

Appendice

Richiami di statistica

A.1 Introduzione

Per comprendere appieno le potenzialità delle tecniche multifrattali stocastiche, soprattutto la formulazione dei multifrattali universali e la applicazione dei concetti frattali alla fisica, è necessario richiamare alcune nozioni di statistica e riconsiderarle poi da un punto di vista dal quale non sempre – o quasi mai – sono affrontate nei corsi istituzionali.

Tradizionalmente, nella fisica siamo abituati a trattare principalmente e sostanzialmente tre possibili distribuzioni di probabilità: la distribuzione binomiale di Bernoulli, la distribuzione di Poisson e la distribuzione di Gauss, le ultime delle quali sono peraltro una filiazione della prima.

Come vedremo, però, queste son ben lungi dall'essere le uniche distribuzioni di probabilità importanti nel mondo fisico.

Prima di addentrarci nello studio delle singole distribuzioni è opportuno introdurre il concetto di momento statistico.

Per definizione il momento statistico $M_r(x)$ di ordine r di N valori x_i di una variabile casuale x è definito come:

$$M_r(x) = \frac{\sum_i x_i^r}{N}. \quad (\text{A.1})$$

Il momento del primo ordine è il valor medio μ .

Analogamente, il momento statistico $M_r(\mu)$ di ordine r attorno al valor medio μ , detto anche **momento centrale r -esimo**, è dato da:

$$M_r(\mu) = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^r}{N} \quad (\text{A.2})$$

in cui $r = 0, 1, 2, \dots$

Ne segue che $M_0(\mu) = 1$, $M_1(\mu) = 0$ e $M_2(\mu) = \sigma^2$. Così il secondo momento centrale è la varianza; $M_3(\mu)$ è detto **skewness** mentre $M_4(\mu)$ è detto **kurtosi**¹.

A.1.1 Distribuzione binomiale di Bernoulli

Se un evento casuale può appartenere a *due soli possibili* insiemi A e B , indicando con p la probabilità a priori che questo evento appartenga all'insieme A e con $(1-p)$ la probabilità che lo stesso appartenga all'insieme B (le notazioni conservano la probabilità unitaria che l'evento appartenga o ad A o a B), possiamo derivare la legge di probabilità che, dalla analisi di n eventi stocasticamente indipendenti, i primi k appartengano all'insieme A ed i rimanenti $(n-k)$ appartengano all'insieme B . La probabilità composta è:

$$P(k) = \underbrace{pp \cdots pp}_k \underbrace{(1-p)(1-p) \cdots (1-p)}_{(n-k)} = p^k(1-p)^{n-k}. \quad (\text{A.3})$$

Tuttavia, se non interessa l'ordine con cui si susseguono le appartenenze dell'evento ai due insiemi A o B , il numero di modi possibili con cui si può verificare che l'evento appartenga complessivamente k volte all'insieme A e $(n-k)$ volte all'insieme B , si ottiene moltiplicando la probabilità (A.3) per il numero di combinazioni di n oggetti a k a k : cioè per il coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (\text{A.4})$$

La probabilità risulta più elevata e si ottiene:

$$P_k(n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{Bernoulli.} \quad (\text{A.5})$$

È bene ricordare una regoletta mnemonica utile (quella del *triangolo di Tartaglia*): se si sviluppa la potenza di un binomio $(p+q)^n$ la (A.5) non è altro che il termine dello sviluppo di potenza di un binomio che contiene il prodotto $p^k q^{(n-k)}$. Si ottengono facilmente dalla (A.5) il valore della media e della varianza: $\bar{k} = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$.

A.1.2 Distribuzione di Poisson

Matematicamente la distribuzione poissoniana è un caso particolare della distribuzione bernoulliana, o meglio, è una approssimazione della (A.5) corrispondente a

¹ Il materiale di questo capitolo si rifà anche ai volumi già pubblicati dall'autore [141].

quando p diventa molto piccolo ($p \ll 1$) mentre, contemporaneamente, il numero di prove (di eventi) diventa molto grande, ma vale la condizione che il prodotto prove-probabilità rimane costante: $np = h$; ($p \ll 1$); ($n \gg k$), condizione detta “delle piccole serie”.

La legge binomiale è composta di tre fattori che si moltiplicano:

- il primo è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^k}{k!} \sim \frac{n^k}{k!} \tag{A.6}$$

che si può approssimare – come fatto nella (A.6) – nel caso che $n \gg k$;

- il secondo è $(1-p)^{n-k}$ che si può riscrivere – ricavando il fattore $p = \frac{h}{n}$ dalla condizione delle piccole serie – come:

$$(1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{h}{n}\right)^{n-k} \sim \left(1 - \frac{h}{n}\right)^n$$

- in quanto $(n-k) \sim n$ e ci si ferma al primo termine dello sviluppo in serie di Taylor. Ricordando che:

$$\left(1 - \frac{h}{n}\right)^n = 1 - n\frac{h}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \dots = 1 - h + \frac{n-1}{n} \frac{h^2}{2!} + \dots$$

e che:

$$e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \dots$$

si può porre, per $n \sim (n-1)$:

$$\left(1 - \frac{h}{n}\right)^n \sim e^{-h}$$

ovverosia:

$$(1-p)^{n-k} \sim e^{-h};$$

- il terzo fattore è p^k che si può riscrivere, ancora usando la condizione delle piccole serie:

$$p^k = \frac{h^k}{n^k}.$$

La riscrittura dei tre fattori precedenti permette di approssimare la distribuzione binomiale con una nuova distribuzione $P_k(n, p)$:

$$P_k(n, p) \simeq \frac{n^k}{k!} e^{-h} \frac{h^k}{n^k} = \frac{e^{-h} h^k}{k!}.$$

La distribuzione di probabilità dipende quindi dal prodotto prove-probabilità h che governa contemporaneamente i limiti $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$.

$$P_k(h) = \frac{h^k}{k!} e^{-h} \quad \text{Poisson.} \quad (\text{A.7})$$

Dalla (A.7) si ottengono facilmente i valori della media e della varianza: $\bar{k} = h$ e $\sigma^2 = h$. La poissoniana è una distribuzione ad un solo parametro.

A.1.3 Distribuzione di DeMoivre-Gauss

La distribuzione gaussiana è anch'essa una approssimazione della distribuzione binomiale che si ottiene quando il numero delle prove (o il numero delle realizzazioni) n è grande ma p non tende a zero, bensì si mantiene costante. Con il che le condizioni (dette delle grandi serie) per ottenere la gaussiana sono: $h = np \rightarrow \infty$; $n \rightarrow \infty$.

In questo caso k (numero delle prove) diventa infinitesimo e si può fare la approssimazione:

$$\frac{k}{n} \rightarrow \frac{dk}{n} = dx.$$

La nuova variabile x diventa continua ed il differenziale dx non è più il “numero di volte che un evento appartiene all'insieme A ”, bensì è il valore (continuo) che la variabile aleatoria x può assumere nell'evento casuale.

La derivazione non è semplice e noi la omettiamo. Risulta:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Gauss.} \quad (\text{A.8})$$

È una distribuzione a due parametri liberi: media \bar{x} e varianza σ^2 .

Il teorema di De Moivre [142] dimostra che, per p fisso e per $n \rightarrow \infty$, la distribuzione di Bernoulli converge uniformemente alla distribuzione di Gauss.

A.1.4 Teorema del limite centrale

Quando il teorema di De Moivre viene generalizzato, esso costituisce il teorema del limite centrale della statistica (che noi riprenderemo più avanti). Qui ci limitiamo a citarne un enunciato: siano x_1, x_2, \dots, x_n variabili casuali stocasticamente indipendenti, di distribuzione qualsivoglia a varianza finita. Sotto condizioni molto deboli si può dimostrare che la variabile casuale:

$$y = \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A.9})$$

obbedisce ad una distribuzione che converge verso una distribuzione gaussiana con una varianza:

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2. \quad (\text{A.10})$$

Le condizioni sono:

- che le variabili x_i siano stocasticamente indipendenti;
- che ammettano valor medio \bar{x}_i finito;
- che esista il valor medio di $|x_i - \bar{x}_i|^3$;
- che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma(x_i)}}{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i |x_i - \bar{x}_i|^3}} \right] = \infty.$$

Purtroppo, queste condizioni vengono spesso trascurate o dimenticate ed il teorema applicato ugualmente. Va infine detto che vi sono numerose formulazioni del teorema del limite centrale della statistica e che noi riprenderemo questo tema più avanti in connessione con le possibili generalizzazioni ai processi moltiplicativi.

A.1.5 La distribuzione multinomiale

Partendo dalla distribuzione di probabilità binomiale (A.5) è facile – invece che calcolare la probabilità di ripartizione tra due soli insiemi A e B – avere k insiemi A_1, A_2, \dots, A_k e calcolare la probabilità che, dati N eventi stocasticamente indipendenti, n_1 appartengano all'insieme A_1 , n_2 appartengano all'insieme A_2, \dots, n_k appartengano all'insieme A_k . È immediato riconoscere che è il caso di una variabile misurata nell'intervallo (a, b) , quando si divida l'intervallo (a, b) in k intervallini, cosicché una misura può cadere “soltanto” in uno dei k intervallini. In più deve essere:

$$\sum_{i=1}^k n_i = N. \quad (\text{A.11})$$

Se, come già fatto nel § A.1.1, non ci interessa l'ordine con cui si susseguono le appartenenze dell'evento all'insieme generico A_i , dati N eventi dobbiamo prenderne n_1 da porre nell'insieme A_1 : questo si può fare in tanti modi quante sono le combinazioni di N oggetti a n_1 a n_1 , cioè in $\binom{N}{n_1}$ modi diversi. Tra i rimanenti $(N - n_1)$ eventi, ne dobbiamo mettere n_2 nell'insieme A_2 e ciò si può fare in $\binom{N-n_1}{n_2}$ modi diversi. Il numero di modi con cui si può costruire la distribuzione aleatoria $\{n_i\} = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ è il prodotto $W(n_i)$:

$$W(n_i) = \binom{N}{n_1} \binom{N-n_1}{n_2} \dots \binom{N-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}.$$

L'ultimo coefficiente binomiale è uno in quanto per la (A.11) coincide con $\binom{n_k}{n_k}$. Tuttavia, per la (A.4) la formula precedente si può riscrivere come:

$$W(n_i) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} \frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3!(N-n_1-n_2-n_3)!} \dots$$

ovverosia:

$$W(n_i) = \frac{N!}{n_1!n_2! \dots n_k!} \quad \text{Multinomiale.} \quad (A.12)$$

La distribuzione multinomiale è una funzione di n_i che è soggetta alla condizione (A.11). Il valore medio di $n_i = \frac{\sum n_i}{k}$ è: $\bar{n} = \frac{N}{k}$ e la varianza $\sigma^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^k n_i^2}{k}\right) - \bar{n}^2 = n^2 - \bar{n}^2$.

Possiamo condensare le interconnessioni fra le tre distribuzioni principali della statistica con le molteplici distribuzioni usate nella fisica mediante il diagramma della Fig. A.1. In esso viene riassunto come, partendo sempre dalla distribuzione binomiale, si possa passare alla multinomiale e da questa alle distribuzioni di Boltzmann, Bose-Einstein e Fermi-Dirac, trattate nel prossimo paragrafo, oppure, mediante opportune approssimazione (delle piccole serie o delle grandi serie) alla distribuzione poissoniana o a quella gaussiana.

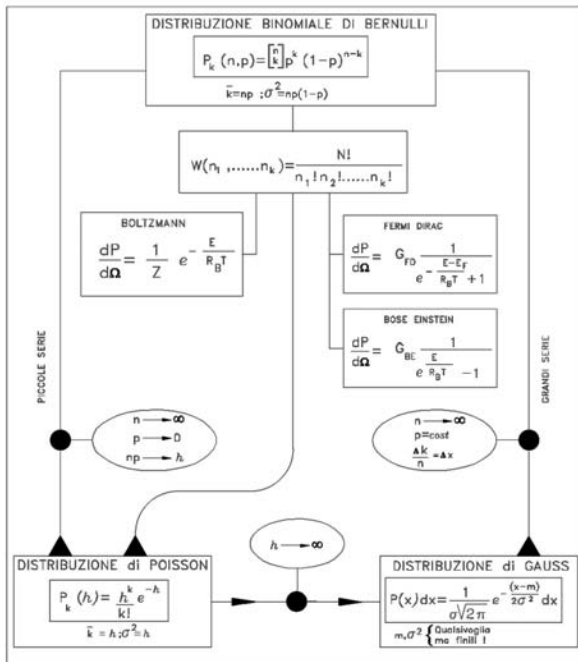


Fig. A.1 Schema delle possibili evoluzioni della distribuzione binomiale

A.1.6 Alcune osservazioni

Ricordiamo che, per comodità, in seguito ci potrà servire la distribuzione di Gauss normalizzata.

Poniamo:

$$x = \frac{x' - \bar{x}'}{\sigma}; \quad dx = \frac{dx'}{\sigma}$$

in modo da scrivere la distribuzione di Gauss semplicemente come:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{Gauss-normalizzata.} \quad (\text{A.13})$$

Notiamo esplicitamente ancora che nelle distribuzioni gaussiane e poissoniane scompare completamente il numero delle prove n che è stato fatto tendere a infinito. Notiamo infine una cosa importante: la gaussiana è considerata a “furor di popolo” la “distribuzione normale degli errori”. Ma questo è un puro atto di fede. Wittaker e Robinson, nel volume “Calculus of Observations”, edito a Londra nel 1929, scrivono esplicitamente:

... ognuno crede nella legge gaussiana degli errori: gli sperimentatori perché pensano che sia stata dimostrata dai matematici; i matematici perché pensano che sia stata verificata con esattezza dalle osservazioni sperimentali.

Benoit Mandelbrot fu obbligato ad inventare i frattali proprio perché il rumore elettromagnetico nella trasmissione di segnali digitali – al tempo dei primi trasferimenti via satellite di dati tra calcolatori – era ben lungi dall’essere di tipo gaussiano, il che portava ad un numero troppo elevato di errori di trasmissione.

Occorre infine affermare con chiarezza che le tre distribuzioni fin qui illustrate e che vanno per la maggiore, sono soltanto alcune distribuzioni di probabilità e che esse valgono soltanto per le condizioni per le quali sono state provate.

