# Anhang

# A Lösungen zu den Übungen

Zu den mit $*$ versehenen Übungen werden Lösungswege skizziert oder Lösungen angegeben.

## Zu Kapitel 1

**Zu Übung 1.2**: $F_\Delta = 23$.

**Zu Übung 1.5**: $r(\varphi) = \dfrac{4}{2\sin\varphi + \cos\varphi}$, $\arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) < \varphi < \pi + \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**Zu Übung 1.8**: $|\overrightarrow{0M}| \doteq 5{,}148$.

**Zu Übung 1.9**: $\boldsymbol{F}_1 \doteq \begin{bmatrix} -11446 \\ -19825 \end{bmatrix}$N, $\boldsymbol{F}_2 \doteq \begin{bmatrix} 11446 \\ -9605 \end{bmatrix}$N, $\boldsymbol{Q}_1 \doteq \begin{bmatrix} -11446 \\ 0 \end{bmatrix}$N, $\boldsymbol{Q}_2 \doteq \begin{bmatrix} 11446 \\ 0 \end{bmatrix}$N.

**Zu Übung 1.11**: $d \geq 0{,}91$m.

**Zu Übung 1.12**: $\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

**Zu Übung 1.13**: $t \doteq 152{,}8$s.

**Zu Übung 1.14**: $T \doteq 6$s.

**Zu Übung 1.15**: $\boldsymbol{F} = -0{,}084 \begin{bmatrix} 0{,}11\cos\omega t + 0{,}25\sin\omega t \\ 0{,}11\sin\omega t + 0{,}25\cos\omega t \end{bmatrix}$N
$-8{,}82 \cdot 10^{-4} \begin{bmatrix} (1+0{,}25t)\cos\omega t - 0{,}11 + \sin\omega t \\ (1+0{,}25t)\sin\omega t + 0{,}11 + \cos\omega t \end{bmatrix}$N (Corioliskraft).

**Zu Übung 1.16**: $\boldsymbol{F} = 14 \cdot 10^{-4} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$N.

**Zu Übung 1.18**: $E_{\text{kin}} = 20233$Nm.

**Zu Übung 1.21**: a) $\varphi \doteq 49{,}4°$; b) $\varphi \doteq 60{,}26°$; c) $\varphi \doteq 23{,}84°$; d) $\varphi \doteq 20{,}8°$.

**Zu Übung 1.23**: Inneres Produkt der beiden Vektoren ist Null.

**Zu Übung 1.24**: a) $F = 15$, $\boldsymbol{s} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 \\ -4 \end{bmatrix}$, b) $h_{\text{A}} = 3\sqrt{5}$, $h_{\text{B}} = 3{,}72$, $h_{\text{C}} = 2\sqrt{5}$.

**Zu Übung 1.25**: $\dfrac{d_1}{2} = 5\,\text{cm}$, $\dfrac{d_2}{2} = 9{,}57\,\text{cm}$.

**Zu Übung 1.26**: $\alpha = 56{,}3°$, $\beta = 29{,}9°$, $\gamma = 93{,}8°$, (Cosinussatz)
$s_a = 4{,}03$, $s_b = 5{,}32$, $s_c = \sqrt{8}$, (Parallelogramm-Gleichung).

**Zu Übung 1.27**: Man zerlege das Fünfeck in Dreiecke.

**Zu Übung 1.28**: Lege die Ecken des Dreiecks als Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ ins Koordinatensystem, berechne den Schwerpunkt $\boldsymbol{s}$ und dann $r = \max\{|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}_i|, i = 0,1,2\}$.

**Zu Übung 1.29**: a) $\xi = -2$, $\eta = 7$, b) $I = \dfrac{1}{13}$A, $U = \dfrac{410}{13}$V.

**Zu Übung 1.30**: $\boldsymbol{F} = 3\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$.

**Zu Übung 1.32**: $\boldsymbol{v} = \left(1 + \frac{15}{\sqrt{6}}\right)\boldsymbol{u}$.

**Zu Übung 1.33**: $\alpha = 57{,}59°$, $\beta = 36{,}49°$, $\gamma = 104{,}94°$, $\alpha_{x,y} = 14{,}94°$, $\beta_{y,z} = 32{,}41°$, $\gamma_{z,x} = 53{,}50°$.

**Zu Übung 1.34**: $\boldsymbol{F}' \doteq 2{,}5[0{,}5;\ \cos 75°;\ \cos 34{,}26°]^{\mathrm{T}}\mathrm{N}$.

**Zu Übung 1.35**: $-241;\ 0;\ -30$.

**Zu Übung 1.38**: $\alpha = 80{,}26°$.

**Zu Übung 1.40**: Schreibe die rechte Seite als $-\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ und wende den Grassmannschen Entwicklungssatz auf beide Gleichungsseiten an.

**Zu Übung 1.42**: $\boldsymbol{M} = [34{,}3, -29]^{\mathrm{T}}\mathrm{Nm}$, $\boldsymbol{D} = \frac{28}{31}[6, -1{,}5]^{\mathrm{T}}\mathrm{Nm}$.

**Zu Übung 1.43**: $v_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\sqrt{234 + 16\cos^2 t}$.

**Zu Übung 1.46**: $F \doteq 22{,}34$.

**Zu Übung 1.47**: a) $\begin{array}{ll} \boldsymbol{F}_{AB} = 10^{-2}[2{,}4;\ -2{,}4;\ 0]^{\mathrm{T}}\mathrm{N}\,, & \boldsymbol{F}_{CD} = -\boldsymbol{F}_{AB} \\ \boldsymbol{F}_{BC} = 10^{-2}[2{,}34;\ -1{,}35;\ 1{,}32]^{\mathrm{T}}\mathrm{N}\,, & \boldsymbol{F}_{DA} = -\boldsymbol{F}_{BC}\,. \end{array}$

b) $\boldsymbol{0}_z = [0;\ 0;\ 1{,}967 \cdot 10^{-3}]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{Nm}$.

**Zu Übung 1.48**: Sinnvoll: (b) (d), (f); sinnlos: (a), (c), (e).

**Zu Übung 1.49**: (a) 0, (b) $-2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, (c) 0.

**Zu Übung 1.50**: $V = 1130{,}5\mathrm{cm}^3$.

**Zu Übung 1.51**: $\boldsymbol{e}_1 = [-\sin 70°;\ \cos 70°;\ 0]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_2 = [-\cos 70° \sin 60°;\ -\sin 70° \sin 60°;\ 0{,}5]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_3 = [0{,}5\cos 70°;\ 0{,}5\sin 70°;\ \sin 60°]$, $\xi = -8533\,\mathrm{km}$, $\eta = 4633\,\mathrm{km}$, $\rho = 71770\,\mathrm{km}$.

**Zu Übung 1.53**: $d = \frac{37}{\sqrt{1470}}$.

**Zu Übung 1.55**: $\boldsymbol{r} = [5{,}9{,}4]^{\mathrm{T}} + \lambda[7, -16{,}9]^{\mathrm{T}}$.

**Zu Übung 1.56**: a) $\boldsymbol{x}_0 = \frac{4}{9}[11, -2{,}10]^{\mathrm{T}}$, b) $\varphi \doteq 53{,}13°$, c) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \cdot \left[-\frac{1}{3}, \frac{14}{15}, \frac{2}{15}\right]^{\mathrm{T}}$

## Zu Kapitel 2

**Zu Übung 2.2**: $(1/\sqrt{394969}) \cdot [-260{,}2{,}122{,}559]^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{r} = 0$

**Zu Übung 2.3**: $x_1 = \frac{4001}{2389}$, $x_2 = \frac{393}{2389}$, $x_3 = \frac{2137}{2389}$, $x_4 = -\frac{1853}{2389}$.

