

ELEMENTE DER MATHEMATIK
VOM HÖHEREN STANDPUNKT AUS

Band VII

Herausgegeben von E. Trost

EINFÜHRUNG IN DIE TRANSFINITE ALGEBRA

von

ANDOR KERTÉSZ

Professor der Mathematik
an der Kossuth-Lajos-Universität Debrecen



Springer Basel AG

**Gemeinschaftsausgabe des Birkhäuser Verlags, Basel und Stuttgart,
des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin,
und des Akadémiai Kiadó, Budapest**

**ISBN 978-3-7643-0735-6 ISBN 978-3-0348-7673-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-0348-7673-5**

© Springer Basel AG 1975

Ursprünglich erschienen bei Akadémiai Kiadó, Budapest 1975.

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus einer sechzehnständigen Vorlesung hervorgegangen, die ich im Jahre 1971 am Mathematischen Institut der Universität zu Jyväskylä in Finnland gehalten habe.

Mit diesem Buch wende ich mich an Studenten der Mathematik, die eine gewisse Fertigkeit und Sicherheit in der Anwendung transfiniten Methoden auf die Untersuchung unendlicher algebraischer Strukturen erwerben möchten. Ich war bestrebt, aus zumeist klassischem Material eine geeignete und abwechslungsreiche Auswahl zu treffen. Obwohl diese Schrift vom Inhalt her dem Spezialisten kaum etwas Neues zu bieten hat, dürfte sie in methodischer Hinsicht an einigen Stellen mehr oder weniger neue Gesichtspunkte enthalten.

Die Lektüre dieses Buches erfordert keine *besonderen* mathematischen Vorkenntnisse, doch setzt sie eine gewisse Vertrautheit mit der abstrakten Algebra und der Mengenlehre sowie vielleicht ein wenig Routine im mathematischen Denken voraus, über die aber ein Student in höheren Semestern verfügt. Die im Rahmen dieses Buches nicht definierten Begriffe kann der Leser in jedem ausführlicheren Lehrbuch der Algebra und der Mengenlehre, z. B. in dem von RÉDEI [1]¹ und HALMOS [1], finden. Das Literaturverzeichnis am Ende dieses Buches soll bei einem vertiefteren Studium helfen.

Mein aufrichtiger Dank gilt den Herren Prof. Dr. G. FODOR und Dr. G. POLLÁK, die das Manuskript dieses Buches sorgfältig durchgelesen und mir durch kritische Bemerkungen geholfen haben. Mein besonderer Dank gilt meinem Freund, Herrn Dr. CARL-GÜNTER D'AMBLY, der den Text des Manuskriptes kritisch geprüft und mich in Fragen des deutschen Stils beraten hat.

Debrecen, 31. Januar 1974

ANDOR KERTÉSZ

¹ Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieses Buches.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Ständige Bezeichnungen	7
I. Einführung	9
II. Vorbereitungen	12
III. Das Auswahlaxiom und seine Äquivalente	18
IV. Erste Anwendungen	24
1. Der Satz von KRULL	24
2. Existenz einer Basis eines Vektorraumes	24
3. Die Cauchysche Funktionalgleichung	25
4. Über die Existenz algebraischer Strukturen auf einer nichtleeren Menge	27
5. Anordnungsfähige abelsche Gruppen und Körper	33
6. Subdirekte Zerlegung von Ringen	37
V. Eine abstrakte Abhängigkeit	42
VI. Anwendungen des Invarianzsatzes von unabhängigen Mengen	46
VII. Anwendungen für Moduln	50
1. Allgemeines über Moduln	50
2. Vollständig reduzible Moduln	53
3. Injektive Moduln	56
VIII. Das Jacobson'sche Radikal eines Ringes	61
IX. Literaturverzeichnis	70
X. Namen- und Sachregister	73

Ständige Bezeichnungen

\emptyset	leere Menge
$\langle x, y, \dots \rangle$	Menge der Elemente x, y, \dots
$A \setminus B$	Differenzmenge
\mathcal{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathfrak{Z}	Ring der ganzen rationalen Zahlen
\mathfrak{K}_0	Körper der rationalen Zahlen
\mathfrak{K}_p	Primkörper der Charakteristik p
\mathfrak{R}	Körper der reellen Zahlen
\oplus, Σ^\oplus	diskrete direkte Summe
$\Sigma^\dot{\oplus}$	komplette direkte Summe