Per esempio, sappiamo benissimo a nostre spese che, quando la statistica è povera, si è ben lungi dalla situazione $n \rightarrow \infty$, per cui la differenza tra due distribuzioni poissoniane (segnale meno fondo) non è una poissoniana bensì una funzione di Bessel del secondo ordine [144] e che la trattazione di dati poveri in statistica è un problema per niente facile da affrontare che esula dai fini del presente volume².

A.2 Altre distribuzioni di probabilità

Noi siamo ancorati alla distribuzione binomiale perché ci hanno insegnato a lanciare i dadi ed a giocare con le carte; siamo ancorati alla distribuzione di Poisson perché abbiamo a che fare con i conteggi dei rivelatori di particelle; siamo ancorati

² Nel 2010 A. Rotondi [145] ha sottoposto a severa critica il problema delle incertezze nella frequenza e nella efficienza in esperimenti di fisica dominati da conteggi di impulsi o di particelle. Il lettore può rifarsi alla referenza originale citata.

alla distribuzione normale o di Gauss per il malinteso di fondo appena citato e per le distrazioni che abbiamo sulle condizioni nelle quali è stato dimostrato da De Moivre il teorema del limite centrale della statistica; fra non molto dovremo superare coscientemente questa distrazione, fare mente locale, e generalizzare correttamente il teorema del limite centrale. Per fortuna lo ha fatto per noi Paul Lévy nel 1925.

Ad onor del vero, va sottolineato che, per piccole variazioni e per molte circostanze, la distribuzione di Gauss “riproduce spesso” le deviazioni delle letture di un indice o di una serie di misure; ma per molte misure, “molto spesso” si osservano delle “code” che eccedono quanto previsto da una gaussiana.

Qui, tuttavia, non vogliamo disquisire sulla bontà di una distribuzione gaussiana di probabilità, bensì considerarla “una fra le tante” e confrontarla “anche” con altre distribuzioni altrettanto utili nella fisica e nella statistica.

A.2.1 Distribuzione rettangolare

La prima distribuzione con cui si ha a che fare è una distribuzione piatta, in mancanza di risoluzione sperimentale:

$$P(x) = k; (a \leq x \leq b).$$

Se $P(x)$ è una densità di probabilità, $dP(x) = kdx$ e deve essere:

$$\int P(x)dx = \int_a^b kdx = k(b-a) = 1; k = \frac{1}{b-a}$$

ovvero:

$$P(x) = \frac{1}{b-a} (a \leq x \leq b) \quad \text{Rettangolare.} \quad (\text{A.14})$$

Ogni intervallo dx nell'intervallo (a, b) è equiprobabile: questa è la situazione di quando si analizza la variabile aleatoria x con un passo di approssimazione $\delta = (b-a)$. Oppure, questa è la situazione del primo passo di un processo moltiplicativo a cascata del Capitolo 7. Non sappiamo nulla sulla struttura della distribuzione di x a risoluzione più fina di $\lambda = \frac{1}{\delta}$. Il valore k è il contenuto dell'intervallo $(b-a)$. Possiamo cavare poco da una tale distribuzione: possiamo centrare la distribuzione attorno al punto medio $c = \frac{b-a}{2}$ mediante una opportuna traslazione e ridefinire la distribuzione nell'intervallo $(-c, +c)$. La media vale c .

È facile calcolare il momento statistico di ordine n , $M_n(0)$, rispetto allo zero del nuovo intervallo $(-c, +c)$:

$$M_n(0) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} x^n dx = \frac{1}{2c} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{-c}^{+c}. \quad (\text{A.15})$$

Ovviamente, tutti i momenti di ordine dispari sono nulli:

$$M_{2n+1}(0) = 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mentre i momenti di ordine pari hanno la forma:

$$M_{2n}(0) = \frac{c^{2n}}{2n+1}.$$

In particolare la varianza vale:

$$\sigma^2 = M_2(0) = \frac{c^2}{3} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\delta^2}{12}. \quad (\text{A.16})$$

La (A.16) pone pertanto un limite invalicabile sulla possibile dispersione dei dati analizzati con un passo di approssimazione $\delta = (b-a)$.

A.2.2 Distribuzione di Boltzmann

Partendo dalla distribuzione multinomiale (A.12) si arriva con facilità alla distribuzione della statistica classica di Boltzmann. Se infatti si pensa che gli insiemi A_i tra i quali distribuire gli eventi casuali x_i non siano altro che delle celle dello spazio delle fasi $(x, y, z; p_x, p_y, p_z)$ nelle quali poter collocare le molecole di un sistema microscopico tipo gas perfetto, possiamo pensare che le celle siano abbastanza piccole cosicché le particelle che appartengono alla cella A_i posseggano una energia E_i , in modo che si debba aggiungere alla (A.11) anche la condizione di conservazione della energia:

$$\sum_{i=1}^k E_i n_i = E_{\text{tot}}. \quad (\text{A.17})$$

Appare chiaro che la distribuzione di equilibrio è quella che si può realizzare nel numero massimo possibile di modi. Ogni realizzazione del sistema termodinamico si chiama microstato del sistema, mentre la configurazione $\{n_i\} = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ si chiama macrostato. Il lettore intuisce immediatamente che il modo di contare i microstati che corrispondono ad un determinato macrostato assume una importanza cruciale: le particelle sono distinguibili? Si possono metter più particelle nella stessa posizione (nella stessa cella)? Quanto piccola può essere presa una cella A_i ?

La distribuzione di equilibrio della meccanica classica si ottiene ricercando il massimo della (A.12) sotto le condizioni (A.11) e (A.17). Essendo il logaritmo una funzione monotona sempre crescente, conviene determinare il massimo del logaritmo della (A.12) il che significa in sostanza considerare l'entropia S del sistema fisico che è definita come proporzionale al logaritmo della probabilità³.

³ Si veda un volume di Termodinamica.

Definiamo pertanto:

$$F(n_i) = \log W(n_i) = \log N! - \sum_{i=1}^k \log(n_i!)$$

e ricordiamo un teorema di Stirling che scriviamo esplicitamente:

$$\log(N!) = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots = \sum_{i=1}^N \log i = \sum_{i=1}^N (1 \cdot \log i).$$

Il significato di questa formula è quello di area della poligonale inscritta sotto la curva della funzione $y = \log x$ ottenuta con immediatezza spezzando l'asse delle x in intervalli $\Delta x = 1$. Una utile approssimazione di $y = \log N!$ per N grande è quindi:

$$y = \log N! \sim \int_1^N \log x dx = [x \log x - x]_1^N$$

da cui segue il *Teorema di Stirling*:

$$\log N! \sim N \log N - N = N(\log N - 1). \quad (\text{A.18})$$

Si può pertanto riscrivere la funzione $F(n_i)$ come:

$$F(n_i) = \log W(n_i) = N \log N - N - \sum_i n_i \log n_i + \sum_i n_i$$

(il secondo ed il quarto addendo si elidono).

Il massimo della funzione $F(n_i)$ sotto le condizioni (A.11) e (A.17) si ottiene facilmente mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [143], che, nella ricerca dei minimi condizionati, consiste nell'aggiungere alla espressione precedente due termini nulli ottenuti dalle (A.11) e (A.17) e cercare quindi il massimo senza condizioni della funzione:

$$F(n_i) = \log W(n_i) + \alpha \left(N - \sum_i n_i \right) + \beta \left(E_{\text{tot}} - \sum_i n_i E_i \right)$$

ovvero:

$$F(n_i) = - \sum_i n_i \log n_i + \sum_i n_i - \alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i E_i \quad (\text{A.19})$$

dove α e β sono due parametri da determinare imponendo le due condizioni (A.11) e (A.17). I termini $(+\alpha N + \beta E_{\text{tot}} + N \log N - N)$ sono costanti per cui possono essere tralasciati nel processo di ricerca del massimo.

Derivando la (A.19) rispetto a n_i si ottiene la distribuzione di equilibrio $\{n_i^0\} = \{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0\}$:

$$\left[\frac{\partial F(n_i)}{\partial n_i} \right]_{n_i^0} = -\log n_i^0 - \frac{n_i^0}{n_i^0} - \alpha - \beta E_i + 1 = 0.$$

Si ricava facilmente l'equazione:

$$\log n_i^0 = -\alpha - \beta E_i.$$

Passando agli esponenziali si può scrivere immediatamente:

$$n_i^0 = e^{-\alpha - \beta E_i} = G e^{-\beta E_i}.$$

Il parametro β si ricava imponendo la conservazione dell'energia per ogni grado di libertà e risulta:

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

dove k è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta di equilibrio del sistema [146].

In definitiva, passando ad elementi infinitesimi di spazio delle fasi

$$d\Omega = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

si può scrivere la distribuzione di Boltzmann come:

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{N_{\text{tot}}}{Z} e^{-\frac{E}{kT}} \quad \text{Boltzmann.} \quad (\text{A.20})$$

La costante Z si chiama “Zustandssumme” ed è la funzione di partizione cui si perviene imponendo la condizione (A.11).

Vale la pena di sottolineare che, cambiando le variabili, la distribuzione di probabilità in energia diventa [147]:

$$\frac{dn}{dE} = A \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (\text{A.21})$$

A.2.3 Distribuzioni di Fermi-Dirac e Bose-Einstein

Abbiamo già accennato al fatto che la distribuzione di Boltzmann descrive la distribuzione di probabilità classica, nella quale le particelle sono considerate distinguibili come gli “oggetti” che vengono “distribuiti” a n_1 a n_1 nell'insieme A_1 , a n_2 a n_2 nell'insieme A_2 , ecc., nella costruzione della distribuzione multinomiale, come fatto nel § A.1.5.

A questo approccio si possono fare tre obiezioni rilevanti:

- non è vero che si possa conoscere contemporaneamente la posizione e la quantità di moto di una particella microscopica (Principio di Indeterminazione di Heisenberg);
- non è fisicamente corretto procedere come se le particelle microscopiche avessero una loro identità e fossero di fatto distinguibili (Principio di Identità);

- nel caso specifico degli elettroni non è vero che in una celletta dello spazio delle fasi si possa metter un numero N_i qualsivoglia di elettroni (cfr. il Principio di Esclusione di Pauli).

La bontà della distribuzione di Boltzmann nel descrivere moltissimi sistemi fisici sta nel fatto che, ad alta temperatura, le molecole o le particelle sono abbastanza lontane cosicché, di fatto, non si confondono mai tra di loro e non si trovano mai nelle circostanze di interagire tra loro così da risentire gli effetti delle tre obiezioni enunciate.

Quando invece, come nel caso dei calori specifici dei solidi a bassa temperatura, le particelle microscopiche sono in condizioni di forte interazione, le condizioni nelle quali abbiamo contato i microstati corrispondenti al macrostato specifico risulta fortemente deficitario [147].

Qui ci limitiamo ad impostare il conteggio nel caso di Fermi-Dirac, che risulta particolarmente semplice, mentre scriveremo semplicemente la formula della distribuzione di Bose-Einstein.

Il conteggio nel caso di elettroni è facile. Lo spazio delle fasi viene suddiviso in celle A_i , ma in esse ci possono stare $n = \frac{A}{h^3}$ compartimenti definiti dal principio di indeterminazione (A è il volume di una cella qualsiasi dello spazio delle fasi, di cui noi ne abbiamo prese k). Infatti, $\Delta x \Delta p_x \sim h$ con h costante di Planck. E ciò vale per le tre coordinate x, y, z . Il compartimentino h^3 indica l'occupazione di un corpuscolo microscopico nello spazio delle fasi. Allo spazio delle fasi aggiungiamo un asse degli spin, cosicché ogni compartimento h^3 dello spazio delle fasi può contenere un solo elettrone (con lo spin orientato, per esempio, all'insù). Basta assumere $n = \frac{2A}{h^3}$.

Ciò posto, dati n compartimentini contenuti nella cella A_i dello spazio delle fasi che contenga n_i elettroni, n_i compartimentini possono essere occupati e gli altri $(n - n_i)$ risultano vuoti, perché si può avere un solo elettrone per compartimentino di dimensioni h^3 . Il problema è allora semplicemente quello di contare in quanti modi possibili, dati n compartimenti, se ne possono riempire n_i lasciandone $(n - n_i)$ vuoti. Ciò corrisponde al numero di combinazioni di n oggetti a n_i a n_i e cioè:

$$\binom{n}{n_i} = \frac{n!}{n_i!(n - n_i)!}$$

La multinomiale (A.12) viene pertanto sostituita dalla distribuzione:

$$W(n_i) = \prod_{i=1}^k \frac{n!}{n_i!(n - n_i)!}$$

con le solite condizioni (A.11) e (A.17).

Passando ancora ai logaritmi, si ottiene:

$$F(n_i) = \log W(n_i) = \sum_{i=1}^k [\log n! - \log n_i! - \log(n - n_i)!]$$

con n ed n_i entrambi numeri grandi. Usando il *Teorema di Stirling* si ottiene:

$$\log W(n_i) = \sum_{i=1}^k [n \log n - n - n_i \log n_i + n_i - (n - n_i) \log(n - n_i) + (n - n_i)]. \quad (\text{A.22})$$

Per trovare la distribuzione $\{n_i^0\} = \{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0\}$ di massima probabilità occorre usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange come fatto nel § A.2 e massimizzare la funzione:

$$F(n_i) = \log W(n_i) + \alpha \left(N - \sum_i n_i \right) + \beta \left(E_{\text{tot}} - \sum_i E_i n_i \right)$$

nella quale sono state introdotte le condizioni (A.11) e (A.17).

Imponendo $\frac{\partial F}{\partial n_i} = 0$, tenendo presente che n è una costante “per costruzione”, si ottiene la distribuzione massimizzata:

$$\{n_i^0\} = \{n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0\}.$$

Esplicitamente:

$$F(n_i) = \sum_i [-n_i \log n_i - n \log(n - n_i) + n_i \log(n - n_i)] + \alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i E_i \quad (\text{A.23})$$

dove sono stati trascurati i termini $(n \log n + n + \alpha N + \beta E_{\text{tot}})$ costanti.