**Zu Übung 2.4**: $x_1 = 0{,}208\,560\,818$, $x_2 = 0{,}029\,878\,822$, $x_3 = -0{,}662\,097\,39$.

**Zu Übung 2.6**: a) $\boldsymbol{x} = \left[\frac{1}{17}, 0{,}0, -\frac{3}{17}\right]^{\mathrm{T}} + \lambda[-13{,}17{,}0, -46]^{\mathrm{T}} + \mu[20{,}0{,}17{,}59]^{\mathrm{T}}$,

b) $x_1 = x_2 = 1$.

**Zu Übung 2.8**: Die Kleinsche Vierergruppe hat genau 3 echte Untergruppen.

**Zu Übung 2.10**: Elemente von $G/N$: $e = \{-I, D_j\overline{D}\}$, $a = \{W_1, W_2, W_3\}$

$\Rightarrow ee = aa = e, ae = ea = a$.

**Zu Übung 2.12**: Zu zeigen ist hauptsächlich: Jedes $0 \neq a \in \mathbb{Z}_3$ hat ein Inverses $a^{-1}$.

**Zu Übung 2.13**: Die Gesetze gemäß Def. 2.26 sind erfüllt außer (S4): $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \Rightarrow V$ ist *kein* Vektorraum über $\mathbb{K}$.

**Zu Übung 2.14**: Vektorräume: (b), (c), keine Vektorräume: (a), (d).

**Zu Übung 2.15**: Zu zeigen ist: aus $a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$ folgt $a_0 = 0$, $a_k = b_k = 0$ für $k = 1, \ldots, n$, siehe dazu Burg/Haf/Wille (Analysis) [27], (4.63).

**Zu Übung 2.16**: a) $\dim V = 10$, b) $\dim V = 9$.
**Zu Übung 2.17**: Sei $\dim U = s$, $\dim V = t \Rightarrow$ Es gibt Basen $B_U := (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s)$ für $U$ und $B_\mathrm{V} := (\boldsymbol{a}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{s+t})$ für $V$. Sei weiterhin $\dim(U \cap V) = k \Rightarrow B_{U\cap V} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$. Mit Satz 2.20 (Austauschsatz von Basiselementen) und Umbenennung folgt so $B_U = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_s)$ und $B_V = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{d}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{d}_t) \Rightarrow B_{U+V} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_s, \boldsymbol{d}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{d}_t) \Rightarrow \dim(U + V) = s + t - k = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

**Zu Übung 2.18**: $\begin{bmatrix} \cos 25{,}3° & -\sin 25{,}3° \\ \sin 25{,}3° & \cos 25{,}3° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}904\,082\,55 & -0{,}427\,357\,863 \\ 0{,}427\,357\,863 & 0{,}904\,082\,55 \end{bmatrix}$

**Zu Übung 2.19**: $\dim \operatorname{Kern} f = 2$, $\operatorname{Rang} f = 1$.

**Zu Übung 2.20**: $\operatorname{Kern} f = \{y(x) = c\,\mathrm{e}^{2x} \mid c \in \mathbb{R}\}$.

**Zu Übung 2.22**: a) Winkel $= 0°$, b) Winkel $\doteq 14{,}5°$.

**Zu Übung 2.23**: $g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $g_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$.

**Zu Übung 2.24**: $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{e}_n)$. Die Behauptung folgt mit : $\boldsymbol{v} = [f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)]^\mathrm{T}$.

**Zu Übung 2.25**: Zu b): Sei o.B.d.A. $[a, b] = [0{,}1]$. Wähle $f_n(x) = 0$ auf $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ und als spitzes Dreieck mit Höhe 1 auf $\left[0, \frac{1}{n}\right]$.

**Zu Übung 2.26**: Hinweis: Bier, Musik, Tanz.

## Zu Kapitel 3

**Zu Übung 3.2**: $Z = \begin{bmatrix} 940 & 111 \\ 1030 & 560 \end{bmatrix} \Omega$, $U_1 = 276\,\mathrm{V}$, $U_2 = 250{,}8\,\mathrm{V}$.

**Zu Übung 3.7**: $\operatorname{Rang} \boldsymbol{A} = 2$, $\operatorname{Rang} \boldsymbol{B} = 1$, $\operatorname{Rang} \boldsymbol{x} = 1$.

**Zu Übung 3.8**: Mit (3.23) folgt: $n + n - n \le \operatorname{Rang} \boldsymbol{AB} \le \min\{n, n\} = n$.

**Zu Übung 3.9**: $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_2$.

**Zu Übung 3.10**: $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{488}\begin{bmatrix} -11 & 52 & -1 \\ -52 & 24 & 84 \\ 81 & -28 & -37 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}$ singulär.

**Zu Übung 3.15**: $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \pi\boldsymbol{c}) = 0$.

**Zu Übung 3.16**: $\det \boldsymbol{A} = \det(-\boldsymbol{A}^\mathrm{T}) = -\det \boldsymbol{A}^\mathrm{T} = -\det \boldsymbol{A} \Rightarrow \det \boldsymbol{A} = 0$.
**Zu Übung 3.17**: a) $D_1 = 6465$, $D_2 = -182611$, b) $\det \boldsymbol{A} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$.

**Zu Übung 3.18**: Rang $\boldsymbol{A} = 4$.

**Zu Übung 3.21**: $x_1 = -\dfrac{56}{1029}$, $x_2 = \dfrac{70}{1029}$, $x_3 = -\dfrac{98}{1029}$, $x_4 = -\dfrac{329}{1029}$.

**Zu Übung 3.22**: $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{23}\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \dfrac{1}{200}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 19 \\ 27 & -8 & -13 \\ 17 & 32 & -23 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**Zu Übung 3.24**: $D_1 = 839$, $D_2 = 2111$, $D_3 = a_{41} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{14}$.

**Zu Übung 3.25**: a) Mit (3.20) folgt: $(\operatorname{adj} \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{E}$
$\Rightarrow \det(\operatorname{adj} \boldsymbol{A}) \cdot \det \boldsymbol{A} = [(\det \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{E}] = (\det \boldsymbol{A})^n \cdot \det \boldsymbol{E} = (\det \boldsymbol{A})^n$.
b) $\operatorname{adj} \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$
$\Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} \boldsymbol{A}) = \det(\operatorname{adj} \boldsymbol{A})(\operatorname{adj} \boldsymbol{A})^{-1} = (\det \boldsymbol{A})^{n-1} \cdot \dfrac{\boldsymbol{A}}{(\det \boldsymbol{A})} = (\det \boldsymbol{A})^{n-2} \cdot \boldsymbol{A}$.
c) Mit (3.67) folgt: $\operatorname{adj} \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$
$\Rightarrow \operatorname{adj}(\boldsymbol{AB}) = (\det(\boldsymbol{AB}))(\boldsymbol{AB})^{-1} = (\det \boldsymbol{A}) \cdot (\det \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$
$= (\det \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{adj} \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{A}$.

**Zu Übung 3.26**: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, Inversenformel anwenden!

**Zu Übung 3.27**: $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

**Zu Übung 3.29**: s. Abschn. 3.9.1, Satz 3.66.

**Zu Übung 3.31**: $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_3$, $\boldsymbol{S}_4$: positiv definit (Krit. (3.45)), $\boldsymbol{S}_2$ weder noch.

