A

Formule utili

A.1 Integrali di uso frequente

A.1.1 Integrali Gaussiani

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{A.1}$$

Per $n = 1, 2, \ldots$ si ha

$$I_{2n+1}(\alpha) = 0, \qquad I_{2n}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-ax^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} dx\, x\, \sin(\beta x)\, e^{-\alpha^2 x^2} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \frac{e^{\imath\beta x} - e^{-\imath\beta x}}{2\imath}\; e^{-\alpha^2 x^2} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\imath\beta x} + e^{-\imath\beta x}}{\imath}\; e^{-\alpha^2 x^2} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\beta}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[e^{-(\alpha x + \imath \frac{\beta}{2\alpha})^2} + e^{-(\alpha x - \imath \frac{\beta}{2\alpha})^2} \right]\, e^{-\alpha^2 x^2} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\beta}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}\, 2 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\beta}{4\alpha}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A.1.2 Integrali con funzioni esponenziali

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dx\, x^n e^{-x} &= \left[(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x}\right]_{\alpha=1} = \\ &= \left[(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{\alpha}\right]_{\alpha=1} = \\ &= n! \end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2 Oscillatore armonico

A.2.1 Trattazione operatoriale

La soluzioni per l'equazione agli autovalori per l'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico è :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad ; \quad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{A.5}$$

In termini degli operatori di creazione e distruzione

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p \qquad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p \tag{A.6}$$

abbiamo:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad p = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a - a^\dagger) \tag{A.7}$$

Per a e a^+ valgono le relazioni

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{A.8}$$

A.2.2 Trattazione nella rappresentazione X

Le autofunzioni sono date da

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \tag{A.9}$$

dove H_n é il polinomio di Hermite n-simo definito da

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \tag{A.10}$$

Primi polinomi di Hermite

$$\begin{aligned} H_0(x) = 1;\ H_1(x) = 2x;\ H_2(x) = 4x^2 - 1;\ H_3(x) = 8x^3 - 12x \\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12;\ H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned} \tag{A.11}$$

A.3 Cambiamento di coordinate

Il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate sferiche avviene mediante la trasformazione:

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\phi \tag{A.12}$$

$$y = r\,\sin\theta\,\sin\phi \tag{A.13}$$

$$z = r\,\cos\theta \tag{A.14}$$

A.4 Momento Angolare

A.4.1 Trattazione operatoriale

Gli operatori J^2, J_x, J_y, J_z soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$$

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \qquad [J_y, J_z] = i\hbar J_x \qquad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

Indichiamo con $|j, m\rangle$ il generico autoket comune a J^2 e J_z:

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle \qquad J_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle$$

Gli operatori

$$J_\pm = J_x \pm J_y \tag{A.15}$$

soddisfano le seguenti regole di commutazione con gli operatori J^2 e J_z:

$$[J^2, J_\pm] = 0 \qquad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm . \tag{A.16}$$

Gli operatori $J_\pm$ agiscono sugli autoket comuni ad J^2 e J_z innalzando o abbassando di una unità il numero quantico azimutale:

$$J_\pm|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}\; |\ell, m \pm 1\rangle \tag{A.17}$$

A.4.2 Relazione di ricorrenza per le Armoniche Sferiche

$$\cos\theta\, Y_\ell^m(\theta, \phi) = a_{\ell,m}\, Y_{\ell+1}^m(\theta, \phi) = a_{\ell-1,m}\, Y_{\ell-1}^m(\theta, \phi) \tag{A.18}$$

dove

$$a_{\ell,m} = \sqrt{\frac{(\ell+1+m)(\ell+1-m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}} \tag{A.19}$$

A.4.3 Le prime Armoniche Sferiche

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{A.20}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \ , \ Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm\imath\phi} \tag{A.21}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \ \ , \ \ Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{\pm\imath\phi} \ ,$$
$$Y_2^{\pm 2} = \mp\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2\imath\phi} \tag{A.22}$$

$$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \ \ , \ \ Y_3^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{\pm\imath\phi}$$
$$Y_3^{\pm 2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2\theta\cos\theta e^{2\pm\imath\phi} \ \ , \ \ Y_3^{\pm 3} = \mp\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3\theta e^{\pm 3\imath\phi} \tag{A.23}$$

A.5 Equazione di Schrödinger in coordinate sferiche

A.5.1 L'equazione radiale

Per un potenziale centrale $V(r)$ l'equazione di Schrödinger è separabile in coordinate sferiche. L'autofunzione comune agli operatori $\mathcal{H}$, L^2 e L_z con autovalori rispettivamente E, $\ell(\ell+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, si può scrivere nella forma

$$\psi_{E,\ell,m}(r,\theta,\phi) = \frac{\chi_{E,\ell}(r)}{r} Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{A.24}$$

dove $\chi_{E,\ell}(r)$ è soluzione dell'equazione radiale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi_{E,\ell}}{dr^2} + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\chi_{E,\ell} + V(r)\chi_{E,\ell} = E\chi_{E,\ell} \tag{A.25}$$

$\chi_{E,\ell}(r)$ deve soddisfare la condizione

$$\lim_{r\to 0}\chi_{E,\ell}(r) = 0. \tag{A.26}$$

A.5.2 Le prime funzioni di Bessel Sferiche

$$j_0(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho}, \ j_1(\rho) = \frac{\sin(\rho)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho)}{\rho}, \tag{A.27}$$