Derivando rispetto a n_i si ottiene:

$$\left[\frac{\partial F(n_i)}{\partial n_i} \right]_{n_i^0} = -\log n_i^0 - \frac{n_i^0}{n_i^0} + \frac{n}{n - n_i^0} + \log(n - n_i^0) - \frac{n_i^0}{n - n_i^0} + \alpha - \beta E_i = 0 \quad (\text{A.24})$$

ovvero:

$$\left[\frac{\partial F(n_i)}{\partial n_i} \right]_{n_i^0} = -\log n_i^0 + \log(n - n_i^0) - \alpha - \beta E_i = 0$$

o anche:

$$\log(n - n_i^0) - \log n_i^0 = \alpha + \beta E_i.$$

Passando agli esponenziali, ponendo $\alpha = \log B$ si ottiene:

$$\log \frac{(n - n_i^0)}{n_i^0} = \log B + \beta E_i$$

$$\log \left[\frac{\frac{n}{n_i^0} - 1}{B} \right] = \beta E_i$$

e finalmente:

$$\frac{n_i^0}{n} = \frac{1}{Be^{\beta E_i} + 1}.$$

Il valore di β è sempre lo stesso $\beta = \frac{1}{kT}$. Pertanto, passando agli infinitesimi, tenendo presente il volume elementare $d\Omega$ dello spazio delle fasi:

$$n = \frac{2A}{h^3} \rightarrow \frac{2A}{h^3} dx dy dz dp_x dp_y dp_z = \frac{2A}{h^3} d\Omega$$

si può scrivere, integrando la parte geometrica:

$$\frac{dN}{dp_x dp_y dp_z} = G \frac{1}{Be^{\frac{E}{kT}} + 1}.$$

Per ragioni di opportunità è bene porre:

$$B = e^{-\frac{E_F}{kT}}$$

con il che il parametro E_F acquista il significato di *Energia di Fermi*. La distribuzione di Fermi-Dirac si può finalmente scrivere nella forma:

$$\frac{dN}{d\Omega} = G \frac{1}{e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} + 1} \quad \text{Fermi-Dirac.} \quad (\text{A.25})$$

Come fatto per la (A.21) possiamo scrivere la distribuzione energetica di Fermi-Dirac nella forma:

$$\frac{dN}{dE} = G' \frac{\sqrt{E}}{e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} + 1} \quad (\text{A.26})$$

(il valore di G' è $G' = (4V/h^3)(2m_e)^{3/2}$ dove m_e è la massa dell'elettrone).

La formula (A.26) acquista una importanza fondamentale a bassa temperatura, in particolare allo zero assoluto. Va notato che fino a temperature di $10^3 - 10^4$ gradi Kelvin, la distribuzione (A.26) rimane sostanzialmente identica a quella che si ha allo zero assoluto.

A quella temperatura, all'esponente del denominatore si ha un termine che è 1 o 0 secondo il segno di $(E - E_F)$. Se $(E - E_F) > 0$ il denominatore contiene un addendo infinito cosicché $dN/dE = 0$; mentre invece, se $(E - E_F) < 0$, l'addendo esponenziale è nullo e la distribuzione allo zero assoluto diventa:

$$\frac{dN}{dE} = G' \sqrt{E}; \quad \text{per } (E < E_F). \quad (\text{A.27})$$

La (A.27) descrive, con buona approssimazione, la distribuzione energetica degli elettroni di conduzione all'interno di un conduttore. Il valore E_F varia poco coll'energia; detta E_{F0} l'energia di Fermi allo zero assoluto, E_F varia con la temperatura

secondo la legge:

$$E_F = E_{F0} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{F0}} \right)^2 + \dots \right].$$

Per il tungsteno $E_{F0} = 8.95$ eV, mentre per $T = 10^4$ gradi Kelvin E_F diminuisce del 10 per cento.

La distribuzione di Bose-Einstein si ottiene invece cambiando il metodo di conteggio dei microstati tenendo conto che ogni insieme A_i dello spazio delle fasi va riempito prima con compartimentini di dimensioni h^3 , ed ogni compartimentino va riempito tenendo conto del principio di identità e del fatto che ognuno di essi può contenere un numero qualsiasi di particelle microscopiche [147]. Il risultato è:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{A}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} \quad \text{Bose-Einstein} \quad (\text{A.28})$$

ovvero, per la distribuzione energetica:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{A\sqrt{E}}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}.$$

A commento finale di questo rapido riassunto delle tre distribuzioni statistiche classiche e quantistiche possiamo notare che tutte e tre si possono fare risalire ad un solo tipo di distribuzione che possiamo sintetizzare sotto la forma:

$$\frac{n_i}{n_i^0} + \delta = B e^{\frac{E_i}{kT}}$$

con:

- i) $\delta = 0$ per la statistica di Boltzmann;
- ii) $\delta = +1$ per la statistica di Bose-Einstein;
- iii) $\delta = -1$ per la statistica di Fermi-Dirac.

Si riconosce immediatamente che, per $\frac{E}{kT} \gg 1$, come si verifica nei sistemi estremamente rarefatti, le tre statistiche coincidono. Fatta eccezione per le temperature prossime allo zero assoluto e tranne che per casi particolari, si può trascurare l'effetto della meccanica quantistica. Ciò giustifica l'uso della statistica di Boltzmann nella grande maggioranza dei casi di applicazione delle leggi statistiche ai sistemi di molte particelle.

Per queste distribuzioni è rilevante il valore medio dell'energia che è: $\bar{E} = kT$.

A.2.4 Distribuzione esponenziale

Il comportamento esponenziale della distribuzione di Boltzmann non deve far pensare che ad essa vada attribuita una particolare importanza dal punto di vista statistico.

Si può facilmente arrivare a distribuzioni esponenziali con argomenti molto più semplici e lineari che non quelli che ci hanno fatto partire dalla distribuzione multinomiale.

Consideriamo infatti l'assorbimento di un raggio di luce da parte di un mezzo trasparente e calcoliamo l'intensità della luce alla profondità x nel mezzo trasparente.

Dato un raggio di luce di intensità I_0 , il quale incida sulla superficie di separazione di un mezzo trasparente, poniamo che l'intensità $-dI(x)$ di luce assorbita da uno spessore dx del mezzo, a profondità x , sia proporzionale a dx e ad $I(x)$ in quel punto. Poniamo cioè:

$$-dI = kI(x)dx$$

dalla quale si ricava immediatamente:

$$\frac{dI}{I(x)} = -kdx$$

da cui:

$$I(x) = I_0 e^{-kx}$$

avendo posto la condizione iniziale: $I(0) = I_0$, per $x = 0$.

Di solito si chiama $x_0 = 1/k$ lunghezza di assorbimento e si scrive l'intensità di luce che sopravvive alla profondità x come:

$$I(x) = I_0 e^{-\frac{x}{x_0}}.$$

Lo stesso risultato si ottiene per:

- i) il numero di atomi radioattivi che decadono con vita media τ partendo da un campione iniziale di N_0 atomi;
- ii) il numero $N(x)$ di particelle, che sopravvivono alle interazioni attraversando un mezzo di cammino di interazione x_{int} ;
- iii) il numero $N(x)$ di fotoni che sopravvivono alle interazioni elettromagnetiche attraversando un mezzo di cammino di radiazione x_r .

Per tutti questi fenomeni di assorbimento stocastico si può scrivere una densità di probabilità del tipo:

$$P(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{A.29})$$

come distribuzione di probabilità (normalizzata) di un sistema instabile ma peraltro "libero" e non stocasticamente vincolato nella sua probabilità di transizione.

Qui è importante il significato fisico di $\tau = \bar{t}$ o di \bar{x} e molto meno quello della varianza.

A.2.5 Distribuzione di Breit-Wigner o di Cauchy

È noto dal corso di Istituzioni di Fisica Nucleare, o meglio dai tempi di Enrico Fermi e dalla teoria dei fenomeni di risonanza, che se l'autofunzione di un sistema perturbato si scrive:

$$\Psi = \sum_i a_i u_i e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t}$$

con u_i autofunzioni degli stati imperturbati di energia E_i ed a_i ampiezze degli stati imperturbati della sovrapposizione, si arriva ad una ampiezza attorno all'energia di risonanza E_r del tipo:

$$|a|^2 = K \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (E - E_r)^2}.$$

E poiché il quadrato di un'ampiezza è la probabilità di transizione, si ha:

$$\frac{dP(E)}{dE} = K \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (E - E_r)^2} \quad \text{Breit-Wigner.} \quad (\text{A.30})$$

Ponendo $x = \frac{(E - E_r)}{\Gamma}$ si può scrivere una densità di probabilità normalizzata:

$$P(x) = K \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{Cauchy} \quad (\text{A.31})$$

per la quale vale la normalizzazione:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = 1.$$

La (A.31) è la distribuzione di Cauchy. Per questa distribuzione – che pure è una distribuzione a campana – il valor medio risulta infinito. Infatti, posto $y = \frac{x^2}{2}$ si scrive:

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + y} = \frac{1}{\pi} [\ln(1 + y)]_0^{\infty} = \infty - 0.$$

Anche la varianza risulta infinita:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(x^2 + 1) - 1] dx}{1 + x^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \infty - 1. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

La distribuzione di Cauchy riveste carattere di particolare importanza come elemento di separazione tra le variabili stocastiche iperboliche e quelle provenienti da generatori gaussiani.

Conviene notare che la distribuzione (A.30) è caratterizzata dalla moda E_r e dalla larghezza a metà altezza Γ piuttosto che dal valor medio e dalla varianza!

Cioè Γ viene assunto come estimatore della dispersione di x attorno alla *moda* della distribuzione, ovverosia attorno al valore di massima frequenza.

A.2.6 Altri estimatori di dispersione: il quantile

Nelle scienze economiche la varianza σ^2 non è molto usata ed è spesso sostituita da altri estimatori di dispersione che non divergano facilmente. In effetti, anche per una gaussiana, la varianza fornisce delle indicazioni peculiari: la probabilità che un valore casuale x cada entro un intervallo $(m - \sigma, m + \sigma)$ attorno al valore medio è $P(\sigma) \sim 0.68$ che non è un numero tondo ed è di poco interesse per gli economisti.

Molto usato è il *quantile*, una grandezza che si può adattare a molteplici esigenze.

La definizione è molto semplice: data una densità di probabilità normalizzata generica $p(x)$ per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

e data la sua funzione primitiva:

$$G(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$$

si definisce *quantile di ordine k* il valore x^* per cui:

$$G(x^*) = k.$$

Il quantile di ordine $k = 1/2$ è la *mediana*; il quantile di ordine $k = 1/4$ si chiama *quantile*. Da questa ultima grandezza deriva la *deviazione interquartile* (in sostituzione della deviazione standard σ) definita come:

$$s = \frac{x_{3/4} - x_{1/4}}{2}$$

che individua l'intervallo attorno alla media che racchiude il 50% (invece che il 68%) dei valori casuali. La deviazione interquartile è un estimatore delle fluttuazioni attorno alla moda, altrettanto buono della deviazione standard attorno alla media, con il vantaggio che, per definizione, ha sempre un valore finito anche quando la varianza (e la deviazione standard) non è definita o è infinita.

A.2.7 Variabili, parametri e voli di Lévy

Avendo introdotto almeno una distribuzione senza valore medio definito e con varianza infinita, conviene riprendere il *Teorema di de Moivre* del § A.1.4, ricordando le condizioni di applicabilità.

Supponiamo di avere un numero k ($k > 2$) di variabili aleatorie x_i con distribuzioni di probabilità normalizzate:

$$\int p_i(x) dx = 1$$

di media μ_i e varianza σ_i finita.

Il teorema del limite centrale della statistica di De Moivre, sotto le specifiche condizioni del § A.1.4 afferma che la sommatoria rinormalizzata delle variabili aleatorie mostra una distribuzione che converge verso una distribuzione gaussiana.

Se indichiamo con \doteq l'uguaglianza fra distribuzioni di probabilità possiamo scrivere che, se:

$$x \doteq \sum_{i=1}^k x_i; \quad p(x) = \sum_{i=1}^k p_i(x) \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i \quad (\text{A.33})$$

il valor medio è la somma dei valori medi:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^K \sigma_i^2 \quad (\text{A.34})$$

ovvero: *la varianza è la somma delle varianze.*

Quanto sopra mostra che la gaussiana rappresenta il *bacino di attrazione* per la somma di variabili stocastiche indipendenti a varianza finita, nel senso che ad essa tende la somma di variabili aleatorie indipendenti sotto condizioni abbastanza deboli.

È lecito chiedersi cosa si possa fare per le distribuzioni la cui varianza è indefinita, quale è il caso della distribuzione di Breit-Wigner o di Cauchy. È bene sottolineare come non sia difficile generare una distribuzione di probabilità a varianza o a valor medio non definiti: abbiamo imparato nel Capitolo 6 che una distribuzione iperbolica del tipo $P(x) = kx^{-q}$ non ammette momenti statistici finiti dall'ordine $(q-1)$ in sù.

Abbiamo visto nel § 2.7 che l'intervallo interquartile è, per definizione, sempre finito.

È dovuta a Paul Lévy (1925) una generalizzazione del teorema del limite centrale che si riduce alla generalizzazione della (A.10) secondo la linea delle generalizzazioni che hanno portato alla definizione delle dimensioni frattali.

Ferma restando la condizione (A.33) della media somma dei valori medi, il teorema stabilisce che: *l'estimatore s di dispersione finita della variabile aleatoria, somma rinormalizzata di k variabili aleatorie normalizzate x_i stocasticamente*

indipendenti, di dispersione finita s_i , è data da:

$$s^\alpha = \sum_{i=1}^k s_i^\alpha \quad (\text{A.35})$$

con α non necessariamente uguale a 2. La relazione (A.35) ha senso per ogni valore di α reale, positivo inferiore a due ($0 < \alpha \leq 2$).

Il parametro α caratterizza così una particolare distribuzione di Lévy e prende il nome di *parametro di Lévy*. Le variabili vengono dette anche *variabili di Lévy*.

È facile dimostrare che, nel caso di più gaussiane, la relazione (A.10) vale anche per l'intervallo *interquartile*; cioè:

$$s^2 = \sum s_i^2. \quad (\text{A.36})$$

Vedremo nel prossimo paragrafo che per una distribuzione di Cauchy vale la relazione:

$$s = \sum s_i \quad (\text{A.37})$$

e per un moto browniano gaussiano di Capitolo 4 vale la relazione:

$$\sqrt{s} = \sum \sqrt{s_i}. \quad (\text{A.38})$$

La gaussiana $\alpha = 2$, quindi, rappresenta il caso estremo di uno spettro continuo di comportamenti statistici. A ciascun valore di α positivo e minore di due corrisponde una particolare distribuzione statistica invariante.