**Zu Übung 3.32**: $\boldsymbol{A}$, mit $r = \sqrt{257}$:
$\lambda_1 = \dfrac{q+r}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{q-r}{2}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 16 \\ 1-r \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 16 \\ 1+r \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{B}$, mit $r = \sqrt{15}$:
$\lambda_1 = \dfrac{7+\mathrm{i}r}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{7-\mathrm{i}r}{2}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3-\mathrm{i}r \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3+\mathrm{i}r \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{C}$, mit $r = \sqrt{15}$:
$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2+r$, $\lambda_3 = 2-r$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -8-r \\ 1 \\ 5-r \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -8+r \\ 1 \\ 5+r \end{bmatrix}$.

**Zu Übung 3.33**: $\omega_1 = 249{,}9\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 526{,}8\mathrm{s}^{-1}$.

**Zu Übung 3.34**: $\boldsymbol{A} = \dfrac{k}{m}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

**Zu Übung 3.35**: Hinweis: Verwende (3.157).
**Zu Übung 3.36**: $\lambda_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $\lambda_{2/3} = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma}$
$\boldsymbol{x}_1 = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{2/3} = [(\gamma - \beta) - \lambda_{2/3}, (\alpha - \gamma) + \lambda_{2/3}, \beta - \alpha]^{\mathrm{T}}$.

**Zu Übung 3.37**: Nein! Aber: Die Eigenvektoren von $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ gehen durch zyklisches Vertauschen der $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ aus den $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ in Übung 3.36 hervor.

**Zu Übung 3.39**: Diagonalmatrizen: $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{A}} = \operatorname{diag}(16{,}10)$, $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{B}} = \operatorname{diag}(5, -5)$, $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{C}} = \operatorname{diag}(-6{,}6{,}3)$, $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{F}} = \operatorname{diag}(6{,}3{,}6)$, $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{S}} = \operatorname{diag}(3{,}3{,}9{,}9{,}15)$.

Transformationsmatrizen dazu: $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{A}}$ usw.:

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, C_D = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{5}} \begin{bmatrix} 6 & -\sqrt{5} & 2 \\ 3 & 2\sqrt{5} & -4 \\ 0 & 2\sqrt{5} & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zu Übung 3.42**: Jordansche Normalformen zu $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ usw. werden mit $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{C}}$ usw. bezeichnet und zugehörige Transformationsmatrizen mit $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}}$ usw., d.h. $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}$ usw. (Die $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}} \ldots$ sind nicht eindeutig bestimmt)

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{G}}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 0 & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ 0 & & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zu Übung 3.44**: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1.$

**Zu Übung 3.45**: a) Rang $\boldsymbol{A} = 2$, Rang$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = 3$: keine Lösung

b) $\boldsymbol{x}_0 = [17,3,9]^{\mathrm{T}}$, c) $\boldsymbol{x} = \left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 0\right]^{\mathrm{T}} + t[17,3,9]^{\mathrm{T}}$.

**Zu Übung 3.46**: $x_1 = -\frac{19}{22}, x_2 = \frac{67}{22}, x_3 = \frac{33}{22}$.

**Zu Übung 3.50**: $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = -\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$.

**Zu Übung 3.53**: Ist $\boldsymbol{A}$ regulär, so verwende (3.304) und $\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{adj} \boldsymbol{A} / \det \boldsymbol{A}$ ($c_0 = \det \boldsymbol{A}$). Für singuläres $\boldsymbol{A}$ bilde $\boldsymbol{A}_\varepsilon := \boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{E}$. Die Matrix $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ ist regulär für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0$ klein genug gewählt). Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

**Zu Übung 3.60**: Durch Vergleich von $\boldsymbol{A}$ mit Formel (3.361) findet man aus $a_{13} = -\sin\beta$ sofort $\sin\beta = -1/3$, und aus $a_{12} = -\cos\beta \sin\gamma$, $a_{23} = -\sin\alpha\cos\beta$ die Werte $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\sin\gamma = -1/\sqrt{2}$, woraus sich $\boldsymbol{E}_1(\alpha)$, $\boldsymbol{E}_2(\beta)$, $\boldsymbol{E}_3(\gamma)$ ergeben.

**Zu Übung 3.66**: Hinweis: Als Volkssport erfreut sich das Kegeln nach wie vor steigender Beliebtheit!

**Zu Übung 3.68**:

(a) Die Normalgleichung lautet

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 40 \end{bmatrix},$$

womit sich die Lösung $\boldsymbol{\alpha} = [0{,}2\,;\,2{,}6\,;\,1]^{\mathrm{T}}$ und somit

$$p(y) = 0{,}2 + 2{,}6y + y^2$$

ergeben.

(b) Wegen

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 234 & 156 \\ 156 & 104 \end{bmatrix}$$

erhalten wir mit dim Kern $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = 1$ einen eindimensionalen Lösungsraum. Aus der Normalgleichung

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 234 \\ 156 \end{bmatrix}$$

ergibt sich die allgemeine Lösungsdarstellung

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Zu Übung 3.69**: Aus Übung 3.68 (a) erhalten wir

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix},$$

so daß sich unter Verwendung von (3.256) und (3.257) die Darstellung

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

mit

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$$

ergibt.

**Zu Übung 3.71**: Benutze: Für $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{R})$, $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Mat}(n, p; \mathbb{R})$ und $\boldsymbol{C} \in \mathrm{Mat}(p, q; \mathbb{R})$ gilt

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\,; \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

(s. Satz. 3.2, (M2) und (M5)), und zeige:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}).$$

**Zu Übung 3.72**: Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

und analog

$$\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger} .$$

Nachrechnen der Symmetriebedingungen

$$\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

liefert somit den Nachweis. Die Optimallösung ergibt sich folglich gemäß

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

# Symbole

Einige Zeichen, die öfters verwendet werden, sind hier zusammengestellt.

$A \Rightarrow B$ aus $A$ folgt $B$
$A \Leftrightarrow B$ $A$ gilt genau dann, wenn $B$ gilt
$x :=$ $x$ ist definitionsgemäß gleich
**Zur Mengenschreibweise** s. Abschn. 1.1.4
$x \in M$ $x$ ist Element der Menge $M$, kurz: »$x$ aus $M$«
$x \notin M$ $x$ ist nicht Element der Menge $M$
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Menge der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$
$\{x \mid x$ hat die Eigenschaft $E\}$ Menge aller Elemente $x$ mit Eigenschaft $E$
$\{x \in N \mid x$ hat die Eigenschaft $E\}$ Menge aller Elemente $x \in N$ mit Eigenschaft $E$
$M \subset N$, $N \supset M$ $M$ ist Teilmenge von $N$ (d.h. $x \in M \Rightarrow x \in N$)
$M \cup N$ Vereinigungsmenge von $M$ und $N$
$M \cap N$ Schnittmenge von $M$ und $N$
$M \backslash A$ Restmenge von $A$ in $M$
$\emptyset$ leere Menge
$A \times B$ cartesisches Produkt aus $A$ und $B$
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ cartesisches Produkt aus $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
$(x_1, \ldots, x_n)$ $n$-Tupel
$[a, b]$, $(a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$ beschränkte Intervalle
$[a, \infty)$, $(a, \infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $\mathbb{R}$ unbeschränkte Intervalle
$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen (s. Burg/Haf/-Wille (Analysis) [27], Abschn. 2.5.2)
$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ Spaltenvektor der Dimension $n$ (Abschn. 2.1.1)
$\mathbb{R}^n$ Menge aller Spaltenvektoren der Dimension $n$ (wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$) (Abschn. 2.1.1)
$\mathbb{C}^n$ Menge aller Spaltenvektoren der Dimension $n$ (wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$) (Abschn. 2.1.5)

