III Rekursionstheorie

Eine Funktion $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt berechenbar, wenn sie mit einer Registermaschine berechnet werden kann. Eine Registermaschine ist ein einfacher Computer mit endlich vielen Registern, in denen sich beliebig lange Wörter eines endlichen Alphabets speichern lassen. Wir zeigen, daß die berechenbaren Funktionen mit den rekursiven Funktionen, die sich aus einer Reihe von Grundfunktionen mit einfachen Regeln erzeugen lassen, übereinstimmen (Satz 12.1). Der Beweis läßt sich sofort auf andere Maschinenmodelle, wie zum Beispiel auf die in Aufgabe 52 eingeführten Turingmaschinen, übertragen. Das rechtfertigt die Churchsche These:

Alle intuitiv berechenbaren Funktionen sind rekursiv.

Eine Menge von natürlichen Zahlen heißt rekursiv, wenn ihre charakteristische Funktion rekursiv ist, und rekursiv aufzählbar, wenn sie Bild einer rekursiven Funktion ist. In Abschnitt 14 werden wir mit Hilfe eines Diagonalverfahrens rekursiv aufzählbare Mengen konstruieren, die nicht rekursiv sind.

Wenn man eine endliche Sprache L festhält, lassen sich L–Formeln ϕ durch ihre Gödelnummer $\ulcorner\phi\urcorner$ kodieren. Daß sich die beweisbaren L–Aussagen effektiv aufzählen lassen, bedeutet nun, daß die Menge $\{\ulcorner\phi\urcorner \mid \vdash \phi\}$ der Gödelnummern aller beweisbaren Aussagen rekursiv aufzählbar ist. Im nächsten Kapitel werden wir dann sehen, daß $\{\ulcorner\phi\urcorner \mid \vdash \phi\}$ für geeignetes L nicht rekursiv ist (Satz 18.4). Das heißt, daß es kein Verfahren gibt, das entscheidet, ob eine gegebene L–Aussage ϕ beweisbar ist.

Mehr über Rekursionstheorie – die Theorie der berechenbaren Funktionen – findet man in Coopers Buch [6].

■ 12 Registermaschinen

Eine Registermaschine $\mathcal{M}$ arbeitet mit endlichen vielen Registern $\mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_{R-1}$, in denen Wörter aus einem endlichen Alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_L\}$ stehen. Die Maschine kann den letzten Buchstaben dieser Wörter lesen, den letzten Buchstaben streichen oder einen Buchstaben anhängen[1]. Das Programm von $\mathcal{M}$ ist eine Folge $(b_0, \ldots, b_N)$ von Befehlen der folgenden Art.

[1] Die Register sind also „stacks“.