

A. Speiser  
Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung

Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften  
Mathematische Reihe Band 22

# Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung

mit Anwendungen  
auf algebraische Zahlen und Gleichungen  
sowie auf die Kristallographie

Andreas Speiser  
vorm. Professor der Mathematik an der Universität Basel

Fünfte, unveränderte Auflage

1980  
Springer Basel AG



CIP-Kurztitelaufnahme  
der Deutschen Bibliothek

**Speiser, Andreas:**

Die Theorie der Gruppen von endlicher  
Ordnung: mit Anwendungen auf algebraische  
Zahlen u. Gleichungen sowie auf d. Kristal-  
lographie / Andreas Speiser. – 5., unveränd.  
Aufl. – Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser,  
1980. (Lehrbücher und Monographien aus dem  
Gebiete der exakten Wissenschaften: Math.  
Reihe: Bd. 22)  
ISBN 978-3-0348-5387-3

Die vorliegende Publikation ist urheberrechtlich  
geschützt. Alle Rechte, insbesondere das der  
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche  
Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form –  
durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere  
Verfahren – reproduziert oder in eine von  
Maschinen, insbesondere Datenverarbeitungs-  
anlagen, verwendbare Sprache übertragen  
werden.

© Springer Basel AG 1956, 1980

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag Basel 1980  
Softcover reprint of the hardcover 5th edition 1980

ISBN 978-3-0348-5387-3 ISBN 978-3-0348-5386-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-0348-5386-6

## VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

In ihren elementaren Teilen besteht die Gruppentheorie aus einer Reihe vielleicht nicht immer völlig organisch zusammenhängender Methoden und Begriffe, und die Gliederung des Stoffes ist hier schon in hohem Maße festgelegt. Wem unsere Darstellung etwas knapp erscheint, den verweisen wir zur Ergänzung auf die ausgezeichneten und ausführlichen Darstellungen von *Weber* (Algebra, Bd. 2) und von *Netto* (Gruppen- und Substitutionstheorie, Leipzig 1908). Beim Studium dieser Anfangsteile braucht man sich keineswegs streng an die Reihenfolge der Paragraphen zu halten, sondern im allgemeinen werden die ersten Paragraphen der einzelnen Kapitel leicht verständlich sein, die späteren dagegen wesentlich schwerer.

Erst mit der Theorie der Substitutionsgruppen setzt eine weittragende und systematische Theorie ein, die, wie wir am Schluß zu zeigen versuchen, noch lange nicht ausgeschöpft ist. Sie kommt im Grunde auf eine zahlentheoretische Behandlungsweise heraus, deren Terminologie (Produkt, Multiplizieren usw.) ja bereits von Anfang an erscheint.

Entsprechend dem Plane dieser Sammlung von Einzeldarstellungen wurde den Anwendungen besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Neben mannigfaltigen algebraischen und zahlentheoretischen Sätzen kommt hier in erster Linie die Krystallographie in Betracht. Diese besitzt ja gegenüber allen anderen Fällen des Gelingens mathematischer Naturbeschreibung den Vorzug größter begrifflicher Einfachheit und strengster arithmetischer Präzision.

Bei der Durchsicht der Korrekturen haben mich die Herren Prof. Dr. *R. Courant*, Prof. Dr. *R. Fueter* und Prof. Dr. *G. Pólya* unterstützt und auf manche Verbesserungen hingewiesen, wofür ihnen hier aufs beste gedankt sei.

Mein Dank gilt ferner meiner Frau, die mir bei der Herstellung des Manuskriptes geholfen hat.

Zürich, im Dezember 1922.

*A. Speiser*

## VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

In dieser zweiten Auflage sind die Kapitel über *Abelsche* Gruppen und die einleitenden Abschnitte über die Substitutionsgruppen ausführlicher gestaltet worden. Bei der großen Bedeutung, welche die Gruppentheorie in der Krystallographie gewinnt, schien es mir erwünscht, auch das entsprechende Problem der Ebenensymmetrien darzustellen. Dabei gewährte ich, dass diese Probleme schon von den Ägyptern in ihrer Ornamentik gelöst worden sind. Die Folgerungen für die Geschichte der Mathematik habe ich in einem einleitenden Abschnitt angedeutet. Ein weiterer einleitender Aufsatz behandelt die Ableitung der Gruppen aus Gruppoiden, ein Problem, das wahrscheinlich an einzelnen Fällen auch schon im Altertum, mit der dialektischen Methode, behandelt worden ist.

Die Lektüre dieses Buches kann ebensogut mit dem 6. oder 8. Kapitel als mit dem ersten begonnen werden. Die Aufsuchung sämtlicher Symmetrien eines Ornamentes kann als beste Einführung in den Gruppenbegriff empfohlen werden, sie wird als methodisches Hilfsmittel auch von den Krystallographen angewandt.

