Buches jedoch sind die **ausführlichen Lösungen** **L** **zu allen Aufgaben**. Damit hat auch derjenige Leser, dem die Lösung einer Aufgabe nicht gelingt, die Möglichkeit, sich beim Nachvollziehen des Lösungsweges die nötigen Kenntnisse und Fertigkeiten anzueignen, um vielleicht die nächsten Aufgaben erfolgreicher angehen zu können. Die Aufgaben sind i. allg. so angeordnet, daß ihr Schwierigkeitsgrad - auch innerhalb der Teilaufgaben - ansteigt und sie schließlich zu konkreten Anwendungen aus den verschiedensten Fachgebieten hinführen. Damit wird eine Verzahnung von Abitur- und Hochschulstoff erreicht.

Leser, die größere Sicherheit im Umgang mit Zahlen und Termen gewinnen möchten, sollten mit den Aufgaben des 2. Kapitels beginnen. Dort lernt man auch zahlreiche Formeln aus der Physik kennen und übt deren Umstellung nach den geforderten Größen. Die Abschnitte 2.1 und 2.5 können dabei zunächst übergangen werden, ebenso die Aufgaben zu Doppelsummen. Die gleiche Sicherheit wie im Umgang mit Zahlen und Termen ist im Umgang mit Mengen nötig; Übungsmaterial hierzu bietet Abschnitt 1 des 1. Kapitels. Abschnitt 1.2 möchte den Leser an den korrekten Umgang mit mathematischen Aussagen gewöhnen. Sollte dies zunächst größere Mühe bereiten, kann man diese Aufgaben auch erst später bearbeiten.

In Kapitel 3 werden die zuvor erworbenen Fertigkeiten zur Lösung von Gleichungen und Ungleichungen eingesetzt. Erfahrungsgemäß bereitet letzteres Schwierigkeiten (insbesondere im Zusammenhang mit Beträgen). Hier helfen die zugehörigen Hinweise weiter.

Das umfangreichste Kapitel des Buches ist den Funktionen gewidmet. Vor allem

die Grundfunktionen und ihre Umkehrfunktionen spielen eine so wichtige Rolle in der Mathematik und ihren Anwendungen, daß man mit ihren Eigenschaften bestens vertraut sein sollte. Zu den Polynomen und gebrochen rationalen Funktionen geben die entsprechenden Hinweise nähere Auskunft.

In Kapitel 5 werden das Rechnen mit Vektoren und ihre Anwendung in der analytischen Geometrie der Ebene geübt. Bei den Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen kommt es einerseits auf die richtige Handhabung des Gaußschen Algorithmus und andererseits auf die mathematische Modellierung praktischer Probleme an.

Grenzwertbetrachtungen bei Zahlenfolgen und Funktionen bilden den Schwerpunkt der Kapitel 7 und 8. Daneben enthält Kapitel 7 einige Anwendungen aus der Finanzmathematik.

In Kapitel 9 wird zunächst die Anwendung von Differentiationsregeln (insbesondere der Kettenregel) geübt und danach die Theorie der Extrema und Wendepunkte zu Kurvendiskussionen und zur Lösung von Extremwertaufgaben herangezogen.

Kapitel 10 beschäftigt sich mit der partiellen Integration, der Substitutionsmethode, der Integration gebrochen rationaler Funktionen und zeigt verschiedene Anwendungsmöglichkeiten der Integralrechnung auf.

In das vorliegende Übungsbuch flossen Aufgaben ein, die ich im Laufe meiner langjährigen Lehrtätigkeit in Vorbereitungskursen, in Übungen und Klausuren gestellt habe; die meisten Aufgaben sind jedoch neu. Hilfreich für die Arbeit an dem Buch waren mir Diskussionen, die ich u.a. mit Prof. Dr. W. Schirotzek, Prof. Dr. M. Richter, Prof. Dr. G. Zeidler sowie mit Studenten geführt habe. Prof. Dr. W. Gerlach und Frau Dr. M. Timmler waren mir unentbehrliche Ratgeber beim Schreiben und Zeichnen mit dem Computer. Herr Dr. H.-D. Dahlke und Frau Dr. M. Timmler haben das Manuskript kritisch gelesen und mit wertvollen Bemerkungen versehen. Ihnen allen möchte ich herzlich danken. Mein besonderer Dank gilt meinem langjährigen Kollegen, Herrn Dipl.-Math. W. Heß, der die Lösungen aller Aufgaben mit der ihm eigenen Sorgfalt nachgerechnet und korrigiert, Formulierungen geglättet und präzisiert, alternative Lösungswege vorgeschlagen, Aufgabenstellungen erweitert und so ganz wesentlich zum Gelingen des Buches beigetragen hat.