A.5.3 Le prime autofunzioni dell'atomo d'idrogeno

Detto $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ il raggio di Bohr, si ha

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \tag{A.28}$$

$$\psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \tag{A.29}$$

$$\psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}}\, \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}\, \cos\theta \tag{A.30}$$

$$\psi_{2,1,\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}}\, \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}\, \sin\theta\, e^{\pm\imath\varphi} \tag{A.31}$$

A.6 Spin

A.6.1 Matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.33}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \tag{A.34}$$

$$[\sigma_i \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.35}$$

A.6.2 Relazioni utili

$$(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\, I + i\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{A.36}$$

In particolare se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = A^2 I \tag{A.37}$$

$$e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\sigma} = I\, \cos\theta + i(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\theta \quad \text{dove } \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta} \tag{A.38}$$

A.7 Teoria Perturbativa indipendente dal tempo

Sia dato l'Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

dove il problema agli autovalori di $\mathcal{H}_0$ sia stato risolto:

$$\mathcal{H}_0|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle.$$

Se l'autovalore $E_n^{(0)}$ è non degenere e se gli elementi di matrice $\langle m^{(0)}|\mathcal{H}_1|n^{(0)}\rangle$ sono piccoli rispetto ai livelli $E_n^{(0)}$, abbiamo i seguenti sviluppi per gli autovalori E_n e gli autostati $|n\rangle$ di $\mathcal{H}$:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \ldots$$

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + |n^{(1)}\rangle + |n^{(2)}\rangle + \ldots$$

dove

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|\mathcal{H}_1|n^{(0)}\rangle \tag{A.39}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m^{(0)}|\mathcal{H}_1|n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \tag{A.40}$$

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq n} \frac{\langle m^{(0)}|\mathcal{H}_1|n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\,|m^{(0)}\rangle \tag{A.41}$$

A.8 Teoria Perturbativa dipendente dal tempo

Sia dato l'Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t)$$

dove si conosce la soluzione del problema agli autovalori di $\mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_0|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle,$$

mentre $\mathcal{H}_1$ dipende dal tempo e i suoi elementi di matrice nella rappresentazione di $\mathcal{H}_0$ sono piccoli rispetto ai livelli $E_n^{(0)}$. Scriviamo lo stato del sistema al tempo t nella forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n d_n(t)\, e^{-i\frac{E_n^{(0)}}{\hbar}\,t}\,|n^{(0)}\rangle\,. \tag{A.42}$$

Detta $P_{i\to f}$ la probabilità con la quale troveremo il sistema nello stato $|f^{(0)}\rangle$, se al tempo $t=0$ esso si trova nello stato $|i^{(0)}\rangle$, al I ordine perturbativo si ha

$$P_{i\to f}(t) = |d_f(t)|^2 = \left| -\frac{\imath}{\hbar}\int_0^t d\tau\,\langle f^{(0)}|\mathcal{H}_1(\tau)|i^{(0)}\rangle\, e^{\imath\omega_{fi}\tau}\right|^2 \tag{A.43}$$

dove $\omega_{fi} = \frac{E_f^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}$ e $f \neq i$.

A.9 Approssimazione di Born

Detti $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ i vettori d'onda rispettivamente della particella incidente e di quella diffusa, l'ampiezza di diffusione in approssimazione di Born per il potenziale $V(\mathbf{r})$ è data da

$$f_B(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}\, V(\mathbf{r}')\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \tag{A.44}$$

dove μ è la massa ridotta del sistema.

Nel caso di potenziale centrale l'espressione si semplifica:

$$f_B(q) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q} \int_0^\infty dr\, \sin(qr)\, V(r)\, r \tag{A.45}$$

dove, trattandosi di scattering elastico, $q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k \sin\frac{\theta}{2}$, con θ angolo di diffusione.

Bibliografia

1. V. I. Kogan and V. M. Galitskiy. *Problems in Quantum Mechanics.* Prentice-Hall London, 1963.
2. I. I. Gol'dman and V. D. Krivchenkov. *Problems in Quantum Mechanics.* Pergamon Press London, 1961.
3. I. I. Gol'dman, V. D. Krivchenkov, V. I. Kogan and V. M. Galitskiy. *Selected Problems in Quantum Mechanics.* Infosearch London, 1960.
4. D. Ter Haar. *Selected problems in Quantum Mechanics.* Infosearch Ltd. London, 1964.
5. G. Passatore. *Problemi di meccanica quantistica elementare.* Franco Angeli Milano, II edizione, 1981.
6. E. Merzbacher. *Quantum Mechanics.* Wiley New York, 1970.
7. L. Landau et E. Lifchitz. *Phys. Theor. vol. III (Mecanique Quantique).* Mir Moscou, 1966.
8. A. Messiah. *Mecanique Quantique*, volume I e II. Dunod Paris, 1962.
9. R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics.* Plenum Press New York, II edition, 1994.
10. G. Nardulli. *Meccanica Quantistica*, volume I e II. Franco Angeli Milano, 2001.
11. S. Flügge. *Practical Quantum Mechanics*, volume I e II. Springer Verlag Berlin, 1971.