

---

# Mathematik Kompakt

# Mathematik Kompakt

*Herausgegeben von:*

Martin Brokate

Karl-Heinz Hoffmann

Götz Kersting

Kristina Reiss

Otmar Scherzer

Gernot Stroth

Emo Welzl

Die Lehrbuchreihe *Mathematik Kompakt* ist eine Reaktion auf die Umstellung der Diplomstudiengänge in Mathematik zu Bachelor- und Masterabschlüssen.

Inhaltlich werden unter Berücksichtigung der neuen Studienstrukturen die aktuellen Entwicklungen des Faches aufgegriffen und kompakt dargestellt.

Die modular aufgebaute Reihe richtet sich an Dozenten und ihre Studierenden in Bachelor- und Masterstudiengängen und alle, die einen kompakten Einstieg in aktuelle Themenfelder der Mathematik suchen.

Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben stehen zur Verfügung, um die Anwendung der Inhalte zu veranschaulichen.

- **Kompakt:** relevantes Wissen auf 150 Seiten
- **Lernen leicht gemacht:** Beispiele und Übungsaufgaben veranschaulichen die Anwendung der Inhalte
- **Praktisch für Dozenten:** jeder Band dient als Vorlage für eine 2-stündige Lehrveranstaltung

---

Folkmar Bornemann

# Funktionentheorie

2. Auflage

 Birkhäuser

Folkmar Bornemann  
Technische Universität München  
München, Deutschland

Mathematik Kompakt  
ISBN 978-3-0348-0973-3  
DOI 10.1007/978-3-0348-0974-0

ISBN 978-3-0348-0974-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 30-01

Birkhäuser

© Springer International Publishing AG, CH 2013, 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

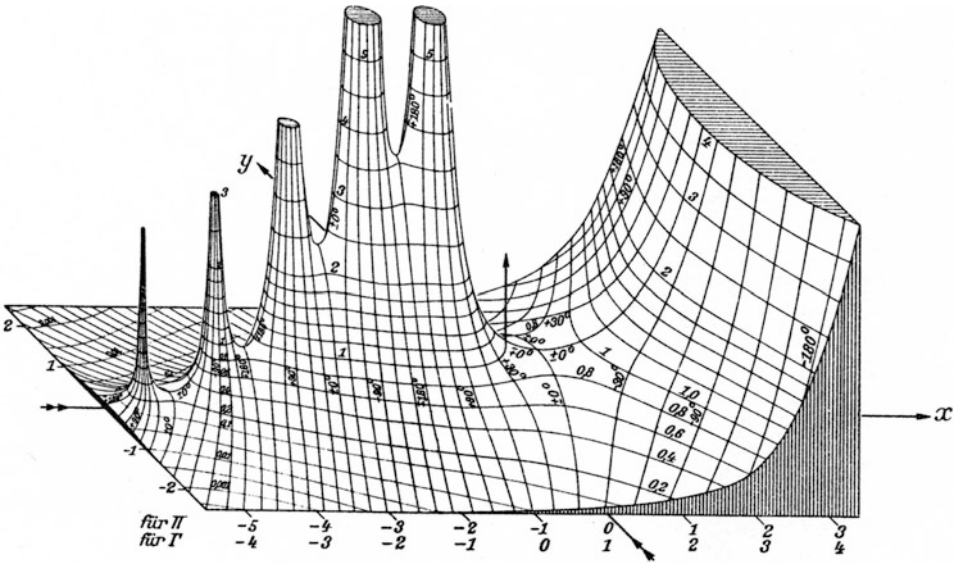
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Birkhäuser ist part of Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer International Publishing AG Switzerland

([www.birkhaeuser-science.com](http://www.birkhaeuser-science.com))



Analytische Landschaft der Gammafunktion (Jahnke und Emde 1933)

---

## Vorwort

Die Theorie der holomorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen gehört zu den *Klassikern* des Curriculums, exemplarisch in Nützlichkeit und Eleganz. Leider wird sie in manchen mathematischen Studiengängen, nicht zuletzt durch den [Bologna-Prozess](#), zugunsten „modernerer“ Stoffes an den Rand gedrängt, so dass funktionentheoretische Methoden von Studierenden der Physik und Elektrotechnik heute zuweilen besser beherrscht werden als von solchen der Mathematik.