Non soltanto: Lévy ha dimostrato che, per ciascun valore di α , esiste un teorema del limite centrale per il quale ciascuna delle distribuzioni corrispondenti rappresenta il *bacino di attrazione* per la somma stocastica di distribuzioni aleatorie appartenenti alla stessa classe individuata dal valore di α . Queste classi sono note con il nome di *classi di Lévy*.

Alla luce di queste considerazioni, un *random walk* del tipo di quelli incontrati nel Capitolo 6 in cui la lunghezza dei salti monodimensionali segue una distribuzione di Lévy [45] (quindi anche con momenti statistici non definiti, come avviene per le distribuzioni iperboliche di probabilità) si chiama, come abbiamo già visto nel già citato Capitolo 6, **volo di Lévy** (cfr. anche Capitolo 10). In realtà, occorre aggiungere che gli intervalli di tempo cui corrispondono i salti risultino finiti in media. Il termine *voli di Lévy* è stato introdotto da Mandelbrot [1] per indicare la generalizzazione del termine *random flight* ovvero *random walk* in uno spazio continuo.

A.3 Le distribuzioni log-normali

In una vasta classe di modelli matematici a cascata aleatoria, tra cui i modelli trattati nel Capitolo 7, si crea una cascata a partire da un insieme con densità costante ed

uniforme; ad ogni passo successivo, l'insieme viene suddiviso – in modo opportuno – in sottointervalli di passo di approssimazione δ_n e si moltiplica la densità di ciascun sottointervallo per un valore estratto a caso da una determinata distribuzione di probabilità. La densità aleatoria x del “bin” δ , a risoluzione $\lambda = 1/\delta$ del n -esimo passo della cascata, è dato dalla densità iniziale (che abbiamo spesso preso unitaria) moltiplicata per n variabili aleatorie x_i :

$$x \doteq \prod_{i=1}^n x_i. \quad (\text{A.39})$$

Occorre pertanto estendere opportunamente il teorema del limite centrale al prodotto di variabili aleatorie indipendenti per capire come le proprietà della variabile aleatoria x sono controllate dalle proprietà statistiche delle variabili aleatorie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Il problema non è difficile, grazie alle proprietà della funzione logaritmo. Infatti, volendo studiare le proprietà della variabile aleatoria (A.39), basta studiare le proprietà della funzione logaritmo:

$$y = \log x = \log \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n (\log x_i) = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (\text{A.40})$$

Ciò corrisponde ad una somma di variabili aleatorie a cui si può applicare la generalizzazione del teorema del limite centrale. Fatto ciò, si passa all'esponenziale. È evidente la convenienza di avere a disposizione una serie di risultati, già dimostrati, che si possono utilizzare.

Per definizione quindi, si dice log-normale una variabile aleatoria il cui logaritmo è distribuito come una gaussiana:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{log-normale.} \quad (\text{A.41})$$

Conviene ricordare esplicitamente che $\mu = \overline{\log x}$ e che σ è la varianza di $\log x$.

Per quanto detto, rovesciando il ragionamento, se le variabili y_i sono normali e per la loro somma $\sum y_i$ vale il teorema del limite centrale, le variabili x_i sono log-normali ed il prodotto $\prod x_i$ è log-normale.

Pertanto, la variabile prodotto di variabili log-normali è essa stessa una variabile log-normale; così come una gaussiana è invariante per somma, così una log-normale è invariante per prodotto.

In analogia con quanto detto nel § A.1.4 a proposito del teorema del limite centrale, affinché il prodotto di n variabili sia una log-normale, non è strettamente necessario che tutte le variabili x_i lo siano: per n abbastanza grande, è sufficiente che il loro logaritmo abbia varianza finita, così da rientrare nelle ipotesi di validità del teorema. Allora, la log-normale rappresenta il *bacino di attrazione* per il prodotto di variabili stocastiche indipendenti i cui logaritmi abbiano varianza finita. Ciò sottolinea l'importanza che la log-normale assume nei processi moltiplicativi.

A.4 Le funzioni caratteristiche

Per comprendere a fondo il significato delle generalizzazioni del teorema del limite centrale fatta nel § A.1.4, ricordiamo che la descrizione della somma di variabili aleatorie impone la convoluzione delle distribuzioni di probabilità che implicano a loro volta il prodotto delle loro trasformate di Fourier [150].

Consideriamo infatti la somma di due variabili aleatorie con distribuzione qualsivoglia $P(x)$ e $Q(x)$. La variabile somma mostra una distribuzione che è data dalla convoluzione delle due funzioni P e Q :

$$R(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x-y)dx = P * Q.$$

In generale un tale integrale non è affatto semplice da calcolare direttamente. Solo grazie alle trasformate di Fourier si può spesso arrivare al risultato in modo indiretto. Infatti, la trasformata di Fourier di $R(x)$ è il prodotto delle due trasformate di $P(x)$ e $Q(x)$: si può pertanto fare il prodotto delle due trasformate di Fourier e poi antitrasformare per ottenere $R(x)$. Lo stesso si può dire delle antitrasformate: l'antitrasformata della convoluzione è il prodotto di antitrasformate; quindi, ancora una volta, note le due antitrasformate di $P(x)$ e $Q(x)$ se ne fa il prodotto e poi si fa la antitrasformata per ottenere $R(x)$. In statistica si preferisce adottare questa seconda strada. La antitrasformata di Fourier di una densità di probabilità è detta *funzione caratteristica*.

Data una densità di probabilità $P(x)$, la sua funzione caratteristica è data da:

$$\mathcal{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}P(x)dx \quad (\text{A.42})$$

ed a sua volta, la distribuzione $P(x)$ si può ottenere dalla funzione caratteristica mediante l'integrale:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \mathcal{F}(t)dt \quad (\text{A.43})$$

(si noti come regola mnemonica che nella antitrasformata compare un segno più all'esponente, mentre nella trasformata compare – oltre al segno meno nell'esponente – anche il fattore $\frac{1}{2\pi}$). In sintesi si può affermare che, da un lato, alla somma di variabili aleatorie corrisponde il prodotto delle funzioni caratteristiche; note le funzioni caratteristiche P e Q di due distribuzioni aleatorie, si ottiene la loro convoluzione facendone il prodotto PQ ed ottenendo R con la (A.43).

A titolo di esempio ricaviamo esplicitamente la funzione caratteristica della gaussiana e verifichiamo che la somma di due gaussiane è ancora una gaussiana. Per comodità usiamo la (A.13) normalizzata e chiamiamola:

$$G_{0,1}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

La funzione caratteristica è:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{itu} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + itu} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-it)^2 - \frac{1}{2}t^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-it)^2} du \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

introducendo la variabile: $w = (u - it)$ si può riscrivere la (A.44) come:

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_0 e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

dove l'integrale corre lungo una linea parallela all'asse u nel piano w . Effettuando l'integrazione lungo opportune linee chiuse, si può dimostrare che il suo valore coincide con quello che si ottiene integrando lungo tutto l'asse reale, per cui l'espressione finale diventa:

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}. \quad (\text{A.45})$$

In conclusione, a meno di costanti moltiplicative, la funzione caratteristica di una gaussiana standard è ancora una gaussiana. Infatti, le cose cambiano un poco per le gaussiane vere del tipo (A.8) di § A.1.3. Infatti:

- moltiplicare la variabile originale per σ equivale ad introdurre nella funzione caratteristica la trasformazione: $\mathcal{F}(t) \rightarrow \mathcal{F}(\sigma t)$;
- sommare una costante m o μ significa introdurre nella funzione caratteristica un fattore e^{itm} o $e^{i\mu}$.

Pertanto la funzione caratteristica di una gaussiana (A.8) ha una forma del tipo:

$$\mathcal{F}(t) \simeq e^{itm} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

A questo punto, sommare due gaussiane significa moltiplicare le due funzioni caratteristiche. Si ha quindi:

$$\mathcal{F}(x_1 + x_2) \simeq e^{itm_1} e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} e^{itm_2} e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} = e^{it(m_1+m_2)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2} \quad (\text{A.46})$$

che è la funzione caratteristica di una gaussiana di valore medio $m = m_1 + m_2$ e varianza $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Per comodità possiamo quindi dire che la funzione caratteristica di una gaussiana $G_{0,1}$ è:

$$\mathcal{F}(G_{0,1}(x)) = e^{-|t|^2}. \quad (\text{A.47})$$

La funzione caratteristica di una funzione di Cauchy (A.31) è:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = e^{-|t|}. \quad (\text{A.48})$$

Come al solito Lévy propone una generalizzazione delle (A.47) e (A.48) da applicare ad una generica distribuzione di Lévy $P_\alpha(x)$ che soddisfi alla (A.35) di § A.1.4:

$$\mathcal{F}(P_\alpha(x)) = e^{-|t|^\alpha}. \quad (\text{A.49})$$

Dalla (A.49) si ricava immediatamente che:

$$\mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^k P_\alpha(x_i)\right) = e^{-k|t|^\alpha}. \quad (\text{A.50})$$

Dal che si deduce che:

- per una gaussiana: $\alpha = 2$ e (vedi il § A.1.4) $s^2 = \sum s_i^2$;
- per una distribuzione di Cauchy: $\alpha = 1$ e $s = \sum s_i$.

Per $\alpha > 2$ si ottengono funzioni con valori negativi, che non possono rappresentare densità di probabilità.

Il teorema del limite centrale viene pertanto generalizzato da Lévy per i valori nell'intervallo $1 \leq \alpha \leq 2$. Per valori $\alpha < 1$ non esiste alcun *limite centrale* perché – come abbiamo visto per le variabili aleatorie iperboliche – anche il valore medio diverge. Tuttavia, dato un numero qualsivoglia $s > 1$, per una qualsiasi variabile aleatoria x_i che segua una generica distribuzione di Lévy, si ha:

$$Pr(|x_i| \geq s) \div s^{-\alpha}.$$

Per la distribuzione del moto browniano del Capitolo 4, la legge di Einstein verifica che $\alpha = 1/2$ (in quella sede il parametro si chiamava parametro di Hurst).

Ciò ci permette di estendere alle distribuzioni iperboliche il significato di α ed accettare valori di α nell'intervallo:

$$0 < \alpha \leq 2.$$

Va sottolineato che $\alpha = 1$ è un valore singolare e abbiamo visto che nel Capitolo 8, a proposito dei multifrattali universali, esso viene trattato a parte.

Riassumendo: $\alpha = 2$ è caratteristico di generatori aleatori gaussiani; $\alpha = 1$ è caratteristico di generatori di Cauchy a varianza infinita; $0 \leq \alpha < 1$ è caratteristico di generatori multifrattali iperboliche con valore medio e varianza infiniti.

Il caso $\alpha = 0$ corrisponde al caso di un monofrattale rigido, di tipo stocastico, di cui, tuttavia il frattale geometrico costituisce un sottoinsieme. Un modello β è caratterizzato da $\alpha = 0$ in quanto non ci sono possibili fluttuazioni in geometria.

Il parametro di Lévy quindi, gioca un ruolo ineliminabile nella costruzione dei Multifrattali Universali da parte di Schertzer e Lovejoy trattati nel Capitolo 8.

A.5 Affidabilità delle stime

Alla luce di quanto discusso nei paragrafi precedenti, è opportuno studiare ora come si esegue normalmente la stima di una variabile stocastica e quale affidabilità si possa attribuire a tale stima.

Solitamente, per stimare la media di una variabile aleatoria $\{x_i\}$ si usa la espressione:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{\sum x_i}{N}$$

dove i valori x_i sono estratti da una distribuzione (ignota) $\{x_i\}$ (per il caso della distribuzione di Cauchy, che non ammette media, non ha senso porsi il problema di stimare il valor medio: sarà più opportuno stimare la moda o la mediana, ma ciò non ci interessa in questo momento).

Una misura della affidabilità della stima può essere la sua varianza, che non è la varianza delle distribuzione teorica della variabile aleatoria $\{x_i\}$.

Quando si ha a che fare con valori $\{x_i\}$ estratti da una gaussiana (A.8), la affidabilità del valor medio è:

$$s^2(\bar{x}) = s^2 \left(\frac{1}{N} \sum x_i \right) = \frac{1}{N} s^2 \left(\sum x_i \right). \quad (\text{A.51})$$

Poiché tutti i punti sono estratti dalla stessa distribuzione teoricamente gaussiana, si ha, per il teorema del limite centrale:

$$s^2(\bar{x}) = \frac{1}{N^2} \left(\sum s^2 x_i \right) = \frac{N}{N^2} s^2 = \frac{s^2}{N}.$$

Per una gaussiana l'errore sulla stima del valor medio decresce come $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Nel caso generale della formula (A.35), invece, la affidabilità della stima del valor medio si scrive:

$$s^\alpha(\bar{x}) = s^\alpha \left(\frac{1}{N} \sum x_i \right) = \frac{1}{N^\alpha} \left(\sum s^\alpha x_i \right) = \frac{1}{N^\alpha} N s^\alpha$$

cioè:

$$s^\alpha(\bar{x}) = \frac{s^\alpha}{N^{\alpha-1}}. \quad (\text{A.52})$$

Nel caso che i valori delle variabili $\{x_i\}$ siano estratte da una distribuzione di Cauchy ($\alpha = 1$) si ottiene per la media del campione *finito* x_m , per esempio:

$$s(x_m) = \frac{s^\alpha}{N^0} = s. \quad (\text{A.53})$$

Ovverosia, per una distribuzione di Cauchy l'errore sulla stima della media è indipendente dal numero N di stime indipendenti eseguite.

Nel caso che i valori delle variabili $\{x_i\}$ siano estratte da una distribuzione caratterizzata da $\alpha = \frac{1}{2}$, si ottiene:

$$\sqrt{\bar{x}} = \sqrt{Ns}.$$

Da cui:

$$s_{\text{brown}}(\bar{x}) = Ns_{\text{brown}}. \quad (\text{A.54})$$

Dal Capitolo 4, riconosciamo immediatamente che questo è il caso del moto browniano gaussiano. Il parametro di Hurst coincide concettualmente con il parametro di Lévy α . Nello studio del moto browniano $n\tau$ era l'intervallo di tempo dopo il quale si osservavano le nuove posizioni e gli spostamenti casuali e l'intervallo di tempo usato per misurare gli spostamenti ξ_i .

