Teil 1
Lineare Optimierung

Überblick zum 1. Teil (Lineare Optimierung)

In der Linearen Optimierung geht es uns um die Ermittlung von Optimalpunkten und Optimalwerten einer linearen Zielfunktion auf gewissen, durch lineare Ungleichungen oder Gleichungen beschriebenen Zulässigkeitsbereichen (Polyedern).

Anknüpfend an die Grundlagen der Linearen Algebra werden die Leser zunächst mit der Formulierung und Typen von Linearen Optimierungsproblemen und mit der Theorie der linearen Ungleichungen (Alternativsätze) vertraut gemacht. Hier stützen wir uns wesentlich auf Mangasarian [37].
Danach folgen zwei Kapitel über Polyedertheorie, die die Kenntnis über solche Zulässigkeitsbereiche vertiefen. Grundlagen sind hier die Bücher von Rockafellar [53] und Stoer, Witzgall [59].
Die Besprechung der Dualitätstheorie ergibt sich hier aus den Alternativsätzen (Lemma von Farkas). Sie erfolgt im fünften Kapitel. Ich ziehe diese Reihenfolge (der auch möglichen umgekehrten) vor, da sie in stärkerem Maße den Übergang von der Linearen Algebra zur Optimierung demonstriert.
Anschließend, im sechsten Kapitel, stellen wir einen auf Probleme mit Ungleichungsrestriktionen zugeschnittenen eigenen Simplexalgorithmus vor, der die Direktbehandlung solcher Probleme ohne Dimensionsaufblähung ermöglicht. Dadurch gewinnt man didaktisch die Möglichkeit der geometrischen Illustration der Zulässigkeitsbereiche bereits im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Dies trägt ganz wesentlich dazu bei, Rechentechnik und Geometrie parallel sehen zu können, und beides wechselseitig zu interpretieren. Dieser sogenannte „restriktionsorientierte“ Algorithmus hat starke Bezüge zum in der Literatur oft erwähnten dualen Algorithmus. Wegen der manchmal verwirrenden Mehrfachverwendung des Begriffes „dual“ in der OR-Terminologie versuchen wir aber generell, diesen oft relativ gebrauchten Begriff so sparsam wie möglich einzusetzen.
Im siebten Kapitel wird das aus der Literatur und Implementation bekannte „variablenorientierte“ Verfahren zur Bearbeitung von Problemen mit Gleichungen und

Vorzeichenbedingungen dargestellt. Außerdem wird gezeigt, dass diese beiden Algorithmusarten essentiell äquivalent sind. Über ihre Auswirkung auf die jeweiligen Problemarten erkennt man innere (zulässige) und äußere (in Unzulässigkeitsbereichen agierende) Algorithmen.
Im achten Kapitel werden Einspar- und Beschleunigungsmöglichkeiten besprochen, wie etwa das revidierte Simplexverfahren in Anlehnung an Chvatal [9]. Außerdem enthält dieses Kapitel Ausführungen über Postoptimierung und Parametrische Optimierung (siehe Murty [41]).
Das neunte Kapitel beschäftigt sich mit Komplexitätsfragen der Linearen Optimierung. Hier spielen die Kodierungslänge und die Größenordnung der Tableaueinträge eine wesentliche Rolle. Danach geht es um die schlimmstmögliche Iterationszahl (Stichwort Klee-Minty-Polyeder, vgl. Klee [33]) und schließlich um die Schrittzahl im Durchschnittsfall (vgl. Borgwardt [5], [6]).
Im zehnten Kapitel steht die Ellipsoid-Methode, ein theoretisch polynomiales, aber praktisch kaum verwendbares Verfahren im Vordergrund. Die Ausführungen orientieren sich an Bland, Goldfarb, Todd [4] und Grötschel, Lovász, Schrijver [22] sowie Gács, Lovász [16].
Schließlich folgt zunächst (in diesem ersten Teil) ein mehr berichtendes Kapitel über den Innere-Punkte-Algorithmus von Karmarkar [32], das auf die theoretisch und praktisch guten Eigenschaften dieser Algorithmen hinweist.
Der zugehörige Komplexitätsnachweis wird mit Hilfe der nichtlinearen Argumentation am Ende des zweiten Teils geführt (Gonzaga [18]). Begleitend dazu findet man dort auch noch eine Darstellung über Pfadfolgende Innere-Punkte-Verfahren (Roos [54]).

Der Gesamtaufbau berücksichtigt auch die Struktur der von 1984 bis 1991 abwechselnd mit M. Grötschel gehaltenen Vorlesungen und sein Skript [20]. Desgleichen habe ich mich orientiert an den Standardwerken von Collatz, Wetterling [10], Dantzig [13], Kall [30] und Schrijver [56].