

Mathematik Kompakt

Herausgegeben von:

Martin Brokate
Karl-Heinz Hoffmann
Götz Kersting
Otmar Scherzer
Gernot Stroth
Emo Welzl

Die neu konzipierte Lehrbuchreihe *Mathematik Kompakt* ist eine Reaktion auf die Umstellung der Diplomstudiengänge in Mathematik zu Bachelor- und Masterabschlüssen. Ähnlich wie die neuen Studiengänge selbst ist die Reihe modular aufgebaut und als Unterstützung der Dozierenden sowie als Material zum Selbststudium für Studierende gedacht. Der Umfang eines Bandes orientiert sich an der möglichen Stofffülle einer Vorlesung von zwei Semesterwochenstunden. Der Inhalt greift neue Entwicklungen des Faches auf und bezieht auch die Möglichkeiten der neuen Medien mit ein. Viele anwendungsrelevante Beispiele geben den Benutzern Übungsmöglichkeiten. Zusätzlich betont die Reihe Bezüge der Einzeldisziplinen untereinander.

Mit *Mathematik Kompakt* entsteht eine Reihe, die die neuen Studienstrukturen berücksichtigt und für Dozierende und Studierende ein breites Spektrum an Wahlmöglichkeiten bereitstellt.

Analysis II

Christiane Tretter

Christiane Tretter
Universität Bern
Mathematisches Institut
Bern, Schweiz

ISBN 978-3-0348-0475-2

ISBN 978-3-0348-0476-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-0348-0476-9

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

2010 Mathematical Subject Classification: 97Ixx

© Springer Basel AG 2013

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechts.

Satz und Layout: Protago- \TeX -Production GmbH, Berlin, www.ptp-berlin.eu
Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Springer Basel AG ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

www.birkhauser-science.com

Vorwort

*Man muss das Unmögliche versuchen,
um das Mögliche zu erreichen.*

H. Hesse

Dieses Buch ist der zweite Band einer Einführung in die Analysis, die ein möglichst breites, aber dennoch kompaktes Fundament für weiterführende Vorlesungen bieten soll und den kanonischen Stoff einer zweisemestrigen Analysis-Vorlesung abdeckt. Den ersten und schwierigsten Schritt beim Bau dieses Fundaments haben Sie bereits geschafft, als Sie sich in der „Analysis I“ in die zu Anfang ungewohnte mathematische Denk- und Sprechweise eingearbeitet haben!

In diesem zweiten Band bauen wir nun auf das Fundament des ersten Semesters auf und festigen dieses gleichzeitig. Viele Definitionen und Sätze aus „Analysis II“ haben wir in Spezialfällen schon in „Analysis I“ [32] kennengelernt. Das Buch gibt jeweils Hinweise auf diese Zusammenhänge, die zur Rückschau einladen und zu einem besseren Verständnis auch des Stoffs der „Analysis I“ helfen.

Wie schon der erste Band, soll auch das vorliegende Buch Studierenden und Dozierenden unter den veränderten Studienbedingungen des Bachelorsystems eine direkte Vorlesungsvorlage zur Verfügung stellen. So umfasst auch die „Analysis II“ nicht mehr und nicht weniger als den Stoff, der in einer vierstündigen Vorlesung bei einer Semesterdauer von 14 Wochen an der Tafel vorgetragen werden kann. Praktisch erprobt wurde dies in insgesamt vier Vorlesungen „Analysis II“ (mit doppelt so vielen Klausuren) innerhalb von zehn Jahren, davon eine an der Universität Bremen und drei an der Universität Bern, mit Hörern aus Mathematik (mit den unterschiedlichsten Nebenfächern), Physik und Informatik.

Neu in diesem zweiten Band ist ein kurzer Abschnitt mit Tipps zur Prüfungsvorbereitung, die ich auf der Grundlage meiner langjährigen Erfahrung als Prüferin mit ganz verschiedenen Studierenden sowie meiner eigenen Erfahrungen als Studentin zusammengestellt habe. Unabhängig davon ist auch das Buch von E. Emmrich und C. Trunk [9] mit dem Titel „*Gut vorbereitet in die erste Mathematiklausur*“ sehr zu empfehlen, das viele Beispiele von typischen Klausuraufgaben und Musterklausuren mit Lösungen enthält.

Es würde mich freuen, wenn dieses Buch Ihnen nicht nur helfen würde, das zweite Semester und die anstehenden Prüfungen erfolgreich zu bestehen, sondern auch Ihr Interesse für mehr Analysis wecken würde. So wie ich als Autorin können auch Sie von der vielfältigen Auswahl an Analysis-Büchern und den fast unbegrenzten Suchmöglichkeiten im Internet profitieren. An einigen Stellen werden konkrete Literaturhinweise gegeben, ansonsten finden sich, wie bei einem Lehrbuch hoffentlich erlaubt, alle be-

nutzten Materialien global im Literaturverzeichnis. Die historischen Fußnoten sind, wie schon im ersten Band, mit Informationen aus der Online-Datenbank [24] und dem Buch von T. Sonar [30] entstanden.