È molto chiaro che, allungando l'intervallo di tempo tra due osservazioni, la indeterminazione sulla posizione media e sullo spostamento medio cresce. Infatti le traiettorie del moto browniano, per il teorema di Louville, al limite riempiono tutto lo spazio.

È anche molto chiaro che il moto browniano frazionale del Capitolo 4 si inserisce perfettamente nel panorama costruito con la estensione di Lévy del teorema del limite centrale.

A.6 Distribuzioni bivariate gaussiane

Prima di addentrarci nella discussione delle distribuzioni multivariate (e qui limitate al solo caso delle bivariate), occorre richiamare il concetto di probabilità composta di eventi stocasticamente indipendenti.

Qualora un evento E risulti dal concorso simultaneo di due o più eventi E_1, E_2, \dots , si può calcolare la probabilità composta di E qualora si conoscano le probabilità semplici di E_1, E_2, \dots . Prendiamo come semplice esempio illustrativo l'estrazione di due palline bianche ciascuna da due differenti urne di cui siano note le composizioni. Se la prima urna contiene n_1 palline di cui a_1 bianche mentre la seconda n_2 di cui a_2 bianche, il numero di casi possibile è pari a $n_1 n_2$ mentre il numero di casi favorevoli è $a_1 a_2$. Si ha allora:

$$p_{1,2} = \frac{a_1 a_2}{n_1 n_2} = \frac{a_1}{n_1} \frac{a_2}{n_2} = p_1 p_2. \quad (\text{A.55})$$

Abbiamo così dedotto, grazie ad un semplice esempio, la regola generale per la composizione di probabilità a priori: *la probabilità che due eventi incorrelati si verifichino contemporaneamente è uguale al prodotto delle singole probabilità.*

Si è dovuto però precisare che gli eventi devono essere *incorrelati o stocasticamente indipendenti*, vale a dire che il verificarsi dell'uno non alteri la probabilità di verificarsi dell'altro. Se questo non è vero la (A.55) va adeguatamente modificata.

In statistica, purtroppo, non esistono soltanto variabili aleatorie stocasticamente indipendenti: esistono anche moltissime variabili che sono tra loro correlate, pur senza mostrare una interdipendenza funzionale.

È necessario avere pertanto gli strumenti anche per trattare questi casi.

Per farla breve, supponiamo quindi di avere due variabili aleatorie $\{x'_i\}$ e $\{y'_i\}$ distribuite normalmente attorno ai valori medi \bar{x}' e \bar{y}' con varianze $\sigma_{x'}^2$ e $\sigma_{y'}^2$. Le probabilità marginali si scrivono:

$$P(x') = \frac{1}{\sigma_{x'}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x'-\bar{x}')^2}{2\sigma_{x'}^2}}; \quad P(y') = \frac{1}{\sigma_{y'}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y'-\bar{y}')^2}{2\sigma_{y'}^2}}.$$

Se le variabili $\{x'_i\}$ e $\{y'_i\}$ sono stocasticamente indipendenti e perciò completamente scorrelate, la distribuzione aleatoria congiunta dei punti (x'_i, y'_i) nello spazio bidimensionale è il semplice prodotto delle due probabilità marginali:

$$P(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma_{x'}\sigma_{y'}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x'-\bar{x}')^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{(y'-\bar{y}')^2}{\sigma_{y'}^2} \right]} \tag{A.56}$$

ovverosia, usando le variabili ridotte $x = \frac{x'-\bar{x}'}{\sigma_{x'}}$ e $y = \frac{y'-\bar{y}'}{\sigma_{y'}}$:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}. \tag{A.57}$$

Se invece le variabili *non* sono stocasticamente indipendenti, non necessariamente legate da una relazione funzionale, bensì statisticamente interdipendenti, come ad

Statura (pollici)	dei padri																Totale		
	58,5	59,5	60,5	61,5	62,5	63,5	64,5	65,5	66,5	67,5	68,5	69,5	70,5	71,5	72,5	73,5		74,5	75,5
52,5	—	—	—	0,25	0,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,5
53,5	—	—	—	0,25	0,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,5
54,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
55,5	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
56,5	0,25	0,25	—	0,25	1,25	0,5	—	1	0,5	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—	4,5
57,5	0,25	0,25	0,5	1,5	4,5	1	1,5	1,5	2,5	—	0,5	0,5	—	—	—	—	—	—	14,5
58,5	0,25	0,75	0,5	0,75	0,75	1	1,75	1,25	5	2,75	0,5	0,25	—	—	—	—	—	—	15,5
59,5	0,5	1	2	—	6	4,75	5	6,25	11,75	3,5	3,5	2	1,75	0,5	—	—	—	—	48,5
60,5	0,75	0,75	—	2,5	8	6,25	12,5	18,25	20,25	11	9	4,75	2,5	1,25	1,25	—	—	—	99
61,5	—	0,5	1,75	2	9,75	11,5	13	23,75	23,75	20,25	16,5	10,25	4,25	3	1,25	—	—	—	141,5
62,5	—	1	2,25	2	4,5	12	22,75	26	33	28,25	24,75	14,25	13,75	4,75	0,75	0,5	—	—	190,5
63,5	—	—	0,25	2	6	8,25	11	27,25	35,75	37,25	31,5	26,25	16,25	7,75	1,5	0,75	0,25	—	212
64,5	—	—	0,25	2,5	1,75	3,25	9,25	23	18,75	28,5	33	34,25	24,5	11,75	5,5	1	0,25	1	198,5
65,5	—	—	—	0,5	1	0,5	11	12,25	9,25	19,75	30	26,5	22,25	15	4,75	3,75	2	1	159,5
66,5	—	—	—	0,5	0,5	1,5	3,25	7,25	8,75	16	26,25	26,75	20,5	18,5	7,75	4,25	0,25	0,5	142,5
67,5	—	—	—	—	—	—	1	5,75	7	4	14,25	13,25	12	11,25	4,5	3,75	0,75	—	77,5
68,5	—	—	—	—	0,25	0,25	0,25	0,25	1,5	3	5,5	4,25	5,75	5,25	3,75	2,5	1,5	2	36
69,5	—	—	—	—	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	1	2,5	6,5	2,25	2,75	2	1	—	19,5
70,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,75	0,25	4,5	0,75	1,25	0,75	0,25	—	9,5
71,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,5	—	0,5	0,5	1,5	0,75	0,25	—	4
72,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Totale	2	4,5	7,5	14,5	45	51,5	92,5	155	178	175	199,5	166	135	82,5	36,5	20	6,5	4,5	1376

Fig. A.2 Frequenze di correlazione e di regressione

esempio la altezza dei genitori e la altezza dei figli – cresciuti senza particolare ausilio di vitamine o di... coadiuvanti chimici speciali – illustrata in Fig. A.2, (nella figura è indicato il confine della regione di maggiore concentrazione dei valori di altezza attorno ai valori medi), la (A.57) si scrive:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (\text{A.58})$$

dove però ora ξ è una forma quadratica generica del tipo:

$$\xi^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

È utile introdurre il cambiamento di variabile:

$$z = c(y - rx); \quad \xi^2 = x^2 + z^2. \quad (\text{A.59})$$

Con questa ultima assunzione, la prima delle (A.59) definisce la *curva di regressione* delle variabili y e x per le quali esistono n punti nel piano (x, y) . La curva di regressione ed il valore di r si possono determinare sperimentalmente.

Detto ρ il valor medio di r , esso è definito come:

$$\rho = \bar{xy} = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j. \quad (\text{A.60})$$

La varianza di z risulta allora:

$$\sigma_z^2 = (1 - \rho^2).$$

La distribuzione marginale di z diventa scorrelata da x ed è data da:

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} = P(x, y)$$

per cui la distribuzione (A.58) diventa il prodotto delle due distribuzioni marginali scorrelate:

$$P(x, y) = p(x)p(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}}. \quad (\text{A.61})$$

Partendo da x' e y' , la determinazione di ρ si ottiene mediante una estensione della (A.60):

$$\rho = \frac{\overline{x'y'}}{\sigma_{x'}\sigma_{y'}} = \frac{\sum_{i,j=1}^n x'_i y'_j}{\sigma_{x'}\sigma_{y'}}. \quad (\text{A.62})$$

Per n misure, il valore di ρ è distribuito *quasi* gaussianamente con varianza:

$$\sigma_\rho = \frac{1 - \rho^2}{n - 1}. \quad (\text{A.63})$$

Il significato delle bivariate gaussiane qui considerato si mette bene in evidenza graficamente. Per una gaussiana ridotta monodimensionale, le fluttuazioni attorno allo zero hanno varianza $\sigma^2 = 1$. La probabilità che un evento della distribuzione cada nell'intervallo $(-1, +1)$ è del 68.3%. L'intervallo $(0, 1)$ rappresenta, per convenzione, l'incertezza con cui si determina il valore $p(x) = 0$ che è il valore di aspettazione della media di $x' - \bar{x}'$.

Per il caso della distribuzione congiunta bivariata di (x, y) , con x e y non correlate tra loro, il 68.3% è la probabilità che un punto (x, y) cada entro un cerchio di centro $(0, 0)$ e di raggio $(x^2 + y^2) \leq 1$. Tale cerchio rappresenta la incertezza con cui si determina il punto $(0, 0)$ e si chiama *cerchio di concentrazione*.

La situazione è illustrata nella Fig. A.3a.

Nel caso, invece, della distribuzione congiunta bivariata di x e y con coefficiente di correlazione ρ , il valore 68.3% rappresenta la probabilità che un punto (x, y) cada entro l'ellisse di centro $(0, 0)$ definito dalla disequazione:

$$\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2} \leq 1. \tag{A.64}$$

L'ellisse è compreso in un quadrato di lato $l = 2$ e si chiama *ellisse di concentrazione*. La regione di indeterminazione non è ricavabile dalla sola conoscenza delle distribuzioni marginali. Infatti, se si integra la (A.61) in x o in y , il coefficiente di correlazione ρ scompare. Esistono punti (x, y) appartenenti all'ellisse di concentrazione che distano più di 1 dal centro. La situazione è illustrata nella Fig. A.3b.

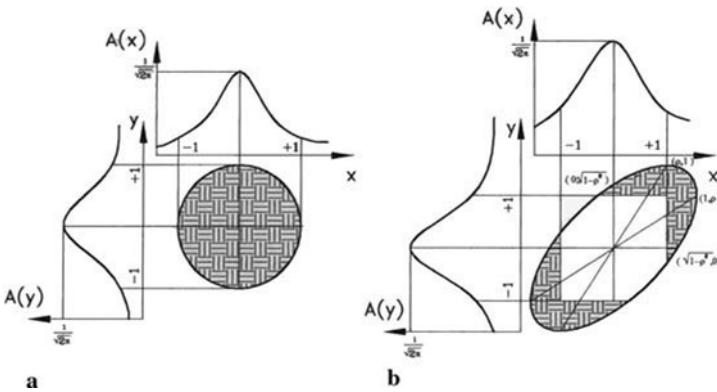


Fig. A.3 (a) Cerchio di concentrazione di una distribuzione bivariata senza correlazione; (b) ellisse di concentrazione di una distribuzione bivariata in presenza di un coefficiente di correlazione ρ

A.7 Funzioni e integrali di correlazione

Pensiamo di eseguire l'analisi statistica di m variabili aleatorie $\{y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ (per esempio gli impulsi di m particelle prodotte in una interazione nucleare di alta energia; oppure le energie di m fotoni emessi da una superficie). Assumiamo che la variabile y possa assumere valori nell'intervallo $\Delta = y_{\max} - y_{\min}$ e che questo dominio venga suddiviso in intervallini di ampiezza: $\delta = \frac{\Delta}{n}$.

Per comodità prendiamo come esempio una interazione $a + b \rightarrow \sum c_i$ e chiamiamo *rapidità* la variabile y_i . Ogni particella ha quindi rapidità y_i . Oltre alle $N_1 = m$ particelle prodotte, possiamo costruire N_2 "coppie" di particelle prodotte; N_3 "terne" di particelle prodotte, \dots N_q " q -pletti" di particelle prodotte (è più che chiaro che esiste *un solo* " m -pletto" di particelle).

Possiamo pertanto costruire la distribuzione di densità di probabilità di "particella singola" nello spazio delle rapidità (detta semplicemente "distribuzione di particella singola") ρ_1 , definita come:

$$\rho_1 = \frac{1}{m} \frac{dN}{dy_1} = \sum_{i=1}^m \delta(y - y_i) \quad (\text{A.65})$$

ovvero la "percentuale media" di particelle che cadono nell'intervallo di rapidità compreso tra y_i e $y_i + \delta$. Nella (A.65), y_i indica una qualsiasi posizione all'interno dell'intervallino $\delta_i(y)$ (cfr. la distribuzione rettangolare del § A.2.1).

Si può costruire la "densità a due particelle" ρ_2 , definita come:

$$\rho_2 = \rho_2(y_i, y_j) = \frac{1}{m} \frac{d^2N}{dy_1 dy_2} = \sum_{i,j} \delta(y - y_i) \delta(y - y_j). \quad (\text{A.66})$$

In generale si può costruire la densità a q particelle definita come:

$$\begin{aligned} \rho_q &= \rho_q(y_i, y_j, \dots, y_q) = \frac{1}{m} \frac{d^q N}{dy_1 dy_2 \dots dy_q} = \\ &= \sum_{i,j} \left(\prod_{p=1}^q \delta(y - y_p) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Dalle relazioni che definiscono le densità di probabilità si ricavano i coefficienti di correlazione o, meglio, indicatori più appropriati che si chiamano *cumulanti*. Per esempio:

$$C_2(y_1, y_2) = \rho_2(y_1, y_2) - \rho_1(y_1) \rho_1(y_2). \quad (\text{A.68})$$

La loro utilità si vede immediatamente in quanto, se *non* c'è correlazione, le distribuzioni si possono fattorizzare per cui è $\rho(y_1, y_2) = \rho_1(y_1) \rho_1(y_2)$, da cui $C_2 = 0$. Rimandando i dettagli a referenze specializzate [148] scriviamo semplicemente le

espressioni di C_3 e C_4 , ponendo $y_i = i$ per semplicità di scrittura:

$$C_3(y_1, y_2, y_3) = \rho_3(1, 2, 3) - \rho_2(1, 2)\rho_1(3) - \rho_2(1, 3)\rho_1(2) + \rho_2(2, 3)\rho_1(1) + 2\rho_1(1)\rho_1(2)\rho_1(3) \quad (\text{A.69})$$

$$C_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = \rho_4(1, 2, 3, 4) - \sum_j \rho_3(a, b, c)\rho_1(j) + \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_2(i, j) + 2 \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_1(i)\rho_1(j) - 6 \prod_{i=1}^4 \rho_1(i) \quad (\text{A.70})$$

dove $i, j = 1, 2, 3, 4$ e a, b, c, d sono gli indici $1, 2, 3, 4$ non usati nella sommatoria.

