Wissenschaft und Kultur, Band 33

Herbert Pieper

Variationen über ein zahlentheoretisches Thema von Carl Friedrich Gauss

1978
Springer Basel AG

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Pieper, Herbert
Variationen über ein zahlentheoretisches Thema
von Carl Friedrich Gauss. – 1. Aufl. – Basel,
Stuttgart: Birkhäuser, 1978.
(Wissenschaft und Kultur; Bd. 33)
ISBN 978-3-0348-5763-5

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag, Basel 1977
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1977

ISBN 978-3-0348-5763-5 ISBN 978-3-0348-5762-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-0348-5762-8

Geleitwort

Entwicklungsgesetzen der Mathematik an einem ganz konkreten Beispiel nachzuspüren ist der Sinn dieses Buches, das dem 200. Geburtstag von CARL FRIEDRICH GAUSS gewidmet ist. Das Beispiel ist das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste, das GAUSS — wie schon einige seiner Vorgänger — aus einem großen Zahlenmaterial vermutungsweise ablas, aber als erster gleichsam mit Gewalt durch vollständige Induktion verifizierte, ohne damit dem „Wesen" dieser eigenartigen Gesetzmäßigkeit näherzukommen. Die nächsten Stufen der Entwicklung türmte GAUSS über- und nebeneinander mit der Absicht, durch möglichst verschiedenartige Beweismethoden (Gaußsches Lemma, Einordnung in die Gaußsche Theorie der quadratischen Formen und der Kreisteilung), Erweiterung des Themas (kubische und biquadratische Reste) und des Zahlenbereiches (ganze Gaußsche Zahlen) den Weg zu allgemeinen Gesetzmäßigkeiten zu eröffnen. Die Arbeit vieler großer Mathematiker nach GAUSS war nötig, um den Weg bis zu einem Gipfel zu verfolgen: Als allgemeiner Rahmen bildete sich die algebraische Zahlentheorie heraus und darin die Klassenkörpertheorie, die 1927 mit ARTINS allgemeinem Reziprozitätsgesetz ihren Höhepunkt erreichte. Damit war die Gaußsche Vermutung bestätigt, da das quadratische Reziprozitätsgesetz jetzt nur noch als besonders einfacher Spezialfall des Artinschen Reziprozitätsgesetzes erscheint.

Im vollen Umfang konnte diese etwa 130jährige Entwicklung in diesem Buch natürlich nicht dargestellt werden, um so ausführlicher dafür aber die einigermaßen elementaren Teile des Beitrages, den GAUSS als Wegbereiter der Reziprozitätsgesetze geleistet hat, womit er zum Pionier der modernen algebraischen Zahlentheorie geworden ist. Auf jeden Fall aber wird sichtbar, wie sich GAUSS zunächst durch das für andere undurchdringliche Dickicht elementarer Einzelheiten hindurchgefunden hat und dann allmählich zu mehr begrifflichen Methoden vorgedrungen ist. So hat er das heute so genannte strukturelle Denken wesentlich mit vorbereitet.

HANS REICHARDT

Vorwort

Für CARL FRIEDRICH GAUSS war die Mathematik die Königin der Wissenschaften und die Zahlentheorie die Königin der Mathematik.[1]) GAUSS war schon in frühester Jugend in den Bann der Zahlen geraten. Mit Hingabe und großem Fleiß berechnete er umfangreiche zahlentheoretische Tafeln, um daraus (arithmetische) Gesetzmäßigkeiten abzulesen. Sein Ziel waren jedoch nicht diese durch empirische Untersuchungen gefundenen Einzelergebnisse, sondern ihre rein logischen Beweise. Sein Ziel war also, eine allgemeine Theorie für die Einzelergebnisse zu finden.

Hier zeigte sich eine „Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen".[2])

„Nicht leicht möchte die Geschichte eines mathematischen Satzes ein größeres Interesse darbieten, als die des berühmten Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste.[3]) Man weiß, daß alle Bemühungen der größten Mathematiker vor Gauß an dieser steilen Klippe gescheitert sind, bis es endlich diesem Einzigen gelang, den verborgenen Pfad zu entdecken und bis zum Ziele vorzudringen."[4]) Im 18. Lebensjahr entdeckte GAUSS zahlentheoretische Gesetzmäßigkeiten, das Fundamentaltheorem[3]) und seine beiden Ergänzungssätze, die vor ihm schon von FERMAT, EULER, LAGRANGE und LEGENDRE gefunden, deren Resultate der junge GAUSS jedoch nicht kannte. (FERMAT entdeckte die beiden Ergänzungssätze; EULER bewies den ersten, LAGRANGE den zweiten. Der Entdecker des Fundamentaltheorems ist EULER. LEGENDRE entdeckte es noch einmal und bewies es teilweise.) Ein Jahr später gelang GAUSS als erstem auch der strenge Beweis dieser Sätze. Jetzt erst lernte er die Schriften seiner Vorgänger in der Göttinger Universitätsbibliothek kennen.

Während seines Studiums in Göttingen verfaßte GAUSS in den Jahren 1796 bis 1798 sein erstes Buch, die „Disquisitiones arithmeticae" (Arithmetische Untersuchungen; vgl. [12]). „In diesem Buch stellte er zum

---

[1]) W. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN [41], S. 79. (Durch Ziffern in eckigen Klammern wird auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Buches verwiesen.)