Auch sonst hat der Text im einzelnen manche Änderungen erfahren, besonders durch die wertvolle Hilfe, welche mir von verschiedenen Kollegen zuteil geworden ist. Den ersten Teil, bis zu den Substitutionsgruppen, hat Herr Privatdozent Dr. *Bessel-Hagen* einer eingehenden Revision unterzogen, von deren Resultaten ich ausgiebig Gebrauch gemacht habe. Für die Substitutionsgruppen verdanke ich vor allem Herrn Prof. Dr. *Fueter* wichtige Hinweise. Beide Herren sowie Herr *J. J. Burckhardt* haben mich bei der Durchsicht der Korrekturen unterstützt, manche weitere Fachgenossen haben mir ihre Bemerkungen mitgeteilt. Ihnen allen spreche ich auch an dieser Stelle meinen Dank aus, ebenso der Verlagsbuchhandlung *Julius Springer* für ihr großes Entgegenkommen bei der Drucklegung.

Zürich, im August 1927.

*A. Speiser*

## VORWORT ZUR DRITTEN AUFLAGE

Auch für diese dritte Auflage ist mir von verschiedenen Kollegen wertvolle Hilfe zuteil geworden. Ich möchte vor allem Herrn *K. Witt* nennen, der mich in Zürich besuchte und mir vieles mitgeteilt hat, das ich verwerten konnte; außer dem im Text Erwähnten nenne ich noch besonders die schönen Untersuchungen von *Hall*. Die neuere Entwicklung der Physik legte es nahe, die Lehre von den symmetrischen Gruppen ausführlicher darzustellen, ferner fügte ich, ebenfalls von dieser Seite angeregt, einen Abschnitt über die algebraischen In- und Kovarianten hinzu, hoffend, daß auf diesem Wege diese etwas in den Hintergrund getretene Theorie wieder zu Ehren kommt.

Für die Korrektur wurde ich von Herrn Dr. *E. Trost* wesentlich unterstützt. Den beiden genannten Herren sowie der Verlagsbuchhandlung *Julius Springer* spreche ich meinen besten Dank aus.

Zürich, im September 1937.

*A. Speiser*

## VORWORT ZUR VIERTEN AUFLAGE

Von der dritten Auflage wurde durch der Dover Verlag in New York ein unveränderter Abdruck hergestellt. Die vorliegende vierte Auflage wurde an einigen Stellen korrigiert, ferner wurde in einem Anhang die Herstellung von Gruppenbildern erörtert und der Unterschied zwischen der funktionentheoretischen Auffassung und der Substitution erörtert. Dem Birkhäuser Verlag danke ich für die Herstellung der neuen Auflage und namentlich für die Hinzufügung des farbigen Titelbildes, das dieser Neuauflage zu besonderer Zierde gereicht.\*

Basel, im Juni 1955

*A. Speiser*

\* Diese Farbtafel wurde in der 5. Auflage weggelassen.

## INHALTSVERZEICHNIS

### *Einleitung.*

I. Zur Vorgeschichte der Gruppentheorie . . . . .	1
II. Ableitung des Gruppenbegriffs aus den Permutationen . . . . .	4

### 1. Kapitel.

#### *Die Grundlagen.*

§ 1. Die Postulate des Gruppenbegriffs . . . . .	10
§ 2. Die Gruppentafel . . . . .	12
§ 3. Untergruppen . . . . .	14
§ 4. Zyklische Gruppen . . . . .	16
§ 5. Beispiele von Gruppen . . . . .	20
§ 6. Elementenkomplexe . . . . .	25

### 2. Kapitel.

#### *Normalteiler und Faktorgruppen.*

§ 7. Normalteiler . . . . .	28
§ 8. Faktorgruppen . . . . .	31
§ 9. Isomorphe Gruppen. . . . .	33
§ 10. Der Hauptsatz über Normalteiler . . . . .	35
§ 11. Kompositionsreihen . . . . .	38
§ 12. Hauptreihen . . . . .	40
§ 13. Kommutatorgruppen . . . . .	43
§ 14. Ein Theorem von Frobenius . . . . .	44

### 3. Kapitel.

#### *Abelsche Gruppen.*

§ 15. Basis einer Abelschen Gruppe . . . . .	46
§ 16. Die Invarianten einer Abelschen Gruppe. . . . .	50
§ 17. Untergruppen und Faktorgruppen einer Abelschen Gruppe. . . . .	52
§ 18. Die Galoisfelder und Reste nach Primzahlpotenzen . . . . .	54
§ 19. Existenz der Galoisfelder . . . . .	57

### 4. Kapitel.

#### *Konjugierte Untergruppen.*

§ 20. Normalisatoren . . . . .	61
§ 21. Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen . . . . .	62

### 5. Kapitel.

#### *Sylowgruppen und $p$ -Gruppen.*

§ 22. Sylowgruppen . . . . .	64
§ 23. Normalisatoren der Sylowgruppen . . . . .	66



§ 24. Gruppen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist . . . . .	69
§ 25. Spezielle $p$ -Gruppen . . . . .	71

