I Prädikatenkalkül

Aussagen des Prädikatenkalküls sind Zeichenreihen, die Eigenschaften von Strukturen beschreiben. Zum Beispiel gilt die Aussage

$$\phi \;=\; \forall x\,(\,0 < x \rightarrow \exists y\; x \doteq y \cdot y)$$

in einem angeordneten Körper $\mathfrak{K} = (K, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ genau dann, wenn jedes positive Element von K ein Quadrat ist.

Eine Theorie T ist eine Menge von Aussagen, den Axiomen von T. Daß ϕ aus T folgt, heißt, daß ϕ in allen Strukturen gilt, in denen alle Axiome von T gelten. Der Gödelsche Vollständigkeitssatz (siehe Abschnitt 4) besagt, daß ϕ genau dann aus T folgt, wenn sich ϕ aus endlich vielen Axiomen von T durch Anwendung der Regeln des Hilbertkalküls herleiten läßt. Wenn T leer ist, ergibt sich der Spezialfall, daß eine Aussage genau dann allgemeingültig ist, wenn sie im Hilbertkalkül beweisbar ist. Dies wird damit erkauft, daß Ausdruckstärke der Formeln des Prädikatenkalküls stark eingeschränkt ist. Es läßt sich zum Beispiel nicht mit einer Aussage ausdrücken, daß ein Körper die Charakteristik Null hat oder daß in einem angeordneten Körper jede nicht–leere beschränkte Menge ein Supremum hat. (Vergleiche dazu die Aufgaben 22, 23 und 77.)

Zum Beweis von Aussagen, die keine Funktionszeichen und Gleichheitszeichen enthalten, eignet sich der Sequenzenkalkül, den wir Abschnitt 5 diskutieren, besser als der Hilbertkalkül. Er ist näher am natürlichen Schließen und hat die Eigenschaft, daß jede beweisbare Aussage ϕ einen Beweis hat, der nur Teilformeln von ϕ verwendet.

Wir werden später (Satz 18.4) sehen, daß sich nicht effektiv entscheiden läßt, ob eine gegebene Aussage ϕ beweisbar ist. Wenn ϕ aber beweisbar ist, läßt sich ein Beweis von ϕ effektiv finden. Man könnte zum Beispiel eine Liste aller möglichen Ableitungen im Hilbertkalkül durchgehen, solange, bis ein Beweis von ϕ auftaucht. Der Satz von Herbrand (Abschnitt 6) liefert ein besseres Verfahren: Man bildet aus ϕ eine Folge von immer schwächer werdenden quantorenfreien Aussagen $\phi_0, \phi_1, \ldots$, mit der Eigenschaft, daß ϕ genau dann beweisbar ist, wenn eines dieser ϕ_i beweisbar ist. Die Beweisbarkeit dieser quantorenfreien Aussagen läßt sich effektiv entscheiden. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels geben wir dafür einen vernünftigen Algorithmus an, die Resolutionsmethode.