Letzterem möchte ich entgegenwirken und versuchen, auf knappem Raum nachhaltig für die Funktionentheorie und ihre methodische Kraft zu werben. Ich kann der überwältigenden Fülle exzellenter Lehrbücher zwar kaum Wesentliches hinzufügen, dafür aber die Stoffauswahl zeitgemäß und möglichst ökonomisch für die typischen Bedarfe einer zweistündigen Vorlesung im zweiten Studienjahr und eines anschließenden Seminars kompilieren: „Die größte Schwierigkeit bei der Planung eines Lehrbuches der Funktionentheorie liegt in der Auswahl des Stoffes. Man muß sich von vornherein entschließen, alle Fragen wegzulassen, deren Darstellung zu große Vorbereitungen verlangt.“ So schrieb es 1950 der berühmte Münchener Mathematiker [Constantin Carathéodory](#) [12] im Vorwort seines rund 300-seitigen Lehrbuches.

Mein Motto war dabei: „Funktionentheorie spart Rechnungen“. Begriffliche Beweise werden solchen mit elementaren, aber aufwändigen Rechnungen vorgezogen; der Fokus liegt dabei auf Ideen und Konzepten, kein Beweis ist länger als eine Seite. Die globale Theorie wird mit [Homologie](#) statt [Homotopie](#) begründet; die Beweise sind hier durchsichtiger und die Voraussetzungen in der Praxis einfacher zu überprüfen. Ich benutze nur ein Minimum der aus der Analysis bekannten topologischen Konzepte: offene, abgeschlossene und kompakte Mengen; Wege sind stets stückweise stetig-differenzierbar; Jordan-Kurven bleiben außen vor. Abbildungseigenschaften werden betont; Visualisierung und Computereinsatz gestreift. So bleibt auch etwas Platz für zusätzliche Anwendungen, wie die [Singularitätenanalyse](#) erzeugender Funktionen.

Die zweite Auflage enthält neben Korrekturen, Ergänzungen und weiteren Aufgaben jetzt auch weiterführendes Material aus dem Umfeld der „elementaren“ Beweise der Picard'schen Sätze. Hierfür habe ich Abschn. [7.3](#) über ganze Funktionen endlicher Ordnung und Kap. [8](#) über die Theorie normaler Familien (auf Grundlage des extrem effektiven Reskalierungslemmas von Lawrence Zalcman) aufgenommen.

Mein Dank gilt Christian Ludwig (TU München) für die kenntnisreiche, geschmackvolle Gestaltung der Abbildungen und [Bob Burckel](#) (Kansas) für die detailgenaue, kritische Lektüre des gesamten Buches.

München, im Februar 2016

Folkmar Bornemann

---

## Laboratorium der Mathematik

Zur Begleitung der Lektüre empfehle ich, sich mit Hilfe von Computer und Bibliothek ein Laboratorium aus folgenden Werkzeugen einzurichten:

**Werkzeug 1: Rechenknecht** Ich werde mich auf Ideen und Konzepte konzentrieren und daher nicht lange mit Rechnungen aufhalten, die aufgrund ihrer rein handwerklichen Natur auch von einem „Rechenknecht“ übernommen werden könnten. Hierfür eignen sich [Computeralgebrasysteme](#) wie Maple oder Mathematica; zu letzterem gibt es über [Wolfram Alpha](#) einen freien „einzeiligen“ Zugang im Internet. Um es gleich einmal auszuprobieren, hier eine kleine Aufgabe: Berechne die Umkehrfunktion von

$$z \mapsto \frac{a+z}{bz-1} \quad (1)$$

(es ist eine *Involution*) und zerlege  $\sin(x+iy)$  in Real- und Imaginärteil.

**Werkzeug 2: Formelsammlung** Im Mai 2010 erschien nach über zehnjähriger Arbeit unter der Leitung des damals 85-jährigen [Frank Olver](#) das 1000-seitige und drei Kilogramm schwere *NIST Handbook of Mathematical Functions* [26]. Das US-amerikanische National Institute of Standards and Technology (NIST) hat eine freie Version (DLMF) dieser umfangreichen Formelsammlung mit zusätzlichen Features ins Internet gestellt: So gibt es drehbare dreidimensionale Visualisierungen komplexer Funktionen (z. B. der [Sinusfunktion](#)) oder eine Suchfunktion nach Formeln (z. B. Ungleichungen der Form  $\sin? \leq ?$ ).

