



Science Networks · Historical Studies  
Volume 11

Herausgegeben von Erwin Hiebert und Hans Wussing

in Zusammenarbeit mit:

S. M. R. Ansari, Aligarh  
D. Barkan, Pasadena  
H. J. M. Bos, Utrecht  
U. Bottazzini, Bologna  
J. Z. Buchwald, Toronto  
S. S. Demidov, Moskva  
J. Dhombres, Nantes  
J. Dobrzycki, Warszawa  
Fan Dainian, Beijing  
E. A. Fellmann, Basel  
M. Folkerts, München  
P. Galison, Stanford  
I. Grattan-Guinness, Bengo  
J. Gray, Milton Keynes

R. Halleux, Liège  
S. Hildebrandt, Bonn  
E. Knobloch, Berlin  
Ch. Meinel, Regensburg  
G. K. Mikhailov, Moskva  
S. Nakayama, Tokyo  
L. Nový, Praha  
D. Pingree, Providence  
W. Purkert, Leipzig  
J. S. Rigden, New York  
D. Rowe, Mainz  
A. I. Sabra, Cambridge  
R. H. Stuewer, Minneapolis  
V. P. Vizgin, Moskva

Springer Basel AG

Karin Reich

# **Die Entwicklung des Tensorkalküls**

Vom absoluten Differentialkalkül  
zur Relativitätstheorie

Springer Basel AG

Autorin:

Frau Professor Dr. Karin Reich  
Fachhochschule für Bibliothekswesen  
Universität Stuttgart  
Feuerbacher Heide 23–42  
D–70192 Stuttgart

Mathematisches Institut A  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 57  
D–70569 Stuttgart

Deutsche Bibliothek Cataloging-in-Publication Data

**Reich, Karin:**

Die Entwicklung des Tensorkalküls: vom absoluten  
Differentialkalkül zur Relativitätstheorie / Karin Reich. – Basel ;  
Boston ; Berlin : Birkhäuser, 1994.

(Science networks ; Bd. 11)

ISBN 978-3-0348-9643-6

ISBN 978-3-0348-8486-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-0348-8486-0

NE: GT

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechts.

© 1994 Springer Basel AG

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag 1994

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1994

Camera-ready Vorlage mit  $\text{LaT}_E\text{X}$  erstellt

Gedruckt auf säurefreiem Papier, hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff

ISBN 978-3-0348-9643-6

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Das eigentlich schöpferische Prinzip liegt aber in der Mathematik.

(Einstein 15; S. 117)

## Vorwort

Im Sommersemester 1962 hörte ich an der Universität Zürich eine Vorlesung über Relativitätstheorie von Walter Heitler. Diese war für mich der Anlaß für meine spätere Beschäftigung mit der Geschichte der Differentialgeometrie und des Tensorkalküls.

Die vorliegende Darstellung orientiert sich an den Quellen. Es wurde nicht versucht, die Schreibweise zu vereinheitlichen, im Gegenteil, es war ein Ziel, sich soweit wie möglich an die Originaltexte anzulehnen. Dies war im Falle der Fachsprache nicht immer durchführbar. So wird die Bezeichnungsweise Tensor bzw. Krümmungstensor auch dann verwendet, wenn diese Größen in den Originaltexten anders benannt wurden, was sehr häufig der Fall war; die Darstellung wäre sonst zu verwirrend geworden. Der Leser muß ferner damit vorliebnehmen, daß mit "Tensoren" nicht nur die allgemeinen Größen, sondern auch spezielle Tensoren meist ohne weitere Kennzeichnung bezeichnet werden. Dagegen wurde kein Wert auf eine einheitliche Fachsprache gelegt, wo sich diese als nicht unbedingt notwendig erwies. Z.B. ist gemäß den Quellen vom Rang, von der Ordnung bzw. der Stufe eines Tensors die Rede.

Auf die Sekundärliteratur wurde, soweit sie mir bekannt war, hingewiesen. Es ist auffallend, daß es zu manchen Themen, wie z.B. Riemanns *Hypothesen*, Literatur in Hülle und Fülle gibt, während andere Bereiche, wie z.B. die Geschichte der Differentialinvarianten, in der Sekundärliteratur kaum Beachtung gefunden haben.