### Weitere Bezeichnungen

$|\boldsymbol{v}|$ 1.1.3
$\lambda \boldsymbol{u}$ 1.1.3
$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ 1.1.3
$\perp$ 1.1.5
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ 1.1.5
$\boldsymbol{v}^R$ 1.1.6
$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 1.1.7
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}]$ 1.2.6
$\delta_{ik}$ 1.2.7
$\dim \boldsymbol{U}$ 2.1.3
$\mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_m\}$ 2.1.3
$\boldsymbol{U}^\perp$ 2.1.3
$\boldsymbol{U}_v^\perp$ 2.1.3
$[x_1, x_2, \ldots, x_n]^\mathrm{T}$ 2.2.1
$\mathrm{Rang}\{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k\}$ 2.2.5
$f \circ g$ 2.3.2
$\mathrm{Perm}\, M$ 2.3.2
$S_n$ 2.3.2
$\mathrm{sgn}(p)$ 2.3.3
$\mathbb{Z}_p$ 2.3.5
$\mathbb{K}^n$ 2.4.2
$C(I)$ 2.4.2
$C^k(I)$ 2.4.2
$U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$ 2.4.4
$U_1 \dotplus U_2 \dotplus \ldots \dotplus U_m$ 2.4.4
$\mathrm{Kern}\, f$, $\mathrm{Bild}\, f$, $\mathrm{Rang}\, f$ 2.4.7
$[a_{ik}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le n}}$ 3.1.2
$[a_{ik}]_{m,n}$ 3.1.2
$[\delta_{ik}]_{n,n}$ 3.1.2
$\mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{R})$ 3.1.2
$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ 3.1.3
$\boldsymbol{A}^\mathrm{T}$ 3.1.3
$\widehat{\boldsymbol{a}}_i$ 3.1.3
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 3.2.2
$\mathrm{Kern}\, \boldsymbol{A}$, $\mathrm{Bild}\, \boldsymbol{A}$, $\mathrm{Rang}\, \boldsymbol{A}$ 3.2.2
$\boldsymbol{A}^{-1}$ 3.3.2
$\det \boldsymbol{A}$ 3.4.1
$\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ 3.4.5
$\mathrm{adj}\, \boldsymbol{A}$ 3.4.7
$\boldsymbol{A}^*$, $\overline{\boldsymbol{A}}$ 3.5.1
$\boldsymbol{0}(n)$, $\boldsymbol{U}(n)$, $\mathrm{Sym}(n)$, $\mathrm{Her}(n)$ 3.5.1
$\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ 3.5.1
$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ 3.5.8
$\mathrm{Def}\, \boldsymbol{A}$ 3.8.1
$\chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 3.6.1

$\operatorname{Spur} \boldsymbol{A}$ 3.6.3
$\kappa_i$ 3.6.3
$\gamma_i$ 3.6.4
$\boldsymbol{A}^m$ 3.9.1
$P(\boldsymbol{A})$ 3.9.2
$\mu_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 3.9.4
$(\boldsymbol{A}_m)_{m\in\mathbb{N}},\ \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_j$ 3.9.5
$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{A}_m$ 3.9.5
$\exp \boldsymbol{A}$ 3.9.7
$\sin \boldsymbol{A},\ \cos \boldsymbol{A}$ 3.9.7
$\boldsymbol{D}(\varphi)$ 3.10.1
$\mathbb{R}\boldsymbol{v}$ 3.10.1
$\boldsymbol{S_u}$ 3.10.2
$\boldsymbol{D_q}(\varphi)$ 3.10.3
$\boldsymbol{E}_1(\alpha),\ \boldsymbol{E}_2(\alpha),\ \boldsymbol{E}_3(\alpha)$ 3.10.3
$\boldsymbol{x_B}$ 3.10.5
$\langle \boldsymbol{p}; \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$ 3.10.7

# Literaturverzeichnis


[1] Amann, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. De Gruyter, Berlin, 2 Aufl., 1995.

[2] Aumann, G.: *Höhere Mathematik I – III*. Bibl. Inst., Mannheim, 1970 – 71.

[3] Ayres, F.: *Matrizen*. McGraw-Hill, Düsseldorf, 1 Aufl., 1978.

[4] Banchoff, T. und Wermer, J.: *Linear Algebra Through Geometry*. Springer, New York, 2 Aufl., 1992.

[5] Bartsch, H.: *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. Fachbuchverlag, Leipzig, 20 Aufl., 2004.

[6] Becker, R. und Sauter, F.: *Theorie der Elektrizität*, Bd. 1. Stuttgart, Teubner, 21 Aufl., 1973.

[7] Beiglböck, W.: *Lineare Algebra. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Berlin, Springer, 1983.

[8] Bishop, R.: *The Matrix Analysis of Vibration*. Cambridge University Press, Cambridge, 1965.

[9] Björck, Å.: *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM, Philadelphia, 1996.

[10] Bloom, D. M.: *Linear Algebra and Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[11] Boerner, H.: *Darstellungen von Gruppen*. Springer, Berlin, 2 Aufl., 1967.

[12] Böhmer, K.: *Spline-Funktionen, Theorie und Anwendungen*. Teubner, Stuttgart, 1974.

[13] Boseck, H.: *Grundlagen der Darstellungstheorie*. VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 1973.

[14] Boseck, H.: *Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume*. VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 5 Aufl., 1984.

[15] Brady, M., Hollerbach, J., Johnson, T., Lozano-Pérez, T. und Mason, M. (Hrsg.): *Robot Motion and Control*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983.

[16] Brauch, W., Dreyer, H. und Haacke, W.: *Beispiele und Aufgaben zur Ingenieurmathematik*. Teubner, Stuttgart, 1984.

[17] Brauch, W., Dreyer, H. und Haacke, W.: *Mathematik für Ingenieure*. Teubner, Wiesbaden, 11 Aufl., 2006.

[18] Brehmer, S. und Belkner, H.: *Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra*. Harri Deutsch, Thun, 1972.

[19] Brenner, J.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler I – IV*. Aula, Wiesbaden, 4 Aufl., 1989.

[20] Brickell, F.: *Matrizen und Vektorräume*. Verlag Chemie, Weinheim, 1976.

[21] Bronson, R.: *Matrix Methods*. Academic Press, San Diego, 2 Aufl., 1991.

[22] Bruhns, O. und Lehmann, T.: *Elemente der Mechanik*, Bd. 2 (Elastostatik). Vieweg, Wiesbaden, 2002.

[23] Budden, F.: *The Fascination of Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[24] Burg, C., Haf, H. und Wille, F.: *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Bd. 3. Teubner, Wiesbaden, 4 Aufl., 2002.

[25] Burg, C., Haf, H. und Wille, F.: *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Bd. Partielle Differentialgleichungen. Teubner, Wiesbaden, 3 Aufl., 2004.

[26] Burg, C., Haf, H. und Wille, F.: *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Bd. Funktionentheorie. Teubner, Wiesbaden, 1 Aufl., 2004.

[27] Burg, C., Haf, H. und Wille, F.: *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Bd. 1. Teubner, Wiesbaden, 7 Aufl., 2006.

[28] Burg, C., Haf, H. und Wille, F.: *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Bd. Vektoranalysis. Teubner, Wiesbaden, 1 Aufl., 2006.

[29] Cole, R. J.: *Vector Methods*. Van Nostrand, New York, 1974.

[30] Collatz, L.: *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*. Springer, Berlin, 1968.

[31] Courant, R.: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1 – 2*. Springer, Berlin, 3 Aufl., 1969.