Parallel und weiterführend zu diesem Buch sind die Bücher von O. Forster [13], K. Königsberger [23], H. Amann und J. Escher [2], H. Heuser [16], W. Kaballo [20], W. Walter [34] und D. Werner [35] zu empfehlen; einzelne Themen wie z. B. Fourierreihen finden sich auch in den ersten Bänden von O. Forster [12], W. Kaballo [19] und K. Königsberger [22]. Für Studierende, die sich schwer mit dem Abstrakten tun, hat sich das Buch von H. Neunzert et al. [27] bewährt. Für Neugierige oder für später eignet sich, außer den schon im ersten Band empfohlenen fortgeschrittenen Büchern von W. Rudin [28] und G. Shilov [29], auch das von E. Hewitt und K. Stromberg [18]. Für Studierende der Physik sind die Bücher H. Fischer und H. Kaul [11] sowie von K. Meyberg und P. Vachenaue [25, 26] eine gute Ergänzung, da sie verschiedene Gebiete der Mathematik gleichzeitig präsentieren und auch fortgeschrittenere Themen wie partielle Differentialgleichungen oder Fouriertransformation behandeln.

Erwähnen möchte ich auch das mit neun Bänden [8] wohl umfassendste Werk über Analysis von J. Dieudonné¹, über das J. Kelly schrieb „*In brief, it is a beautiful text*“.

Auch dieser zweite Band hätte nicht entstehen können ohne die großartige und fortwährende Unterstützung meiner jeweiligen Mitarbeiter und Studenten: Parallel zur Vorlesung in Bremen hat Dr. Dipl. Psych. Ingo Fründ (damals Hörer der Vorlesung) die Vorlesungsaufzeichnungen in Latex gesetzt. Mein damaliger Doktorand in Bremen, Dr. Markus Wagenhofer, hat das Skript redigiert und weiter ausgefeilt. In Bern hat meine Postdoktorandin Dr. Monika Winklmeier das Skript stetig in eine immer endgültigere Form gebracht. Beiden danke ich neben ihrem großen Engagement auch für viele professionelle Abbildungen, die den Stoff hoffentlich verständlicher machen. Für die Mithilfe bei Kapitel 11 über Differentialgleichungen geht mein Dank an meinen damaligen Doktoranden Dr. Christian Wyss. Darüber hinaus haben die Studierenden aus Bremen und Bern mit diversen Listen von Tippfehlern geholfen, selbige auf ein hoffentlich kleines Maß zu reduzieren (ganz wird es wohl nie gelingen!). Schließlich hat meine derzeitige Postdoktorandin Dr. Agnes Radl dieses Buchmanuskript mit großem Sachverstand Korrektur gelesen. Bei allen Beteiligten bedanke ich mich auch für wertvolle inhaltliche Diskussionen!

Mein ganz besonderer Dank gilt auch dem Herausbergremium der Reihe „Mathematik Kompakt“ und Birkhäuser/Springer Basel, vor allem Frau Dr. Barbara Hellriegel und Herrn Dr. Thomas Hempfling, für das Vertrauen, das Sie alle in mich gesetzt haben, und für die professionelle verlegerische Unterstützung!

Bern, 07. Juni 2012

Christiane Tretter

¹JEAN DIEUDONNÉ, * 1. Juli 1906 in Lille, † 29. November 1992 in Paris, französischer Mathematiker, der außer in Analysis auch in Algebraischer Geometrie, Topologie und Gruppentheorie arbeitete und die Gruppe *Bourbaki* mitbegründete.

Inhaltsverzeichnis

I	Topologische Grundbegriffe	1
1	Topologie metrischer Räume	1
2	Kompaktheit	11
3	Zusammenhang	18
	Aufgaben	23
II	Differentialrechnung in \mathbb{R}^n	25
4	Stetige lineare Abbildungen	25
5	Differenzierbarkeit	29
6	Partielle Ableitungen	34
7	Rechenregeln	43
8	Mittelwertsatz und Satz von Taylor	47
9	Lokale Extrema	57
	Aufgaben	62
III	Der Satz über implizite Funktionen	65
10	Die Ableitung der Umkehrfunktion	65
11	Der Satz über implizite Funktionen	74
12	Parameterabhängige Integrale	82
	Aufgaben	86
IV	Gewöhnliche Differentialgleichungen	89
13	Beispiele und Einführung	89
14	Existenz- und Eindeutigkeitsätze	93
15	Elementare Lösungsmethoden	99
16	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten .	111
17	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	116
18	Fourierreihen	119
19	Anwendung auf die Wellengleichung	131
	Aufgaben	134
V	Tipps zur Prüfungsvorbereitung	137
	Literaturverzeichnis	141
	Index	145