Schließlich danke ich dem Teubner-Verlag für das anhaltende Interesse an dem Buchprojekt und insbesondere Herrn J. Weiß für die angenehme Zusammenarbeit und für seine wertvollen Anregungen und Hinweise.

Dresden, im Juni 1999

S.Scholz

Inhalt

1	Mengenlehre und Logik	9
1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre	10
1.2	Grundbegriffe der mathematischen Logik	11
1.3	Hinweise	14
2	Rechnen mit reellen Zahlen und Termen	16
2.1	Verschiedene Darstellungen reeller Zahlen	17
2.2	Elementare Umformung von Termen	17
2.3	Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung	19
2.4	Intervalle, Summenzeichen, Binomialkoeffizienten	21
2.5	Die Beweismethode der vollständigen Induktion	22
2.6	Hinweise	23
3	Gleichungen und Ungleichungen	27
3.1	Einige Gleichungen 1. und höheren Grades	28
3.2	Wurzelgleichungen	29
3.3	Ungleichungen	29
3.4	Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen	29
3.5	Hinweise	30
4	Funktionen	33
4.1	Funktionsbegriff, Definitions- und Wertebereich	34
4.2	Die Grundfunktionen und ihre Umkehrfunktionen	36
4.3	Spezielle Eigenschaften von Funktionen	38
4.4	Polynome und gebrochen rationale Funktionen	41
4.5	Hinweise	42
5	Vektoren und ihre Anwendung	45
5.1	Vektoren	46
5.2	Analytische Geometrie der Ebene	47
5.3	Kegelschnitte	49
5.4	Hinweise	49
6	Lineare Gleichungssysteme	51
6.1	Gaußscher Algorithmus	52
6.2	Anwendungen aus der analytischen Geometrie	52
6.3	Vermischte Anwendungsaufgaben	53
6.4	Hinweise	55

7	Zahlenfolgen	57
7.1	Bildungsvorschriften für Zahlenfolgen	57
7.2	Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen	57
7.3	Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz, Grenzwert	58
7.4	Anwendungen	58
7.5	Hinweise	60
8	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	62
8.1	Grenzwertuntersuchungen	62
8.2	Stetigkeit / Unstetigkeit von Funktionen	63
8.3	Hinweise	64
9	Differentialrechnung	65
9.1	Technik des Differenzierens	65
9.2	Anwendungen der 1. Ableitung in der Geometrie	66
9.3	Kurvendiskussionen	67
9.4	Anwendungsaufgaben	67
9.5	Hinweise	69
10	Integralrechnung	72
10.1	Integrale, die sich unmittelbar auf Grundintegrale zurückführen lassen	73
10.2	Partielle Integration	73
10.3	Substitutionsmethode	74
10.4	Integration gebrochener rationaler Funktionen	75
10.5	Weitere Anwendungen des bestimmten Integrals	75
10.6	Hinweise	76
11	Lösungen	79
11.1	Lösungen zu Kapitel 1	79
11.2	Lösungen zu Kapitel 2	86
11.3	Lösungen zu Kapitel 3	99
11.4	Lösungen zu Kapitel 4	108
11.5	Lösungen zu Kapitel 5	133
11.6	Lösungen zu Kapitel 6	145
11.7	Lösungen zu Kapitel 7	150
11.8	Lösungen zu Kapitel 8	158
11.9	Lösungen zu Kapitel 9	165
11.10	Lösungen zu Kapitel 10	182
	Bezeichnungen	190
	Literatur	191
	Sachregister	193