Dalle (A.68), (A.69), (A.70), si ricavano le seguenti espressioni:

$$\rho_2(y_1, y_2) = C_2(1, 2) + \rho_1(1)\rho_1(2) \quad (\text{A.71})$$

$$\rho_3(y_1, y_2, y_3) = C_3(1, 2, 3) - 2 \prod_{i=1}^3 \rho_1(i) + \sum_{i=1}^3 \rho_2(a, b)\rho_1(i) \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{aligned} \rho_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = & C_4(1, 2, 3, 4) + 6 \prod_{i=1}^4 \rho_1(i) + \\ & + \sum_j \rho_3(a, b, c)\rho_1(j) + \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_2(i, j) + \\ & - 2 \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_1(i)\rho_1(j). \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Molto spesso si usano le *grandezze normalizzate*:

$$r_q(1, 2, \dots, q) = \frac{\rho_q(1, 2, \dots, q)}{\prod_{i=1}^q \rho_1(i)} \quad R_q = \frac{C_q(1, 2, \dots, q)}{\prod_{i=1}^q \rho_1(i)}. \quad (\text{A.74})$$

Queste le definizioni. Veniamo ora al *come* questi indicatori statistici vengono costruiti. Cominciamo da ρ_2 : abbiamo N_s eventi (spari) di un campione statistico, ciascuno con m sfere, c_1, c_2, \dots, c_m . Ciascun evento è rappresentato quindi da un vettore $\{y_i\} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

- Prepariamo una matrice vuota $\rho_2(y_1, y_2)$ destinata a generare la correlazione.
- Prendiamo il primo evento: scegliamo una coppia generica (y_i, y_j) ed aggiungiamo una unità alla matrice $\rho_2(y_1, y_2)$, nella casella $[y_i, y_j]$. Quante volte possiamo fare tale operazione? La eseguiamo $m(m-1)$ volte. Infatti, possiamo scegliere la rapidità della prima particella in m modi diversi e la rapidità della seconda particella in $m-1$ modi diversi (così facendo, ogni coppia è stata contata due volte – *double counting* – ma questo è un difetto facilmente riparabile dividendo per 2)⁴.

⁴ Qualora si trattasse di particelle con carica elettrica di segno diverso – diciamo m^+ positive e m^- negative, la costruzione di $\rho_2(+, -)$ si farebbe con m^+m^- contributi per evento.

- Ripetiamo il procedimento N_s volte, per quanti sono gli eventi del campione [a rigore m potrebbe cambiare da evento ad evento].
- Infine facciamo la media di quanto ottenuto dividendo ogni contenuto delle caselle $[y_i, y_j]$ per N_s (per $2N_s$ se vogliamo tener conto del *double counting*). Fatto questo esercizietto, sappiamo come costruire $\rho_q(1, 2, \dots, q)$ a q particelle.
- Dal primo evento di m particelle con vettore rapidità $\{y_i\}$ prendiamo un insieme ordinato di q valori (y_1, y_2, \dots, y_q) ed aggiungiamo “uno” alla matrice $\rho_q(y_1, y_2, \dots, y_q)$, nella cella $[y_1, y_2, \dots, y_q]$. Quante volte possiamo fare questa operazione? La possiamo fare $[m(m-1)(m-2)\dots(m-q+1)]$ volte. Infatti possiamo scegliere la rapidità della prima particella in m modi diversi; la rapidità della seconda particella in $(m-1)$ modi diversi, fino ad avere $(m-q+1)$ rapidità rimaste non ancora scelte (a rigore ogni scelta può essere fatta q volte se si permettono tutte le permutazioni delle q particelle senza “ordinarle” come da noi suggerito).
- Ripetiamo il procedimento N_s volte, per quanti sono gli eventi del campione (ancora una volta, a rigore, m potrebbe cambiare da evento ad evento, consci che gli eventi con $m \leq q-1$ particelle *non* possono contribuire a ρ_q !).
- Infine facciamo la media di quanto ottenuto dividendo ogni contenuto delle caselle $[y_i, y_j, \dots, y_q]$ per $N_{s,q}$ (per $qN_{s,q}$ se vogliamo tener conto del *conteggio multiplo*).

Interessiamoci ora di un aspetto puramente numerologico: non preoccupiamoci, cioè, degli indicatori di correlazione a 2, 3, \dots , q particelle, bensì preoccupiamoci soltanto di *contare* il numero di tutte le coppie possibili, di tutte le terne possibili, \dots , di tutti i q -pletti possibili.

L'estimatore statistico di questi conteggi si chiama *momento (statistico) binomiale* (o momento fattoriale non normalizzato) F_Q .

Infatti i conteggi delle coppie si possono ricondurre ai seguenti integrali fatti su un dominio di integrazione che è un ipercubo nello spazio delle fasi, di spigolo Δ_i e quindi di volume Ω_2 , per le coppie, Ω_3 per le terne, \dots , Ω_q per i q -pletti:

$$\int_{\Omega_2} dy_1 dy_2 \rho_2(y_1, y_2) = \overline{m(m-1)} = F_2 \quad (\text{A.75})$$

$$\int_{\Omega_3} dy_1 dy_2 dy_3 \rho_3(y_1, y_2, y_3) = \overline{m(m-1)(m-2)} = F_3 \quad (\text{A.76})$$

$$\int_{\Omega_q} dy_1 \dots dy_q \rho_q(y_1, \dots, y_q) = \overline{m(m-1)(m-2)\dots(m-q+1)} = F_q. \quad (\text{A.77})$$

Ovviamente è:

$$\int_{\Omega} dy = \overline{m} = F_1.$$

Se ricordiamo che, all'inizio del paragrafo dalle densità a più particelle abbiamo ricavato i cumulanti statistici, altrettanto, con formule analoghe alle (A.68), (A.69), (A.70), si definiscono i *momenti cumulanti binomiali* ovvero *momenti cumulanti*

fattoriali non normalizzati K_q :

$$K_2 = \overline{m(m-1)} - \bar{m}^2 \tag{A.78}$$

$$K_3 = \overline{m(m-1)(m-2)} - 3\bar{m} \cdot \overline{m(m-1)} - \bar{m}^3 \tag{A.79}$$

$$\begin{aligned} K_4 = & \overline{m(m-1)(m-2)(m-3)} + \\ & - 4\bar{m} \cdot \overline{m(m-1)(m-2)} + \\ & - 3\overline{m(m-1)}^2 + \\ & - 6\overline{m(m-1)}\bar{m}^2 - \bar{m}^4 \end{aligned} \tag{A.80}$$

o, per il caso generale [149]:

$$\begin{aligned} K_q = & q! \left[(-1)^{(m_1-1)} (m_1-1)! \delta \left(q - \sum_{j=1}^q m_j \right) \right] \cdot \\ & \cdot \prod_{j=1}^m \frac{1}{(m_j - m_{j+1})!} \left(\frac{\overline{F}_q}{q!} \right)^{(m_j - m_{j-1})} . \end{aligned} \tag{A.81}$$

Va specificato che la sommatoria $\sum_{j=1}^q$ corre su tutti i valori (ricordiamo “ordinati”) $m_j \geq m_{j+1}$. Per esempio, per m_1 , $j = 1, 2, \dots, q$; per m_2 , $j = 2, 3, \dots, q$; per m_j , $j = j+1, j+2, \dots, q$.

I momenti cumulanti binomiali K_q misurano il discostarsi da una statistica di variabili casuali stocasticamente indipendenti. Per variabili *non* correlate, i momenti cumulanti binomiali si annullano.

Vale la pena di sottolineare che, invertendo la (A.81), i momenti binomiali (non normalizzati) F_q si possono scomporre in termini di momenti cumulanti binomiali ottenendo:

$$\begin{aligned} F_q = & q! \left[\delta \left(q - \sum_{j=1}^q m_j \right) \right] \cdot \\ & \cdot \prod_{j=1}^m \frac{1}{(m_j - m_{j+1})!} \left(\frac{K_q}{q!} \right)^{(m_j - m_{j-1})} \end{aligned} \tag{A.82}$$

con le stesse specificazioni fatte per la (A.81).

A.8 Funzioni generatrici

La relazione tra momenti binomiali e momenti cumulanti binomiali si semplificano e diventano più evidenti introducendo le funzioni generatrici $Q(z)$ definite come:

$$Q(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-z)^q}{q!} F_q \quad (\text{A.83})$$

$$\log Q(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-z)^q}{q!} K_q \quad (\text{A.84})$$

(si noti che nella (A.83) la sommatoria parte da $q = 0$ mentre nella (A.84) la sommatoria parte da $q = 1$).

Qualche semplice esempio illustra l'utilità delle (A.83) e (A.84).

Prendiamo una distribuzione di Poisson (A.7), scritta per la osservazione di m eventi che fluttuano attorno al valore \bar{m} :

$$P_m(\bar{m}) = \frac{\bar{m}^m}{m!} e^{-\bar{m}}.$$

Per essa la funzione generatrice è:

$$Q(z) = e^{-z\bar{m}}; \quad \log Q(z) = -z\bar{m}$$

da cui:

$$\begin{aligned} F_1 = \bar{m}; & \quad K_1 = \bar{m} \\ F_2 = F_3 = \dots = F_q = 0; & \quad K_2 = K_3 = \dots = K_q = 0. \end{aligned}$$

La distribuzione di Poisson descrive una distribuzione a *fluttuazione minima*. Si noti infatti che, dalla (A.78), per m grande e pertanto per $m \sim m - 1$, K_2 diventa la dispersione:

$$K_2 = D \sim \overline{m^2} - \bar{m}^2.$$

Un secondo esempio è fornito dalla distribuzione binomiale negativa [151]:

$$P_m^k = \frac{(m+k-1)! \left(\frac{\bar{m}}{k}\right)^m}{m!(k-1)! \left(1 + \frac{\bar{m}}{k}\right)^{m+k}} \quad (\text{A.85})$$

la cui funzione generatrice è:

$$Q_k(z) = \left(1 + \frac{z\bar{m}}{k}\right)^k.$$

I momenti binomiali F_q sono semplicemente:

$$F_1 = 1; F_2 = 1 + \frac{1}{k}; F_3 = 1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}; F_4 = 1 + \frac{11}{k^2} + \frac{6}{k^3};$$

$$F_5 = 1 + \frac{10}{k} + \frac{35}{k^2} + \frac{50}{k^3} + \frac{24}{k^4}$$

e i momenti cumulanti binomiali sono semplicemente:

$$K_q = \frac{(q-1)!}{k^{q-1}}$$

cioè:

$$K_1 = 1; K_2 = \frac{1}{k}; K_3 = \frac{1}{k^2}; \dots$$

A.9 Conclusioni

Gli argomenti di statistica possono facilmente riempire grossi volumi ma qui si è voluto raccogliere gli elementi essenziali ed indispensabili per affrontare i problemi e soprattutto per giustificare il metodo usato per la loro trattazione.

Per i lettori che vogliono approfondire gli aspetti statistici e probabilistici degli svariati problemi che si possono incontrare nella vita di tutti i giorni e nella ricerca scientifica, da un punto rigorosamente matematico di livello avanzato si suggerisce [42].

Bibliografia

1. B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman and Co., 1983)
2. J. Perrin: *La discontinuité de la Matière*: Revue du Mois **I**, 323 (1906)
3. (a) J. Feder, A. Aharony: *Fractals in Physics: in honor of B.B. Mandelbrot* (North-Holland, 1989); (b) L. Pietronero: *Theoretical Concepts for Fractal Growth*: in *Fractals in Physics*, ibidem p. 279
4. (a) E. Ising: Z. Phys bf 31, 253 (1925); (b) L. Onsager: Phys. Rev. **65**, 177 (1944); (c) R.J. Baxter *Exactly solved models in Statistical Mechanics* (Academic Press, 1982)
5. M.V. Berry: *The New Scientist*, 27 gennaio 1983
6. M. Davis, P.J.E. Peebles: Astron. Journ. **267**, 465 (1983)
7. S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972)
8. Y. Barishev, P. Teerikorpi *Discovery of Cosmic Fractals* (World Scientific, 2002)
9. L. Pietronero: Physica **A144**, 257 (1987)
10. J. Feder: *Fractals* (Plenum Press, New York, 1988)
11. (a) F. Hausdorff: Mathematische Annalen **LXXIX**, 157 (1919); (b) A.S. Besicovitch: Journ. London Math. Soc. **IX**, 126 (1934); (c) A.S. Besicovitch: Mathematische Annalen **CX**, 321 (1935)
12. B.B. Mandelbrot: *Fractals: Form, Chance and Dimension* (W.H. Freeman, 1977). Questa edizione è diversa da quella originale francese *Les Objects Fractals* (nel consultare una traduzione italiana bisogna fare attenzione a quale delle due edizioni ci si riferisca)
13. B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, (W.H. Freeman, 1982)
14. Y. Gefen, B.B. Mandelbrot, A. Aharony: Phys. Rev. Lett. **50**, 77 (1980)
15. J.M. Gordon et al.: Phys. Rev. Lett. **56**, 2280 (1986)
16. M.V. Berry, Z.V. Lewis: Proc. R. Soc. London **A370**, 459 (1980)
17. R.D. Mauldin: *Dimension and Entropies in Chaotic Systems* (Springer, 1986), p. 28
18. R.F. Voss: *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (Plenum Press, 1985), p. 1
19. (a) M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjio, Y. Sawada: Phys. Rev. Lett. **53**, 286 (1984); (b) Phys. Rev. **A32**, 3814 (1985); vedi anche L. Pietronero, E. Tosatti *Fractals in Physics* (Ed. North Holland, 1985)
20. H. Poincaré: *Calcul des probabilité* (Gauthiers-Villars, 2^a ed., 1912)
21. F. Gassmann, R. Kotz, A. Wokaun: Europhysicnews **34/5**, 176 (2003)
22. R. Dawkins: *The Blind Watchmaker* (Norton, 1996)
23. M. Mitchell: *Introduction to Genetic Algorithms* (M.I.T. Press, 1996); R. Haupt, S.E. Haupt: *Practical Gnetaic Algorithms* (Wiley, 1998)
24. H. Titchmarsh: *The Theory of Functions* (Oxford University Press, 1958), p. 351
25. A. Einstein: *Investigation on the Theory of Brownian Movement* (Dover, 1926). Gli articoli originali sono: (a) A. Einstein: Annalen der Phys. **17**, 548 (1905); (b) ibidem **19**, 371; (c) 289 (1906); (d) Zeit. f. Elektrochemie **13**, 41 (1907); (e) ibidem **14**, 235 (1908)