**Werkzeug 3: Lehrbuch X** Um sich den Stoff zusätzlich aus einer weiteren Perspektive zeigen zu lassen, sollte ein zum eigenen Lernstil passendes Werk stets in Griffweite liegen. Gute Beispiele finden sich im [Literaturverzeichnis](#): Neben dem unvergleichlichen Klassiker von [Ahlfors](#) [2] gibt es knappe Darstellungen ([Jänich](#) [18], [Fischer/Lieb](#) [15], [Sarason](#) [30], Kapitel 10–14 im [Rudin](#) [29]), ausführliche mit unterschiedlichen Schwerpunkten (historische Ausführungen bei [Remmert/Schumacher](#) [27], Beispiele bei [Lang](#) [21] und [Bak/Newman](#) [5], Anwendungen bei [Ablowitz/Fokas](#) [1]) und solche mit Besonderheiten (Computereinsatz bei [Forst/Hoffmann](#) [14], viel Geometrie bei [Needham](#) [25], Phasenportraits bei [Wegert](#) [36], Aufgaben bei [Shakarchi](#) [32] oder [Alpay](#) [3]).

Bei Interesse für die Geschichte der Funktionentheorie empfehle ich neben dem Lehrbuch von Remmert und Schumacher den Überblick von [Stillwell](#) [34], die historische Studien von [Bottazzini](#) [10], [Smithies](#) [33] und [Verley](#) [35] oder, erst kürzlich erschienen, die maßgebliche, umfassende Darstellung von [Bottazzini/Gray](#) [11].



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Holomorphe Funktionen</b>	1
1.1	Leitmotive	1
1.2	Prélude historique	1
1.3	Komplexe Zahlen	4
1.4	Differenzierbarkeit	5
1.5	Potenzreihen	6
1.6	Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen	8
1.7	Visualisierung	10
1.8	Aufgaben	17
<b>2</b>	<b>Lokale Cauchy'sche Theorie</b>	21
2.1	Wegintegrale	21
2.2	Stammfunktionen	24
2.3	Lokaler Integralsatz	26
2.4	Ketten, Zyklen und Zerlegungen	29
2.5	Integralformeln	31
2.6	Aufgaben	34
<b>3</b>	<b>Fundamentalsätze</b>	37
3.1	Permanenzprinzip	37
3.2	Abschätzungen	40
3.3	Lokal-gleichmäßige Konvergenz	41
3.4	Gebietstreue	44
3.5	Isolierte Singularitäten	45
3.6	Aufgaben	49
<b>4</b>	<b>Potenzreihen in Aktion</b>	53
4.1	Potenzreihenalkül	53
4.2	Inversion von Potenzreihen	55
4.3	Asymptotik von Taylorkoeffizienten	58
4.4	Aufgaben	59

<b>5</b>	<b>Globale Cauchy'sche Theorie</b> . . . . .	63
	5.1 Argument und Index . . . . .	63
	5.2 Homologische Fassung des Integralsatzes . . . . .	67
	5.3 Laurententwicklung . . . . .	70
	5.4 Residuensatz . . . . .	73
	5.5 Anzahl von Null- und Polstellen . . . . .	74
	5.6 Einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	77
	5.7 Aufgaben . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Residuenkalkül in Aktion</b> . . . . .	87
	6.1 Bestimmte Integrale . . . . .	88
	6.2 Anwendung: Gammafunktion . . . . .	91
	6.3 Unendliche Reihen . . . . .	93
	6.4 Aufgaben . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Biholomorphe Abbildungen</b> . . . . .	101
	7.1 Möbiustransformationen . . . . .	101
	7.2 Automorphismengruppe des Einheitskreises . . . . .	105
	7.3 Lösbarkeit transzendenter Gleichungen . . . . .	108
	7.4 Biholomorphiekriterien . . . . .	111
	7.5 Anwendung: Žukovskij-Transformation . . . . .	114
	7.6 Riemann'scher Abbildungssatz . . . . .	116
	7.7 Aufgaben . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Normale Familien</b> . . . . .	123
	8.1 Sphärische Ableitung . . . . .	124
	8.2 Reskalierung . . . . .	127
	8.3 Fundamentalkriterium . . . . .	130
	8.4 Bloch'sches Prinzip . . . . .	135
	8.5 Der große Satz von Picard . . . . .	137
	8.6 Aufgaben . . . . .	140
	<b>Notation</b> . . . . .	143
	<b>Literatur</b> . . . . .	145
	<b>Index</b> . . . . .	147