Die vorliegende Arbeit wird durch drei Anhänge ergänzt: 1. Fachsprache und Symbolik, 2. Graphische Darstellung der Entwicklung und 3. Kurzfassung der einzelnen Abschnitte. Diese ist für jene Leser gedacht, die einzelne Kapitel überspringen wollen. Diese Zusammenfassungen sollen eine knappe Information über den Inhalt ermöglichen, um bei der weiteren Lektüre den roten Faden nicht zu verlieren. In diesen Kurzfassungen fehlen generell die Literaturangaben.

Schon 1979 hatte ich meine Habilitationsschrift dem Thema *Die Entwicklung des Tensorkalküls* gewidmet, diese Arbeit veröffentlichte ich nicht. Die jetzige Fassung hat mir der alten nicht mehr allzu viel gemeinsam, neue Erkenntnisse und Ergebnisse sind hinzugekommen, das betrifft insbesondere die Beziehungen zur Invariantentheorie und die Theorie der Differentialinvarianten. Anfang des Jahres 1992 erschien folgendes Werk Dieter Herberts: *Die Entstehung des Tensorkalküls. Von den Anfängen in der Elastizitätstheorie bis zur Verwendung in der Baustatik*. Dem Autor stand eine Kopie meiner alten Habilitationsschrift zur Verfügung. Herbert zitiert diese z.B. für die These, daß Ricci mit seinem Tensorkalkül nur wenig Erfolg gehabt hatte (Herbert; S. 188–190). Diese Ansicht, die auch andere Autoren vertraten, ist falsch, dies ergaben die

Untersuchungen zur Theorie der Differentialinvarianten. Ich habe Herberts Arbeit erst erhalten, als mein jetziges Manuskript praktisch fertig war. Ich habe daher nicht versucht, seine Ergebnisse zu berücksichtigen.

Die Einsteinforschung hat in den letzten Jahren ganz neue Materialien bereitstellen können. Dies ist vor allem der Arbeitsgruppe in Boston, die die *Collected Papers* herausgibt, zu verdanken. Bislang sind erst zwei Bände erschienen, sicher werden die folgenden Bände noch Ergänzungen zu meinem Thema liefern. Mein Dank gilt vor allem dieser Arbeitsgruppe, der ich durch eine Reihe von Gesprächen eine Fülle von Hinweisen verdanke, insbesondere möchte ich John Stachel und Jürgen Renn nennen. Darüber hinaus gilt mein Dank der Albert Einstein Arbeitsstelle am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin: Peter Damerow, Tilman Sauer, Giuseppe Castagnetti und Werner Heinrich. Auch möchte ich nicht vergessen, mich für die vielen fruchtbaren Gespräche bei Karl von Meyenn, John Norton, Don Howard und Erhard Scholz zu bedanken. Ferner half mir Karl-Heinz Schlote soweit wie möglich bei der Beschaffung der oft schwer auffindbaren Lebensdaten einzelner Autoren. Ferner sollte die gute Zusammenarbeit mit dem Birkhäuser-Verlag, d.h. mit Frau Doris Wörner, nicht unerwähnt bleiben. Insbesondere sei Frau Irene Jendrasik für die sachkundige, sorgfältige und gewissenhafte Drucklegung aufs herzlichste gedankt.