26. H.E. Hurst, R.P. Black Y.M. Simaika: *Long-term Storage: an experimental Study* (Constable, 1965)
27. B.B. Mandelbrot and Van Ness: *SIAM Rev.* **10**, 422 (1968)
28. B.B. Mandelbrot: *Water Resour. Res.* **7**, 543 (1971)
29. H. Hentschel, I. Procaccia: (a) *Phys. Rev. A* **29**, 1461 (1986); (b) vedi anche: *Phys. Rev.* **A27**, 1266 (1983)
30. B.B. Mandelbrot: *Statistical Models and Turbulence*, *Lectures Notes in Physics* **12**, 333 (1972)
31. P. Bak: *Physics Today* **39**, 38 (1986)
32. C. Meneveau, K. Sreenivasan: *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1424 (1987)
33. G. Boca, G. Corti, G. Gianini, S.P. Ratti, G. Salvadori et al.: *Il Nuovo Cimento* **A105**, 865 (1992)
34. B.B. Mandelbrot: *Journ. Fluid Mech.* **62**, 331 (1974)
35. P. Billingsley: *Ergodic Theory and Information* (Wiley, 1965)
36. P. Grassberger: *Phys Lett. A* **97**, 227 (1983)
37. U. Frisch, G. Parisi: *Turbulence and Predictability in Geophysics Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (North Holland, 1985), p. 88, p. 88
38. D. Katzen, I. Procaccia: *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1169 (1987)
39. M.J. Sewell: *Maximum and Minimum Principles* (Cambridge University Press, 1990)
40. B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness: *S.I.A.M. Rev.* **10**, 422 (1968)
41. S. Lovejoy: (a) *Proc. XXth Conf. on Radar Met.*, American Meteorological Society, Boston (1986), p. 476; (b) *Science* **216**, 186 (1982); (c) *Hanille Blanche* **516**, 413 (1983)
42. W. Feller: *Introducion to Probability Theory and its applications*, vol. II (Wiley, 1971)
43. (a) B.B. Mandelbrot, J.R. Wallis: *Water Resour. Res.* **4**, 909 (1968); (b) H.B. Prosper: *Phy. Rev.* **D37**, 1153 (1997); (c) *ibidem* **D38**, 3584 (1988)
44. S. Lovejoy, B.B. Mandelbrot: *Tellus* **374**, 209 (1985)
45. W. Paul, J. Baschnagel: *Stochastic Processes From Physics to Finance* (Springer, 1999)
46. G.F. Salvadori: *Multifrattali Stocastici: Teoria e Applicazioni*, Tesi di Dottorato in Matematica Applicata ed Operativa, Università di Pavia (1993)
47. A.G. Svesnikov, A.N. Tichinov: *Teoria delle Funzioni di Variabile Complessa* (Riuniti, 1984)
48. H. Callen: *Thermodynamics* (Wiley, 1960)
49. M. Ghil, O. Berni, G. Parisi: *Turbulence and Predictability in Geophysical Fields* (North Holland, 1985), p. 84
50. (a) D. Schertzer, S. Lovejoy, R. Visvanathan, D. Lavalley, J. Wilson: *Universal Multifractals in Turbulence*, in: *Fractal Aspects in Materials: Disordered Systems* (Eds. D.A. Weitz, L.M. Sanders, B.B. Mandelbrot, MRS, Pittsburg, 1988), p. 267; (b) D. Schertzer, S. Lovejoy, D. Lavalley, F. Schmitt: *Universal Hard Multifractals, Theory and Observations: in Nonlinear Dynamics of Structures* (Eds. R.Z. Sagdeev, U. Frisch, F. Hussain, S.S. Moiseev, N.S. Erokhin, World Scientific, Singapore, 1994), p. 213; (c) S. Lovejoy and D. Schertzer: in *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological Modeling*, (Ed. A.W Kundzewicz Cambridge University Press, 1995), p. 62; (d) S. Lovejoy, D. Schertzer: *J. Geophys. Res.* **95**, 2021(1990)
51. T.C. Hasley, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shraimian: *Phys. Rev.* **A33**, 1141 (1986)
52. S. P. Ratti et al., *Z. Phys.* **C61**, 229 (1994)
53. S. Lovejoy, D. Schertzer: comunicazione privata
54. H.G. Schuster: *Deterministic chaos* (Physik Verlag Weinheim, 1984)
55. M.W. Hirsh, S. Smale : *Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra* (Accademic Press, 1965)
56. V.I. Arnold, A. Avez: *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (W.A. Benjamin, 1968)
57. H. Goldstein: *Meccanica Classica* (Zanichelli, 1991)
58. D. Ruelle: *Math. Intelligence* **2**, 126, (1980)
59. D. Ruelle : *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, 1989)

60. D. Ruelle, J-P. Eckmann: *Rev. Mod. Phys.* **57**, 3, Part 1 (1985)
61. W.H. Press et al.: *Numerical recipes* (Cambridge University Press, 1986)
62. K.S. Kunz: *Numerical Analysis* (McGrawHill, 1957)
63. P.S. Laplace : *Essai Philosophique sur les Probabilitès* (Coucier, Paris, 1814)
64. Videocassetta: *Ifrattali* prodotta da Scientific American e pubblicata da Mondadori (mostrata agli studenti del corso)
65. H. Poincaré: *Science and Method* (Thoemmes Press, 1914)
66. J. Ford: *Physics Today*, april 1983
67. Barry Saltzman: *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I*, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **19**, 329 (1962)
68. Edward N. Lorenz: *Maximum Simplification of the Dynamic Equations*, *Tellus*, **12**, 243 (1960)
69. C. Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos and Strange Attractors* (Springer, 1988)
70. E.N. Lorenz: *Jou. Atm. Sciences* **20**, 130 (1963)
71. Edward N. Lorenz: *Deterministic Nonperiodic Flow*, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130 (1963)
72. Steven H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Co. (1994)
73. S. Eubank, D. Farmer: *An Introduction to Chaos and Randomness*, *Lectures in Complex systems*, SFI Studies in the Sciences of Complexity, Lect. Vol.II (Erica Jen, Addison-Wesley, 1990)
74. Si veda ad esempio: A.I. Khinchin, A. Gamow: *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics* (Dover, 1999)
75. A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman: *Regular and Stochastic Motion* (Springer, 1983)
76. G. Benettin, L. Galgani, J.M. Strelcyn: *Phys. Rev.* **A14**, 2338 (1976)
77. J. Kaplan J. Yorke: *Springer Lect. Notes in Math.* **730**, 204 (1979)
78. P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987)
79. (a) T. Kohonen: *Self-Organization and Associative Memories* (Springer, 1984); (b) Biological Cybernetic **43**, 59 (1982); J. Blackmore, R. Miikkulainen: *Visualizing high dimensional structures with incremental grid growing neural network*, in A. Prieditis and S. Russel (Eds.) *Machine learning Proc. 12th Int. Conf.* (1995)
80. I. Stewart: *The Lorenz attractor exists*, *Nature*, **406**, 948 (2000)
81. W. Tucker: *The Lorenz attractor exists*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **328**, Serie I, 1197 (1999)
82. Per una panoramica introduttiva su vari aspetti di cosmologia e di astronomia si può fare riferimento a: B. Bertotti: *Introduzione a ... la cosmologia* (Le Monnier, 1980)
83. E. Mach: *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (Boringhieri, 1968)
84. P.J.E. Peebles: *Large scale structure of the Universe* (Princeton University Press, 1980)
85. M. Davis, P.J.E. Peebles: *Survey of Galaxy Redshift* , *Astrophysical Journal* **267**, 465 (1983)
86. L. Pietronero: *The Fractal Structure of The Universe*, *Physica A* **144**, 257 (1987)
87. G.J. Baln, E.D. Feigelson: *Astrostatistics* (Chapman and Hall, London, 1996)
88. T.A. Agekjan: *Stelle Galassie Metagalassia* (Edizioni Mir, 1985)
89. E. Hubble: *The Realm of Nebulae* (Oxford University Press, 1936)
90. J. Hucra, M. Davis, D. Latham, J. Tonry: *Astrophysical Journal Supp.* **52**, 89 (1983)
91. P.H. Coleman, L. Pietronero: *The Fractal Structure of The Universe*, *Physics Reports* **213**, 311 (1992)
92. A. Blanchard, J.M. Alimi: *Astronomy and Astrophysics* **203**, L1-L4 (1988)
93. H.E. Stanley: *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971)
94. F. Sylos Labini: *Scale-invariance of Galaxy Clustering*, *Physics Reports* **293** 61-226 (1998)
95. De Vaucouleurs: *Science* **167** 1203 (1970)
96. S.M. Feber, J.S. Gallagher: *Astronomy and Astrophysics Annual Review* **17**, 135 (1979)
97. V. de Lapparent et al.: *Astrophys. Journ.* **343**, 1 (1989)

98. B.B. Mandelbrot: (a) *Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk* (Springer, 1997); (b) Scientific American, February (1999); (c) *Multifractals and 1/F Noise: Wild Self-Affinity in Physics* (Springer, 1999); (d) B.B. Mandelbrot, L. Calvet, A. Fisher: Discussion Papers of the Cowles Foundation of Economics (Cowles Foundation, Yale University, 1997), p. 1164
99. H. Levy, M. Sarnat: *a-Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice* (Prentice Hall, 1984); b-W. Paul, J. Baschnagel: *Stochastic Processes From Physics to Finance* (Springer, 1999)
100. F. Moriconi: *Matematica Finanziaria* (Il Mulino, 1994)
101. L. Torosantucci: *XIII Seminario Nazionale di Fisica Nucleare e Subnucleare*, Otranto, Settembre 2000 (unpublished)
102. R.N. Mantegna, H.E. Stanley: *An introduction to Econophysics* (Cambridge University Press, 2000)
103. A. Papoulis: *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici* (Boringhieri, 1973)
104. Autori Vari: *Come si legge il Sole24Ore* (Il Sole24Ore, 2000)
105. M. Gabrielli, S. De Bruno: *Capire la Finanza: Guida pratica agli Strumenti Finanziari* (Il Sole24Ore, 2002); *Capire la finanza* (Il Sole24Ore)
106. J. C. Hull: *Opzioni, Futures ed altri derivati* (Il Sole24Ore, 1999)
107. R. Pring: *Analisi tecnica dei mercati finanziari* (McGrawHill, 1996)
108. W. Feller: *An Introduction to Probability and Its Applications* (Wiley, 1968)
109. B.V. Gnedenko: *The Theory of Probability* (Mir Publishers, Moscow, 1975)
110. M.G. Bruno, P. Allegrini, P. Grigolini: Appl. Stoch. Mod. in Bus. and Ind. **15**, 1 (1999)
111. M.G. Bruno, G. Olivieri: *Economia Società e Istituzioni*, Anno XI, n. 3 (1999)
112. Ya. A. Smorodinsky, J. Taqqu: *Stable non-gaussian random processes* (Chapman and Hall, 1980)
113. *Seveso vent'anni dopo. Dall'incidente al Bosco delle Querce*, a cura di M. Ramondetta, A. Reposi, Fondazione Lombardia per l'Ambiente, Milano (1998)
114. (a) G. Belli, G. Bressi, S. Cerlesi, S.P. Ratti: *Chemosphere*, **12**, 517, (1983); (b) S. Cerlesi, G. Belli, S.P. Ratti: in Proc. Int. Conf. *Energia e Ambiente* (Soc. Ital. di Merceologia, 1984), p. 217; (c) G. Belli, S. Cerlesi, S.P. Ratti: in *Technological Response to Chemical Pollution* (Lith Gamas, Milano, 1985), p. 121 e 129; (d) S.P. Ratti, G. Belli, A. Lanza, S. Cerlesi: in *Chlorinated Dioxins and Dibenzofurans in Perspective* (C. Rappe, G. Choudoury, L.H. Keith, Lewis Publ., 1986), p. 467; (e) S.P. Ratti, G. Belli, A. Lanza, S. Cerlesi, G.U. Fortunati: *Chemosphere*, **15**, 1549 (1986); (f) S. Cerlesi, A. di Domanico, S.P. Ratti: *ibidem* **18**, 898, (1986); (g) *ibidem* 855, (1986); (h) A. di Domenico, S. Cerlesi, S.P. Ratti: *Chemosphere* **20**, 1559 (1989)
115. F. Argentesi, L. Bollini, S. Facchetti, G. Nobile, W. Tumiatti, G. Belli, S.P. Ratti, S. Cerlesi, G.U. Fortunati, V. La Porta: in Proc. World Conf. on Chemical Accidents. (CEP Consultant Ltd, 1987), p. 227
116. S.P. Ratti: *Gli incidenti di Seveso e di Chernobyl. Presentazione per il XXVII Congresso Nazionale della Società Italiana di Fisica*, Sassari, 30 Settembre 2002
117. G. Belli, G. Bressi, E. Callegarich, S. Cerlesi, S.P. Ratti: in *Chlorinated Dioxin and Related Compounds: Impact on Environment* (O. Hutzinger, Pergamon Press, 1982), p. 137
118. G. Belli, S. Cerlesi, E. Milani, S.P. Ratti: *Tox. Environ. Chem.* **22**, 101 (1989)
119. G. Belli, S. Cerlesi, A. Lanza, S.P. Ratti: in *Chlorinated Dioxins and Dibenzofurans in Perspective* (C. Rappe, G. Choudhary, L.H. Keith, Lewis publishers Inc., 1985), p. 467
120. (a) S.P. Ratti: *The role of statistical analysis in the management of chemical accidents*, in: Proc. Ecoinforma (O. Hutzinger, Ecoinforma Press, 1989), p. 1; (b) G. Belli, S. Cerlesi, S. Kapila, S.P. Ratti, A.F. Yanders: *Chemosphere*, **18**, 1251 (1989)
121. G. Belli, G. Bressi, L. Carrioli, S. Cerlesi, M. Diani, S.P. Ratti, G. Salvadori: *Chemosphere* **20**, 1567 (1990)
122. (a) G. Belli, S.P. Ratti, G. Salvadori: *Tox. and Environ. Chem.*: **33**, 201 (1991); (b) G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, S. Lovejoy, D. Schertzer: *Improvement of the multifractal analysis of the Seveso TCDD pollution*: *Ann. Geophys.* **10**, C343 (1992); (c) G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, S. Lovejoy, D. Schertzer: *Seveso pollution as a hard multifractal process*, *E. O. S.* **73**, 57 (1992)