[32] Cracknell, A. P.: *Angewandte Gruppentheorie*. Vieweg, Braunschweig, 2 Aufl., 1994.

[33] Cunningham, J.: *Vektoren*. Vieweg, Braunschweig, 1982.

[34] Curtis, C. W.: *Linear Algebra*. Springer, Berlin, 4 Aufl., 1984.

[35] Dallmann, H. und Elster, K.-H.: *Einführung in die Höhere Mathematik 1 – 3*. Stuttgart, UTB für Wissenschaft, 3 Aufl., 1991.

[36] Demmel, J.: *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.

[37] Dietrich, G. und Stahl, H.: *Matrizen und Determinanten*. Harri Deutsch, Thun, 1978.

[38] Doerfling, R.: *Mathematik für Ingenieure und Techniker*. Oldenbourg, München, 11 Aufl., 1982.

[39] Dörrie, H.: *Vektoren*. Oldenbourg, München, 1941.

[40] Dreszer, J. (Hrsg.): *Mathematik-Handbuch für Technik und Naturwissenschaften*. Harri Deutsch, Zürich, 1975.

[41] Duschek, A.: *Vorlesungen über Höhere Mathematik 1 – 2, 4*. Springer, Wien, 1961 – 65.

[42] Eisenreich, G.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Akademie-Verlag, Berlin, 1980.

[43] Endl, K. und Luh, W.: *Analysis I – III*. Aula, Wiesbaden, 8 Aufl., 1989 – 94.

[44] Engeln-Müllges, G. und Reutter, F.: *Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN-Programmen*. Bibl. Inst., Mannheim, 7 Aufl., 1988.

[45] Faddejew, D. und Faddejewa, W.: *Numerische Methoden der linearen Algebra*. Oldenbourg, München, 1979.

[46] Fetzer, A. und Fränkel, H.: *Mathematik 2*. Springer, Berlin, 5 Aufl., 1999.

[47] Fetzer, A. und Fränkel, H.: *Mathematik 1*. Springer, Berlin, 8 Aufl., 2005.

[48] Fischer, G.: *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger*. Vieweg, Wiesbaden, 15 Aufl., 2005.

[49] Fletcher, T.: *Linear Algebra through its Applications*. Van Nostrand, New York, 1972.

[50] Frazer, R.: *Elementary Matrices*. Cambridge University Press, Cambridge, 1963.

[51] Gantmacher, F. R.: *Matrizentheorie*. Springer, Berlin, 1986.

[52] Golub, G. und Loan, C. van: *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3 Aufl., 1996.

[53] Greenbaum, A.: *Iterative Methods for Solving Linear Systems*, Bd. 17 d. Reihe *Frontiers in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1997.

[54] Gröbner, W.: *Matrizenrechnung*. Bibl. Inst., Mannheim, 1966.

[55] Grosche, G., Ziegler, V., Ziegler, D. und Zeidler, E. (Hrsg.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Bd. 2. Teubner, Wiesbaden, 8 Aufl., 2003.

[56] H., M.: *Algorithmische lineare Algebra*. Vieweg, Wiesbaden, Vieweg.

[57] Haacke, W., Hirle, M. und Maas, O.: *Mathematik für Bauingenieure*. Teubner, Stuttgart, 2 Aufl., 1980.

[58] Hainzl, J.: *Mathematik für Naturwissenschaftler*. Teubner, Stuttgart, 4 Aufl., 1985.

[59] Heinhold, J., Behringer, F., Gaede, K. und Riedmüller, B.: *Einführung in die Höhere Mathematik 1 – 4*. Hanser, München, 1976.

[60] Henrici, P. und Jeltsch, R.: *Komplexe Analysis für Ingenieure 1*. Birkhäuser, Basel, 3 Aufl., 1998.

[61] Henrici, P. und Jeltsch, R.: *Komplexe Analysis für Ingenieure 2*. Birkhäuser, Basel, 2 Aufl., 1998.

[62] Herrmann, D.: *Angewandte Matrizenrechnung*. Vieweg, Braunschweig, 1985.

[63] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis*, Bd. 2. Teubner, Wiesbaden, 13 Aufl., 2004.

[64] Heuser, H.: *Funktionalanalysis*. Teubner, Wiesbaden, 4 Aufl., 2006.

[65] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis*, Bd. 1. Teubner, Wiesbaden, 16 Aufl., 2006.

[66] Hoffmann, B.: *About Vectors*. Dover Publications, New York, 1975.

[67] Hohn, F.: *Elementary Matrix Algebra*. Collier MacMillan Publishers, London, 1973.

[68] Holland, D. und Treeby, T.: *Vectors*. Edward Arnold, London, 1977.

[69] Jahnke, E., Emde, F. und Lösch, F.: *Tafeln höherer Funktionen*. Teubner, Stuttgart, 7 Aufl., 1966.

[70] Jeffrey, A.: *Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 1 – 2*. Verlag Chemie, Weinheim, 1973 – 1980.

[71] Jeger, M. und Eckermann, B.: *Einführung in die vektorielle Geometrie und lineare Algebra*. Birkhäuser, Basel, 1967.

[72] Joos, G.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Aula, Wiesbaden, 15 Aufl., 1989.

[73] Jordan-Engeln, G. und Reutter, F.: *Numerische Mathematik für Ingenieure*. Bibl. Inst., Mannheim, 1984.

[74] Jänich, K.: *Analysis für Physiker und Ingenieure*. Springer, Berlin, 4 Aufl., 2001.

[75] Kamke, E.: *Das Lebesgue-Stieltjes-Integal*. Teubner, Leipzig, 1956.

[76] Kantorowitsch, L. und Akilow, G.: *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Harri Deutsch, Thun, 1978.

[77] Keller, O.: *Analytische Geometrie und lineare Algebra*. VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 2 Aufl., 1963.

[78] Kochendörffer, R.: *Determinanten und Matrizen*. Teubner, Stuttgart, 1957.

[79] Koecher, M.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer, Berlin, 4 Aufl., 1997.

[80] Kostrikin, A.: *Introduction to Algebra*. Springer, New York, 1982.

[81] Kowalsky, H.-J. und Michler, G.: *Lineare Algebra*. Walter de Gruyter, Berlin, 12 Aufl., 2003.

[82] Kreyszing, E.: *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York, 1978.

[83] Kühnlein, T.: *Differentialrechnung II, Anwendungen*. Mentor-Verlag, München, 11 Aufl., 1975.

[84] Kühnlein, T.: *Integralrechnung II, Anwendungen*. Mentor-Verlag, München, 12 Aufl., 1977.

[85] Lambertz, H.: *Vektorrechnung für Physiker*. Klett, Stuttgart, 1976.

[86] Lang, S.: *Algebraische Strukturen*. Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1979.

[87] Laugwitz, D.: *Ingenieur-Mathematik I – V*. Bibl. Inst., Mannheim, 1964 – 67.

[88] Lawson, C. und Hanson, R.: *Solving Least Squares Problems*, Bd. 15 d. Reihe *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1995.

[89] Ledermann, W. und Vajda, S. (Hrsg.): *Handbook of Applicable Mathematics*, Bd. 1: Algebra. John Wiley, New York, 1980.

[90] Leis, R.: *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Bibl. Inst., Mannheim, 1967.

[91] Lewis, P. (Hrsg.): *Vectors and Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

[92] Lingenberg, R.: *Einführung in die lineare Algebra*. Bibl. Inst., Mannheim, 1976.

[93] Ljubarski, G.: *Anwendungen der Gruppentheorie in der Praxis*. VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 1962.