## 6. Kapitel.

*Symmetrien der Ornamente.*

§ 26. Vorbemerkungen . . . . .	76
§ 27. Die ebenen Gitter . . . . .	76
§ 28. Die Streifenornamente . . . . .	80
§ 29. Die Flächenornamente . . . . .	85
§ 30. Beispiele von Flächenornamenten . . . . .	91
§ 31. Die Bewegungsgruppen der Ebene mit endlichem Fundamentalebenebereich . . . . .	95

## 7. Kapitel.

*Die Krystallklassen.*

§ 32. Die Raumgitter . . . . .	98
§ 33. Die Krystallklassen . . . . .	102

## 8. Kapitel.

*Permutationsgruppen.*

§ 34. Zerlegung der Permutationen in Zyklen . . . . .	105
§ 35. Die symmetrische und alternierende Permutationsgruppe . . . . .	108
§ 36. Transitiv und intransitiv Permutationsgruppen . . . . .	110
§ 37. Darstellung von Gruppen durch Permutationen . . . . .	112
§ 38. Primitive und imprimitive Permutationsgruppen . . . . .	115
§ 39. Die Charaktere einer Permutationsgruppe . . . . .	118

## 9. Kapitel.

*Automorphismen.*

§ 40. Automorphismen einer Gruppe . . . . .	119
§ 41. Charakteristische Untergruppen einer Gruppe . . . . .	124
§ 42. Vollständige Gruppen . . . . .	125
§ 43. Automorphismen Abelscher Gruppen . . . . .	127
§ 44. Zerlegbare Gruppen . . . . .	132

## 10. Kapitel.

*Monomiale Gruppen.*

§ 45. Monomiale Gruppen . . . . .	136
§ 46. Herstellung sämtlicher monomialer Gruppen . . . . .	139
§ 47. Ein Satz von Burnside . . . . .	140

## 11. Kapitel.

*Darstellung der Gruppen durch lineare homogene Substitutionen.*

§ 48. Substitutionen . . . . .	144
§ 49. Substitutionsgruppen . . . . .	148
§ 50. Orthogonale und unitäre Substitutionsgruppen . . . . .	151
§ 51. Reduzible und irreduzible Substitutionsgruppen . . . . .	156
§ 52. Die Konstruktion sämtlicher invarianter Linearformen . . . . .	159
§ 53. Die Fundamentalrelationen der Koeffizienten irreduzibler Substitutionsgruppen . . . . .	161

12. Kapitel.

*Gruppencharaktere.*

§ 54. Äquivalenz von Substitutionsgruppen . . . . .	166
§ 55. Weitere Relationen zwischen den Gruppencharakteren . . . . .	168
§ 56. Die reguläre Darstellung einer Gruppe. . . . .	170
§ 57. Übersicht . . . . .	172
§ 58. Vollständige Reduktion der regulären Permutationsgruppe. . . . .	175
§ 59. Einige Beispiele für die Darstellung von Gruppen . . . . .	179
§ 60. Beziehungen zu den Algebren . . . . .	187
§ 61. Die Charaktere und Darstellungen der symmetrischen Gruppen . . . . .	189

13. Kapitel.

*Anwendungen der Theorie der Gruppencharaktere.*

§ 62. Ein Satz von Burnside über einfache Gruppen . . . . .	193
§ 63. Primitive und imprimitive Substitutionsgruppen . . . . .	194
§ 64. Vollständige Reduktion imprimitiver Gruppen . . . . .	198
§ 65. Ein Satz von Frobenius über transitive Permutationsgruppen . . . . .	202

14. Kapitel.

*Arithmetische Untersuchungen über Substitutionsgruppen.*

§ 66. Beschränkung auf algebraische Zahlkörper . . . . .	204
§ 67. Gruppen im Körper der rationalen Zahlen . . . . .	207
§ 68. Beziehungen zur Krystallographie . . . . .	211

15. Kapitel.

*Gruppen von gegebenem Grade.*

§ 69. Die endlichen Substitutionsgruppen vom Grade $n$ . . . . .	214
§ 70. Der Satz von Jordan . . . . .	216
§ 71. Substitutionen in Galoisfeldern. . . . .	221
§ 72. Raumgruppen . . . . .	226

16. Kapitel.

*Die allgemeinen linearen homogenen Substitutionen  
und ihre Invarianten und Kovarianten.*

§ 73. Substitutionen zweiten Grades . . . . .	230
§ 74. Substitutionen höheren Grades . . . . .	237

17. Kapitel.

*Gleichungstheorie.*

§ 75. Die Lagrangesche Gleichungstheorie. . . . .	240
§ 76. Die Galoissche Gleichungstheorie . . . . .	243
§ 77. Anwendungen der allgemeinen Gruppentheorie . . . . .	248
§ 78. Die Kleinsche Gleichungstheorie . . . . .	250

Schluß . . . . .	256
Anhang . . . . .	258
Namenverzeichnis . . . . .	267
Sachverzeichnis . . . . .	269