123. Y. Chiriginskaya, D. Schertzer: private communication
124. S.P. Ratti, G. Belli, G. Bressi, M. Cambiaghi, A. Lanza, G. Salvadori, D. Scannicchio: *Analysis of radiological measurements in the R.E.M. data base*, in: Improvement of reliable long distance atmospheric transport models (Report EUR-12549, 1990), vol. 1, p. 1
125. S.P. Ratti, G. Belli, G. Bressi, M. Cambiaghi, A. Lanza, G. Salvadori, D. Scannicchio: *Analysis of air radioactivity in Italy and France and a hint into a fractal model. Code for assessing off-site consequences of nuclear accidents* (Report EUR-13013, 1990), vol. 2, p. 1183
126. S.P. Ratti, G. Belli, G. Salvadori: *Analisi e descrizione frattale della radioattività in aria in Italia ed in Francia dopo l'incidente di Chernobyl*. Modellistica dei sistemi complessi e radiprotezione (ENEA, 1991), p. 37
127. G. Salvadori, D. Schertzer, S. Lovejoy, S.P. Ratti, G. Belli: *Ann. Geophys.* **11**, C310 (1992)
128. G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, E. Quinto, G. Graziani, M. de Cort: *Fractal modelling of Chernobyl radioactive fallout over Europe*, Proc. Fractals in Geoscience and remote sensing (G.G. Wilkinson, I. Kanellououlos, J. Merger, Report EUR-16092, 1994), p. 237
129. D. Schertzer, S.P. Ratti, G. Salvadori, G. Belli: *Multifractal analysis of Chernobyl fallout self organized criticality and hot spots*, Reactor Phys. and Environ. Anal. (Am. Nucl. Soc., 1995), p. 743
130. S. Lovejoy: *The statistical Characterization of Rain Areas in terms of Fractals*, Conference on Radar Meteorology, Toronto (1981)
131. E. Quinto: *Modelli mono e multifrattali per lo studio della distribuzione di inquinanti in aria e al suolo*, Tesi di Laurea, Università di Pavia, 1993/94
132. G. Salvadori: *Modelli matematici per lo studio della distribuzione della radioattività in Italia indotta dall'incidente nucleare di Chernobyl*, Tesi di Laurea, Università di Pavia, 1987/88
133. G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, F. Missineo, E. Giroletti, I. Kobal, J. Vaupotic: *Analisi multifrattale della distribuzione spaziale di ²²²Rd indoor in Slovenia*, Proc. ARIA (P. Orlando, G. Sciocchetti, R.R. Trevisi, LITO, Roma, 1993), p. 329
134. S.P. Ratti, G. Salvadori, G. Belli, E. Quinto: *A monofractal model of air radioactivity pollution*, Congr. Naz. A.I.R.P. (AIRP, 1995), p. 353
135. G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli: *Health Physics* **72**, 60 (1997)
136. B.H. Kaye: *A Random walk through fractal dimensions* (VCH, Weinheim, 1989)
137. A. Benjamin: *Probability, Statistic and Decision for Civil Engineering*, (McGrawHill, 1978)
138. N. Cressie: *Statistics for spatial data* (Wiley, 1992)
139. U. Maione, U. Moisello: *Elementi di statistica per l'idrologia* (La Goliardica Pavese, 1990)
140. B.D. Ripley: *Spatial statistics* (Wiley, 1981)
141. S. Ratti e L. Tallone: *Elementi introduttivi all'analisi delle osservazioni* (Quattri, Milano, 1964)
142. A. Rotondi, P. Pedroni, A. Pievatolo: *Probabilità Statistica e Simulazione* (Springer, 2005)
143. V. Smirnov: *Cours de Mathematique Supérieur* (MIR, Mosca, 1970), vol. I, p. 413
144. B.H. Prosper: *Phys. Rev* **D38**, 3584 (1988); **D37**, 1153 (1988); **D36**, 2087 (1987); **D38**, 854 (1988)
145. A. Rotondi: *Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res.* bf A416, 106-118 (2010)
146. (a) F. Mandl: *Statistical Physics* (Wiley, 1988); (b) E. Fermi *Thermodynamics* (Dover, 1937)
147. Per una descrizione più dettagliata si veda S. Ratti: *Appunti di Fisica Generale* (La Goliardica Pavese 1974)
148. E.A. DeWolf, I.M. Dremin, W. Kittel: *Physics Reports* **270**, n.1; (1996) (si rimanda anche alla vasta bibliografia ivi contenuta)
149. A.H. Muller: *Phys. Rev.* **D4**, 150 (1971)
150. G.B. Falland: *Fourier Analysis and its applications* (Wadsworth and Brooks, 1987), p. 227: (si veda l'Appendice A)
151. A. Giovannini, L. Van Hove: *Acta Physica Polonica* **B19**, 917 (1988)

Indice analitico

- affinità, 24
- antitrasformata di Fourier, 282
- approssimazione
 - di Boussinesq-Oberbeck, 175
- attrattore, 162, 163, 191, 192, 196, 199, 202
 - caotico, 196
 - del sistema, 198
 - di Lorenz, 187, 202
 - puntiforme, 199
 - strano, 156, 196, 198, 199
 - strano di Lorenz, 196, 200, 203
 - universale, 185, 187, 198
- Bernoulli
 - distribuzione di, 262
 - shift di, 168–171
- box counting
 - dimensione frattale di, 16
- broccolo minareto, 7
- Brown Robert, 59
- Cantor
 - barra di, 79
- caos deterministico, 156
- caoticità, 189
- cascate, 119
- cataloghi astronomici, 206, 209, 215, 217, 223
 - angolari, 210
 - caratteri multifrattali dei, 227
 - di galassie, 211, 218
 - tridimensionali, 208, 227
- Clarkia pulchella, 5
- codimensione
 - duale dei momenti, 133
 - frattale, 19, 116
 - funzione, 127
 - proprietà della, 124
- complessità, 2, 156
- correlazione
 - coefficienti di, 290
 - funzioni e integrali di, 290
- cosmologia, 205
 - di base, 228
 - standard, 205
- cumulanti, 290
- curdling, 23, 79
- curva
 - triadica di Koch, 20
- Dawkins Richard, 41
- DeMoivre-Gauss
 - distribuzione di, 264
- dimensione
 - dell'attrattore, 200
 - dell'attrattore strano, 200
 - frattale, 16
 - di cluster, 27
 - di massa, 28
 - di similarità, 24
 - frattale del campione, 118
 - funzione, 127
 - Hausdorff e Besicovitch, 13, 16
 - intera, 6
 - non intera, 16
 - stocastica del campione, 128
 - topologica, 13
- distribuzione
 - aleatoria, 265, 279, 281, 287
 - binomiale, 262
 - binomiale negativa, 294
 - di Boltzmann, 269
 - di Bose-Einstein, 272, 275
 - di Breit-Wigner, 277
 - di Cauchy, 277

- di Fermi-Dirac, 274
- di Gauss normalizzata, 267
- esponenziale, 275
- gaussiana, 264
- iperbolica, 279
- log-normale, 281
- multinomiale, 265
- normale, 267, 268
- poissoniana, 262
- rettangolare, 268
- distribuzioni
 - bivariate, 286
- DTM
 - momenti a doppia traccia, 152
- econofisica, 11
- effetto farfalla, 189
- Einstein
 - coefficiente di diffusione di, 63
 - legge di, 66
 - moto browniano di, 60
- Einstein A., 59–63, 75, 205, 228
- esponente
 - di Hurst, 69
 - di Liapunov, 170, 171, 192, 193
 - di Liapunov di ordine p , 195
 - di Lipschitz-Hölder, 79
 - di massa, 91
 - di ordine p , 193
 - di singolarità, 79
 - massimo di Liapunov, 191, 195–199, 203
- esponenti
 - di Liapunov, 190, 192, 193, 195, 200, 203
- Euclide, 1, 16
- evoluzione, 41
- figura
 - discontinua, 13
 - frammentata, 13
- flusso, 137
- fluttuazioni
 - classificazione di, 139
- Fokker Planck
 - equazione di, 237
- forma, 13
- fractus, 2
- frattale, 13
 - aleatorio, 59
 - autoinverso, 32
 - cosmico, 9
 - dimensione di una linea, 46
 - forma, 2
 - naturale, 2, 7
 - simulazione, 41
 - sottoinsieme, 85
 - stocastico, 6
 - supercondensatore, 38
- frattali e caos, 155
- frequenze di correlazione e di regressione, 287
- FSP: Fractal Sum of Pulses, 106
- funzione
 - di Liapunov, 183
 - generatrice, 294
 - multifrattale, 19
- funzione caratteristica, 282
- geometria, 1
 - frattale, 2
- grado di singolarità, 121
- Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 208
- Hubble E., 207
 - costante di, 207
 - legge di, 207, 223, 227
- Hurst
 - parametro di, 59, 97
- insieme, 13
 - copertura di, 13
 - di Mandelbrot-Given, 33
 - di Sierpinski, 33
 - generalizzato
 - di Cantor, 30
 - di Koch, 30
 - triadico di Cantor, 22
 - triadico di Koch, 22
- insiemi
 - multifrattali, 78
- Ito
 - lemma di, 241
 - processi di, 239–241
- Lévy
 - classi di, 280
 - distribuzione di, 245
 - funzione caratteristica di, 245
 - parametro di, 106
 - voli di, 106
- Lévy H., 245
- legge di scala, 121
- legge di scaling
 - dei momenti di traccia, 139
 - dei multifrattali stocastici, 123
 - multiplo, 123
 - per i momenti statistici, 129
 - per monofrattale, 124

- Lorenz
 attrattore di, 186, 188
 attrattore strano di, 200
 dimensione frattale dell'attrattore, 201
 equazioni di, 156, 172, 178, 181
 prima equazione di, 180
 seconda e terza equazione di, 181
 sistema di, 165, 178, 189, 197, 203
 Lorenz Edward Norton, 172, 175, 177, 178, 197
 Lovejoy e Mandelbrot, 110, 114
 Lovejoy Shaun, 99, 105, 146–148, 151
- Mandelbrot B., 2, 3, 6, 8, 13, 21, 23, 24, 30, 33, 51, 52, 59, 64, 69, 73, 77–79, 91, 97, 98, 104, 105, 107, 109–111, 121, 124, 146, 229–231, 246
 Mandelbrot e Van Ness, 68, 70–72, 97, 102
 Mandelbrot e Wallis, 72, 73, 75
 materia nell'Universo, 8
 misura utile, 15
 modelli moltiplicativi
 modello α , 121
 modello α e momenti statistici, 141
 modello β , 119
 momenti di traccia, 138
 momenti a doppia traccia, 152
 morfologia, 2
 moto
 caotico, 155, 168, 187, 190, 195, 198, 203
 moto browniano, 3
 frazionale, 68, 70
 simulazione, 72
 multifrattali, 78
 classificazione, 134
 universali, 145, 151
 multifrattali universali
 conservativi, 147
 non conservativi, 151
- Navier-Stokes
 equazioni di, 175
- ordine di singolarità, 121
- PDMS
 probability distribution multiple scaling, 122
- Peano
 curva di, 15
 paradosso di, 15
- Peebles
 funzione di correlazione a due punti di, 211
- Peebles P.J.E., 206, 218, 223
- Perrin, 3
- Pietronero, 8
- Poisson
 distribuzione di, 262
- portafoglio
 modello del, 234
- portfolio theory, 229, 230, 238, 246
 tradizionale, 230
- Principio cosmologico, 205, 210, 223, 227
 condizionato, 227
- processi
 classificazione di, 139
- processo moltiplicativo
 binomiale, 81
- processo stocastico, 59
- quantità bare e dressed, 137
- random walk, 59, 236
 mono-dimensionali, 64
- recessione
 delle galassie, 207
- Richardson, 6
- scala
 esponente di, 77
 invarianza di, 77
- scale diaboliche, 79
- scaling, 2, 6, 77
 di funzioni frattali, 50
 dei momenti statistici, 129
 evidenza dello, 99
 funzione $K(q)$ dei momenti statistici, 129
 multiplo delle distribuzioni, 122
 proprietà, 65
 proprietà della funzione $K(q)$, 130
- Schertzer, 151
- Schertzer Daniel, 146–148, 151
- Schwarz
 paradosso di, 47
- Seveso
 fantasma di, 248
 incidente di, 247
- sistema
 dissipativo, 182
- sistemi
 caotici, 155, 156, 168, 170, 171, 189
- stabilità
 statistica, 189
- stima, 285
 affidabilità, 285
- tecniche multifrattali, 224
- teorema
 del limite centrale, 264

- del limite centrale generalizzato, 284
- di De Moivre, 264
- trasformata di Fourier, 282
- trasformazione affine, 83
- trema, 23

- universalità, 145
- universo, 205, 214, 221, 227
 - materia nel, 205, 206, 220, 223
 - metrica del, 228
 - omogeneo, 227
 - struttura del, 227
- universo visibile
 - dimensione del, 223
 - materia nel, 224, 227

- variabile aleatoria, 268
- variabile casuale, 261

- variabile log-normale, 281
- variabile stocastica, 285
- volatilità, 240

- Weierstrass
 - funzione di, 51
- Weierstrass-Mandelbrot, 53, 58
 - funzione di, 52
 - funzioni deterministiche, 53, 57
 - funzioni stocastiche, 57, 58
 - serie di, 57
- Weiner, 59
- whey, 23
- Wiener
 - processi di, 235, 236
 - processi limite di, 236
 - processo generalizzato di, 239, 240, 242