[94] Martensen, E.: *Analysis I – IV*. Spektrum, Heidelberg, 1992 – 1995.

[95] Meinardus, G. und Merz, G.: *Praktische Mathematik I – II*. Bibl. Inst., Mannheim, 1979 – 82.

[96] Meister, A.: *Numerik Linearer Gleichungssysteme*. Vieweg, Wiesbaden, 2 Aufl., 2005.

[97] Meschede, D. (Hrsg.): *Gehrtsen Physik*. Springer, Berlin, 22 Aufl., 2004.

[98] Milne, E.: *Vectorial Mechanics*. Methuen, London, 1948.

[99] Mirsky, L.: *An Introduction to linear Algebra*. Clarendon Press, Oxford, 1972.

[100] Morgenstern, D. und Szabó, I.: *Vorlesungen über Theoretische Mechanik*. Springer, Berlin, 1961.

[101] Muir, T.: *A Treatise on the Theory of Determinants*. Dover Publications, New York, 1960.

[102] Müller, M.: *Approximationstheorie*. Akad. Verlagsges., Wiesbaden, 1978.

[103] Müller, T.: *Darstellungstheorie von endlichen Gruppen*. Teubner, Stuttgart, 1980.

[104] Murdoch, C.: *Analytic Geometry with an Introduction to Vectors and Matrices*. John Wiley, New York, 1966.

[105] Nickel, K.: *Die numerische Berechnung eines Polynoms*. Numerische Math., 9:80 – 98, 1966.

[106] Nickel, K.: *Algorithmus 5: Die Nullstellen eines Polynoms*. Computing, 2:284 – 288, 1967.

[107] Nickel, K.: *Fehlerschranken zu Näherungswerten von Polynomwurzeln*. Computing, 6:9 – 29, 1970.

[108] Noble, B. und Daniel, J.: *Applied linear Algebra*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2 Aufl., 1977.

[109] Oberschelp, A.: *Aufbau des Zahlensystems*. Vandenhoek u. Ruprecht, Göttingen, 3 Aufl., 1976.

[110] Oden, J.: *Applied Functional Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1979.

[111] Parlett, B. N.: *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Bd. 20 d. Reihe *Classics in Applied Mathematics*. Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia, 1998.

[112] Parlett, B.: *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.

[113] Pfeiffer, F. und Reithmeier, E.: *Roboterdynamik. Eine Einführung in die Grundlagen und technischen Anwendungen*. Teubner, Stuttgart, 1996.

[114] Plato, R.: *Numerische Mathematik kompakt*. Vieweg, Wiesbaden, 3 Aufl., 2006.

[115] Pullmann, N.: *Matrix theory and its applications*. M. Dekker, New York, 1976.

[116] Pupke, H.: *Einführung in die Matrizenrechnung*. VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 1953.

[117] Rang, O.: *Einführung in die Vektorrechnung*. Steinkopff, Darmstadt, 1974.

[118] Rothe, R.: *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure*. Teubner, Stuttgart, 1960 – 65.

[119] Ryshik, I. und Gradstein, I.: *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*. Harri Deutsch, Frankfurt, 5 Aufl., 1981.

[120] Sauer, R.: *Ingenieurmathematik 1 – 2*. Springer, Berlin, 1968 – 69.

[121] Schaefke, F.: *Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik*. Springer, Berlin, 1963.

[122] Schmidt, F.: *Vektorrechnung I und II*. Aschendorff, Münster, 1948.

[123] Schmidt, G.: *Basic linear Algebra with Applications*. R.E. Krieger Publ. Comp., New York, 1980.

[124] Schmidt, W.: *Lehrprogramm Vektorrechnung*. Physik Verlag, Weinheim, 1978.

[125] Schwarz, H. und Köckler, N.: *Numerische Mathematik*. Teubner, Wiesbaden, 6 Aufl., 2006.

[126] Schüßler, H.: *Netzwerke, Signale und Systeme 1*. Springer, Berlin, 3 Aufl., 1991.

[127] Shubnikow, A. und Koptsik, V.: *Symmetry in Science and Art*. Plenum Press, New York, 1974.

[128] Smirnow, W.: *Lehrgang der höheren Mathematik I – V*. VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 1971 – 77.

[129] Sonar, T.: *Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik*. Vieweg, Wiesbaden, 2001.

[130] Sperner, E.: *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*. Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1969.

[131] Stanek, J.: *Einführung in die Vektorrechnung für Elektrotechniker*. Verlag Technik, Berlin, 1958.

[132] Steinbach, O.: *Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme*. Teubner, Wiesbaden, 2005.

[133] Steinberg, D.: *Computational Matrix Algebra*. Mc-Graw-Hill, London, 1974.

[134] Stewart, G.: *Introduction to Matrix Computation*. Academic Press, New York, 1973.

[135] Stiefel, E. und Fässler, A.: *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung*. Teubner, Stuttgart, 1979.

[136] Stoer, J.: *Numerische Mathematik I*. Springer, Berlin, 9 Aufl., 2004.

[137] Stoer, J. und Burlisch, R.: *Numerische Mathematik II*. Springer, Berlin, 5 Aufl., 2005.

[138] Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications*. Academic Press, New York, 1976.

[139] Strubecker, K.: *Einführung in die Höhere Mathematik I – IV*. Oldenbourg, München, 1966 – 84.

[140] Szabo, I.: *Höhere Technische Mechanik*. Springer, Berlin, 6 Aufl., 2001.

[141] Trefethen, L. und Bau, D.: *Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.

[142] Tropper, M.: *Matrizenrechnung in der Elektrotechnik*. Bibl. Inst., Mannheim, 1964.

[143] Unbehauen, R.: *Elektrische Netzwerke*. Springer, Berlin, 3 Aufl., 1990.

[144] van der Vorst, H.: *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*, Bd. 13 d. Reihe *Cambridge monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[145] Varga, R.: *Matrix Iterative Analysis*, Bd. 27 d. Reihe *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Berlin, 2 Aufl., 2000.

[146] Vogel, H.: *Probleme aus der Physik. Aufgaben mit Lösungen aus Gehrtsen/Kneser/Vogel, Physik*. Springer, Berlin, 16 Aufl., 1989.

[147] Wagner, K.: *Graphentheorie*. Bibl. Inst., Mannheim, 1970.

[148] Weidmann, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen — Teil 1: Grundlagen*. Teubner, Stuttgart, 2000.

[149] Weidmann, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen — Teil 2: Anwendungen*. Teubner, Wiesbaden, 2003.

[150] Werner, H.: *Praktische Mathematik 1, Methoden der linearen Algebra*. Springer, Berlin, 3 Aufl., 1982.

[151] Wille, F.: *Analysis*. Teubner, Stuttgart, 1976.

[152] Wilson, R.: *Einführung in die Graphentheorie*. Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1976.

[153] Wittig, A.: *Vektoren in der analytischen Geometrie*. Vieweg, Braunschweig, 1968.

[154] Wittig, A.: *Einführung in die Vektorrechnung*. Vieweg, Braunschweig, 2 Aufl., 1971.

[155] Wolfgang, B. und Bunse-Gerstner, A.: *Numerische lineare Algebra*. Teubner, Stuttgart, 1985.

[156] Wörle, H. und Rumpf, H.: *Ingenieur-Mathematik in Beispielen I – IV*. Oldenbourg, München, 1992 – 95.

[157] Zeidler, E. (Hrsg.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Begr. v. I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. Weitergef. v. G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler*. Teubner, Wiesbaden, 2 Aufl., 2003.