[2]) F. KLEIN, Vorbemerkungen zu Gauß' Tagebuch, Gauß-Werke X/1, S. 486 ([18]).

[3]) Es wird ausführlicher im Überblick beschrieben.

[4]) G. EISENSTEIN [9], S. 322.

ersten Mal die Zahlentheorie als eine selbständige systematische Disziplin dar und teilte seine neuesten Ergebnisse mit, die weit über die Arbeiten seiner Vorgänger hinausreichten und bis heute richtungweisend sind. Für mich ist dieses Buch das größte Wunder in der mathematischen Literatur; man muß bedenken, daß Gauß diese 'Bibel der Zahlentheorie' im Alter von 19 bis 21 Jahren geschrieben hat."[1])

Nach dem Erscheinen der „Disquisitiones arithmeticae" im Jahre 1801 wurde dann GAUSS unter den Mathematikern weltberühmt. Die Zahlentheorie wurde „mit einem Schlag zu einer festbegründeten und zusammenhängend dargestellten Wissenschaft. Hier legt ein 24jähriger der wissenschaftlichen Welt ein Meisterwerk an Gründlichkeit systematischen Aufbau und Reichtum von fruchtbringenden Ideen und Anregungen vor. Wie reich dieses Werk darüber hinaus an verborgenen Schätzen war, wurde erst Jahrzehnte später erkannt".[2])

Mit Recht hat GAUSS den erwähnten Satz (der heute meist als Gaußsches quadratisches Reziprozitätsgesetz bezeichnet wird) „das theorema fundamentale der quadratischen Reste genannt, da es nicht nur in ihrer Theorie den eigentlichen Kern ausmacht, sondern auch für weitere Teile der höheren Arithmetik grundlegende Bedeutung hat. Kaum aber hat er schon voraussehen können, wie groß dessen Bedeutung für die ganze Entwicklung der Zahlentheorie werden, wie schon seine eigenen weiteren Beweise des Satzes, ... sodann die ... andern Beweise, welche wir späteren Forschern zu danken haben, mit immer neuen Gesichtspunkten auch neue Richtungen der Forschung herbeiführen".[3])

Bis heute sind weit mehr als einhundertfünfzig Beweise für das Reziprozitätsgesetz gegeben worden[4]). Das Theorem ist heutzutage als Spezialfall einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit der algebraischen Zahlentheorie anzusehen.

Bei den elementaren Beweisen handelt es sich meistens um Varianten der Gaußschen Beweise. In diesem Buch werden fünfzehn verschiedene elementare Beweise dargestellt.

Der Überblick legt die Theorie in allgemeinverständlicher Form (ohne Beweis) dar und führt den Leser auf die Formulierung der Gesetzmäßigkeiten. Außerdem wird dort eine Übersicht darüber gegeben, was in den folgenden Abschnitten zu erwarten ist. Für das Studium der Einführung (in die Theorie), des Themas (des Beweises des Fundamentaltheorems) und der vierzehn Variationen über dieses Thema werden nur wenige Kenntnisse

[1]) H. REICHARDT, Theorie und Praxis im Wirken von Gauß. Spektrum 8, H. 4 (1977), S. 6.

[2]) G. J. RIEGER [39], S. 39.

[3]) P. BACHMANN [2], S. 10.

[4]) Bereits 1963 erschien: The 152nd proof of the law quadratic reciprocity (by M. GERSTENHABER). Amer. Math. Monthly 70 (1963), 397—398.

der elementaren Zahlentheorie vorausgesetzt, die jedoch im Anhang aufgeschrieben sind (wo man bei Bedarf nachschlagen kann).

Dieses Buch bietet nicht nur eine Einführung in die Gedankenwelt der Zahlentheorie, sondern es soll dem Leser auch eine konkrete Vorstellung von den mathematischen Leistungen von GAUSS vermitteln, wie dieser die verschiedenen Methoden ersann, um ein mathematisches — in diesem Fall zahlentheoretisches — Problem zu bewältigen und von verschiedenen Seiten zu beleuchten. (Bis auf den ersten der Gaußschen Beweise sind die gegebenen Beweise, auch wenn sie auf GAUSS zurückgehen, jedoch bereits vereinfacht und nicht in der ursprünglichen Gaußschen Art dargestellt.)

Dieses Buch ist als ein kleiner Beitrag zum Jubiläum des 200. Geburtstages von GAUSS gedacht, wo Leben und Leistung von GAUSS allgemein gewürdigt werden; es möchte einem breiteren Leserkreis eine konkrete Würdigung der (hier zahlentheoretischen) Leistungen von GAUSS ermöglichen.

Ich bedanke mich herzlich bei allen, deren Mitwirkung das Erscheinen des Buches ermöglicht hat. Insbesondere gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. H. REICHARDT und Herrn Dr. R. BÖLLING für Hinweise und Verbesserungen sowie Frau Dipl.-Math. B. MAI und Fräulein Dipl.-Math. G. REIHER vom VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für ihre vorbildliche Arbeit am Manuskript und bei der Korrektur, aber auch den Mitarbeitern der Druckerei für ihre sorgfältige Arbeit.

Berlin, April 1977 HERBERT PIEPER

Inhalt