IV Arithmetik

Wir zeigen im ersten Abschnitt, daß sich alle rekursiven Funktionen in $\mathfrak{N}$, der Struktur der natürliche Zahlen, definieren lassen. Daraus ergeben sich sofort die Unentscheidbarkeit der Theorie von $\mathfrak{N}$ und der Erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz, der besagt, daß jede effektiv aufzählbare Teiltheorie unvollständig sein muß. Damit bleiben in jeder expliziten Axiomatisierung einer Teiltheorie von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ Sätze der Zahlentheorie unbeweisbar. Wir werden zwei solche Teiltheorien genauer untersuchen, die sehr schwache Theorie Q und die sogenannte Peanoarithmetik, die die Theorie Q um das Induktionsschema erweitert.

Für die Peanoarithmetik P werden wir dann den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz beweisen: Die Konsistenz der Peanoarithmetik ist zwar wahr, aber in P nicht beweisbar.

Gentzen hat in [9] bewiesen, daß die Konsistenz der Peanoarithmetik in elementarer Weise aus der „Wohlgeordnetheit von ε_0" folgt (siehe Aufgabe 46). Mehr darüber findet man in Lehrbüchern der Beweistheorie oder in [1].

17 Definierbare Relationen

Definition

Eine Relation $R \subset \mathbb{N}^n$ heißt *arithmetisch*, wenn sie in der Struktur

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, \mathrm{S}, +, \cdot, <)$$

definierbar ist.

Das bedeutet, daß für eine L_N–Formel ϕ

$$R(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{N} \models \phi[a_1, \ldots, a_n].$$

Eine Funktion f heißt arithmetisch, wenn ihr Graph arithmetisch ist:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_0 \iff \mathfrak{N} \models \phi_f[a_0, \ldots, a_n].$$

Lemma 17.1

Rekursive Funktionen sind arithmetisch.