[158] Zurmühl, R. und Falk, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen*, Bd. 2. Springer, Berlin, 5 Aufl., 1986.

[159] Zurmühl, R. und Falk, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen*, Bd. 1. Springer, Berlin, 7 Aufl., 1997.

# Stichwortverzeichnis

**A**
Abbildung
– abstandserhaltende, 304
– bijektive, 112
– eineindeutige, 112
– injektive, 112
– multilineare, 172
– strukturverträgliche, 133
– surjektive, 112
– umkehrbar eindeutige, 112
Abstand
– eines Punktes von einer Geraden, 34, 70
abstandserhaltende Abbildung, 198
Abszisse, 2
Addition
– von Vektoren, 10
Additionstheoreme
– für Tangens und Cotangens, 5
additive
– Gruppe, 111
– Schreibweise, 111
Additivität, 171
adjungierte Matrix, 191
Adjunkte, 183
Admittanz-Matrix, 375
Äquivalenzrelation, 136
äußeres Produkt, 50
affine Abbildung
– von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, 323
affine Koordinatentransformation, 329
affiner Unterraum von $mathbbR^n$, 323
affines Koordinatensystem, 323
algebraische Vielfachheit, 219, 223
algebraisches Komplement, 183
alternierende Eigenschaft, 171
annullierendes Polynom, 286
– kleinsten Grades, 292
Antikommutativgesetz
– des äußeren Produkts, 51
Arbeit, 23
Arcuscosinus, 6
Arcuscotangens, 6
Arcusfunktionen, 6
Arcussinus, 6
Arcustangens, 6
Assoziativgesetz
– der Addition von Vektoren, 11
– des äußeren Produkts, 51
– für das innere Produkt, 24, 46
– für die $s$-Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar, 151
– für die Multiplikation mit Skalaren, 11
Aufschaukeln, 211
Aufschaukelungskatastrophe, 211
Ausgleichsgerade, 337
Ausgleichslösung, 339
Automorphismus, 116, 136

**B**
Bahn
– eines Massenpunktes, 57
Balken, 211
Banachraum, 144
Banachscher Fixpunktsatz, 270
Bandmatrix, 269
Basis
– eines linearen Raumes, 151
– eines Roboters, 376
– kanonische, 321
Basis des $\mathbb{R}^3$, 68
Basiselement
– Austausch von, 127
Basismatrix, 318
– eines affinen Koordinatensystems im $\mathbb{R}^n$, 324
Basisvektor, 69
Basiswechsel, 68, 319
– orthonormaler, 69
Baum, 369
Bestimmung der Eigenwerte, 213
Betrag
– eines Vektors, 12
– Gesetze für, 44
Bewegung, 326
Bewertung, 366
Bezugspunkt, 56
Bidiagonalgestalt, 356
bijektiv, 136
bijektive Abbildung, 112
Bild
– einer Matrix, 159
– eines Gruppen-Homomorphismus, 117
Bilinearform, 204

– positiv definite, 205
– positiv semidefinite, 205
– schiefsymmetrische, 204
– symmetrische, 204
binomische Formel, 26
Block, 162
Blockmatrix, 162, 209
Blockzerlegung einer Matrix, 162
Bogenmaß, 3
Brücke, 211

**C**
CG-Verfahren, 347
charakteristische Gleichung, 212, 287
charakteristisches Polynom, 203, 213
– Eigenschaften des, 217
Cholesky-Verfahren, 268
Cholesky-Zerlegung, 346
Computer, 176
Coriolis-Beschleunigung, 18
Corioliskraft, 18, 19
Cosinus, 3
Cosinussatz, 38, 83, 142
Cotangens, 5
Cramersche Regel, 68

**D**
Darstellungstheorie von Gruppen, 167
Defekt einer Matrix, 204, 234, 261
Deflation einer Matrix, 257
Deflationsmethode von Wielandt, 257
Determinante
– einer (3,3)-Matrix, 49
– einer quadratischen Matrix, 169
– Entwicklung nach der $i$-ten Zeile, 187
– Entwicklung nach der $k$-ten Spalte, 187
– Entwicklung nach der ersten Zeile, 50
– Summe von, 218
– symbolische, 53
– zweireihige, 36
Diagonale, 191
diagonalisierbare Matrix, 226
Diagonalisierbarkeitskriterium, 228
Diagonalisierung symmetrischer Matrizen, 230
Diagonalmatrix, 192
Differentialgleichung, 216
– elliptische, 234
– hyperbolische, 234
– parabolische, 234
– ultrahyperbolisch, 234
Dimension
– eines Raumes, 151
Dimension eines Vektorraumes, 126
Dimensionsformel, 139
direkte Summe, 209
direktes Produkt von Matrizen, 210
Distributivgesetz
– des äußeren Produkts, 51
– für das innere Produkt, 24, 46
Distributivgesetze
– für die Multiplikation mit Skalaren, 11
doppeldeutiges Symbol, 295
Doppelgerade, 332
Drehachse, 311
Drehbewegung, 58
– gleichförmige, 17
Drehgeschwindigkeitsvektor, 58
Drehimpuls
– bei einer Zentralkraft, 56
– eines Massenpunktes bzgl. des Nullpunktes, 57
Drehmatrix, 305, 306, 310
Drehmoment, 56
– Betrag des, 56
Drehspiegelung, 317, 318
Drehung, 304, 305, 310, 318
– gegen den Uhrzeigersinn, 3
– Normalform einer, 311
Dreieck, 39
– Flächeninhalt eines, 37
Dreiecksmatrix, 174, 189
– linke, 193
– obere, 193
– rechte, 193
– reguläre, 264
– untere, 193
Dreieckssystem, 88, 101, 161
Dreiecksungleichung, 12, 44, 77
– zweite, 13
Dreieckszerlegung, 266

**E**
Ebene
– schiefe, 14
echte Maximalstelle, 208
echte Minimalstelle, 208
Ecke, 366
Ecken-Kanten-Inzidenzmatrix, 368
Eigenfrequenzen, 217
Eigengleichung, 212
Eigenraum, 203, 223, 229
Eigenvektor, 203, 211, 213, 242
Eigenwert, 203, 211, 242
– algebraische Vielfachheit eines, 219
– einer Matrixpotenz, 222
– $k$-facher, 203, 219
– Verschiebung von, 221
Eigenwertproblem, 212
– algebraisches, 211
eindeutig lösbare Gleichungssystem, 261
eineindeutige Abblidung, 112
Einheitskreislinie, 3
Einheitsmatrix, 149

Einheitsvektor, 47
Einsmatrix, 149
Eintragungen einer Matrix, 148
elektrische Schwingung, 216
Elemente
– einer Matrix, 148
Eliminationsstrategie, 278
Ellipse, 332
Ellipsoid, 336
Endomorphismus, 136
Energie
– kinetische, 231
eng gekoppelte Pendel, 216
Entwicklungssatz
– nach Spalten, 187
– nach Zeilen, 187
Epimorphismus, 136
erzeugende Funktion, 299
Erzeugendensystem, 80, 127
erzeugendes Polynom, 284
euklidische Norm, 12, 272
euklidischer Vektorraum, 141
Eulersche Matrix, 363
Extremalproblem, 208
Extremwert, 208