# Inhaltsverzeichnis

1	<b>Einleitung</b>	13
2	<b>Tensoren ohne Tensorbegriff</b>	
2.1	Vorformen von Tensoren in der Differentialgeometrie	19
2.1.1	Die Gaußsche Flächentheorie	19
2.1.2	Differentialparameter	22
2.1.3	Der Riemannsche Krümmungstensor	26
2.1.3.1	Riemann	26
2.1.3.2	Riemanns Nachfolger	29
2.2	Vorformen von Tensoren in der Elastizitätstheorie	34
2.2.1	Der Cauchysche Spannungs- und Verzerrungstensor	34
2.2.2	Weitere Charakteristika des Spannungs- und/oder Verzerrungstensors	38
3	<b>Die Theorie der Formen und Invarianten</b>	
3.1	Anfänge der Formentheorie	43
3.2	Anfänge der Invariantentheorie	47
3.2.1	Die britische Schule	47
3.2.2	Ausbau der Formen- und Invariantentheorie	53
4	<b>Die Entwicklung eines Tensorbegriffs und eines Tensorkalküls</b>	
4.1	Die Theorie der quadratischen Differentialformen bzw. Differentialinvarianten	57
4.1.1	Die kovariante Ableitung	59
4.1.2	Der absolute Differentialkalkül	65
4.1.2.1	Vorbereitende Arbeiten	67
4.1.2.2	Der Ausbau des absoluten Differentialkalküls	71
4.1.2.3	Anwendungen	75
4.1.2.4	Gesamtdarstellungen	78
4.1.2.5	Besprechungen	83
4.1.3	Theorie der Differentialinvarianten	87
4.1.3.1	Gruppenkonzept und dessen Verbindung mit dem absoluten Differentialkalkül	88
4.1.3.2	Riccis Konzepte in neuer Symbolik	93
4.1.3.3	Verallgemeinerungen von Riccis Konzepten	97



4.1.3.4	Anwendungen des Gruppenkonzeptes	101
4.1.3.5	Wrights Lehrbuch	105
4.1.3.6	Differentialinvarianten und Vektorrechnung	107
4.1.3.7	Die Theorie der Differentialinvarianten als eigenständiges Gebiet	108
4.2	Kristallographie	111
4.2.1	Voraussetzungen	111
4.2.2	Voigts Einführung des Tensorbegriffs	113
4.2.3	Tensoren höherer Ordnung	122
4.2.4	Tensoranalysis	124
4.2.5	Voigts "Kristallphysik" von 1910	126
4.2.6	Die Rezeption der Voigtschen Tensoren in der Vektorrechnung, Elektrodynamik und Elastizitätstheorie	128
4.2.7	Weiterentwicklung der Voigtschen Tensoren	129
4.3	Vektorrechnung	133
4.3.1	Lineare Vektorfunktionen	133
4.3.2	Dyadics	139
4.3.3	Rezeption	142
4.3.4	Die Synthese mit den Voigtschen Tensoren	146
4.3.5	Weitere Entwicklungen	149
4.3.5.1	Die Binäranalyse	150
4.3.5.2	Die "Omografie vettoriali"	151
4.3.5.3	Die Affinoranalysis	152
5	<b>Tensoren in der Relativitätstheorie</b>	
5.1	Einsteins mathematische Voraussetzungen	160
5.2	Spezielle Relativitätstheorie	167
5.2.1	Minkowskis Raum-Zeit	168
5.2.1.1	Einsteins unmittelbare Reaktion auf Minkowski	174
5.2.2	Vierdimensionale Tensoren, vierdimensionaler Vektorkalkül	175
5.2.2.1	Max Abraham	176
5.2.2.2	Gilbert N. Lewis	177
5.2.2.3	Arnold Sommerfeld	178
5.2.2.4	Max von Laue	181
5.3	Allgemeine Relativitätstheorie	184
	Die Rezeption des absoluten Differentialkalküls in der Differentialgeometrie und in der Physik	184
5.3.2	Einsteins und Großmanns Zusammenarbeit	189
5.3.3	Die Jahre 1914–1916	199
5.4	Die Geometrisierung der Relativitätstheorie	208

6	<b>Schlußbetrachtung</b>	213
	<b>Anhang 1</b> Fachsprache und Symbolik des absoluten Differentialkalküls	222
	<b>Anhang 2</b> Graphische, chronologische Darstellung der Entwicklung des Tensorkalküls	233
	<b>Anhang 3</b> Kurzfassung der einzelnen Abschnitte	234
	<b>Verzeichnis der Figuren, Tabellen und Abbildungen, Abbildungsnachweis</b>	251
	<b>Verzeichnis der Abkürzungen</b>	253
	<b>Literaturverzeichnis</b>	257
	<b>Namen- und Sachverzeichnis</b>	316