**F**
Fahrzeugteile, 211
Faktor
– eines Spaltenvektors, 171
Faktorgruppe, 118
Fehlervektor, 272
finite Elemente, 259
Fixgerade, 212
Fixpunkt, 269, 311
Fixpunkteigenschaft, 270
Fläche zweiten Grades, 333
Flächengeschwindigkeit, 57
Flächeninhalt
– eines Dreiecks, 37, 60
– eines von Vektoren aufgespannten Parallelogramms, 51
Flächennormale, 59
Flatterrechnung von Flugzeugen, 216
Fliehkraft, 18
Flugzeugflattern, 211
Flugzeugflügel, 211
Folge von Matrizen, 294
Formel
– binomische, 26
– für die Zwischenwinkel zweier Vektoren, 47
Fredholmsche Alternative, 104, 262
freie Summe von Vektorräumen, 131
Fundamentalschnitt, 370
Fundamentalsystem, 129, 261
Funktion
– erzeugende, 299
Funktionenraum, 123, 264
Fußpunkt, 33, 42

**G**
Gauß-Seidel-Verfahren, 277
General Linear Group GL, 181
generalisierte Inverse, 351
geometrische Vielfachheit, 223
Gerade, 81, 128
– Hessesche Normalform einer, 28
– im $\mathbb{R}^3$, 70
– Parameterform der, 26
Gerade durch **0**, 212
Geraden
– windschiefe, 70
gerichteter Graph, 366
Gesamtdrehimpuls, 57
Gesamtimpedanz-Matrix, 152
Gesamtschrittverfahren, 272
Gleichungssystem
– eindeutig lösbares, 261
– homogenes, 161
– homogenes lineares, 261
– lineares, 157, 262
– lösbares, 261
Glied
– eines Roboters, 376
Graph
– gerichteter, 366
Graßmannscher Entwicklungssatz, 54
Greifer eines Roboters, 376
Grenzmatrix einer Matrixreihe, 295
Grenzwert
– einer Folge, 144
– einer Matrixreihe, 295
Grundschwingung, 254
Gruppe, 109, 166
– abelsche, 110
– additive, 111
– der Kongruenzabbildungen, 109
– endliche, 111
– kommutative, 110
– multiplikative, 111, 181
– Ordnung einer, 111
– unendliche, 111
Gruppe von Matrizen, 195

**H**
Hauptabschnittsmatrix, 266
– führende $k \times k$, 266
Hauptachse
– einer Quadrik, 329
Hauptdiagonale, 149, 191
Hauptdiagonalelement einer Matrix, 191
Hauptminor, 194, 217

Hauptunterdeterminante, 217
Hauptuntermatrix, 217
Hauptvektor
– höchster Stufe, 238
– $k$-ter Stufe, 238
hermitesche Matrix, 193
Hessenberg-Matrix, 259
Hessesche Normalform, 71, 82
Hessesche Normalform einer Geraden, 28, 34
Hilbertraum, 144, 264
Hilbertscher Folgenraum, 124
Hilfsgrößen, 253
homogene Gleichung, 379
Homogenität, 77, 171
homomorph, 167
Homomorphiebedingung, 116
Homomorphiesatz für Gruppen, 118
Homomorphismus, 116
Householder-Verfahren, 308, 350
Hyman-Verfahren, 259
Hyperbel, 332
Hyperboloid
– einschaliges, 336
– zweischaliges, 336
Hyperebene, 128
– im $\mathbb{R}^n$, 81
Hyperfläche zweiten Grades, 326

**I**
Identität, 112, 159
Impedanzmatrix, 151
injektiv, 136
injektive Abbildung, 112
Inneres eines Definitionsbereiches $\mathring{D}$, 208
inneres Produkt, 24
– algebraische Form des, 47
– Regeln für, 77
instabiles schwingendes System, 216
Integralgleichung, 264
Integritätsbereich, 121
Intervall, 3
– abgeschlossenes beschränktes, 3
– halboffenes beschränktes, 3
– offenes beschränktes, 3
– unbeschränktes, 3
Inverse, 166
– generalisierte, 351
inverse Matrix, 166
Inversenformel, 184
Inverses Element, 110
Inzidenzmatrix, 368
Isometrie, 198, 304
isomorph, 167
isomorphe Vektorräume, 136
Isomorphismus, 116, 136
Iterationsfolge, 270
– divergente, 273
Iterationsmatrix, 270

**J**
Jacobi-Schritt, 253
Jacobi-Verfahren, 270, 356
Jordankasten, 225, 236, 291
Jordanmatrix, 225, 236
Jordansche Normalform, 235, 236, 291
– Existenz der, 237

**K**
Kästchen, 162
Kante, 366
kartesische Koordinaten
– bzgl. einer Orthonormalbasis, 322
– matrixfreie Transformation von, 322
kartesisches Koordinatensystem, 2
Kegel, 330
– elliptischer, 336
Kern
– einer Matrix, 159
– eines Gruppen-Homomorphismus, 117
Kette von Hauptvektoren, 238
kinetische Energie, 231
Kirchhoffsches Stromgesetz, 369
Knoten, 359
Knotenlast-Vektor, 365
Körperaxiome, 120
Kofaktor, 183
kollineare Vektoren, 67
Kommutativgesetz
– der Addition von Vektoren, 11
– für das innere Produkt, 24, 46
– für die Addition von Matrizen, 151
komplanare Vektoren, 67
Komplement
– orthogonales, 263
– rechtwinkliges, 30
komplementäre Matrix, 183
komplexe
– Ebene, 211
– Matrix, 156, 163, 164, 170, 174, 191
– Zahlen, 211
komplexes
– Polynom, 284
Komponenten
– des Kraftvektors, 15
– kartesische, 2
Komposition, 159
Konditionszahl, 347
Kongruenzabbildung, 107
konjugiert komplexe
– Matrix, 191
– Zahl, 191
Konvergenzradius, 297

Konvergenzverlauf, 272
Koordinaten
– kartesische, 2
– von $\boldsymbol{x}$ bzgl. $\boldsymbol{B}$, 319
Koordinatendarstellung, 27
– der Parameterform der Geraden, 26
Koordinateneinheitsvektor, 25, 46
Koordinatensystem
– affines, 323
– globales, 359
– kartesisches, 2
– lokales, 359
Koordinatentransformation, 320
Koordinatenvektor
– bezüglich einer Basis, 319
Korkenzieherregel, 51
Kräfte-Transformations-Matrix, 363
Kräfteparallelogramm, 13
Kraft, 13
– auf elektrischen Leiter, 61
– Moment einer, 56
– Wirkungslinien der, 14
Krafteck, 14
Kraftvektor, 13
Kraftwirkung auf eine bewegte Ladung, 60
Kreiskegel, 330
Kristallographie, 321
Kriterium von Hadamard, 206, 208
– für $n = 2$ und $n = 3$, 207
Kronecker-Produkt, 210
Kroneckersymbol, 68, 97
Krylov-Verfahren, 293
Kühlturm, 336

**L**
Länge, 143
– eines Vektors, 12
Lagrangesches Interpolationspolynom, 301
Lastvektor, 364
leere Menge, 332
Leiterschleife, 62
Leitwerk, 211
linear unabhängige Vektoren, 78
lineare Abbildung, 133
– Additivität der, 133
– Homogenität der, 133
– Linearität der, 133
– von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, 133
lineare Mannigfaltigkeit, 81, 102, 128, 261
– Parameterdarstellung einer, 82
lineare Transformation, 133
linearer Anteil, 323
linearer Operator, 133
linearer Raum
– über $\mathbb{R}$, 151
– von Matrizen über $\mathbb{K}$, 195
linearer Raum über $\mathbb{K}$, 122
lineares Ausgleichsproblem, 337
lineares Gleichungssystem, 86, 157
– homogenes, 86, 104
– inhomogenes, 86, 104
– quadratisches, 87
– rechteckiges, 104
– reguläres, 96
– singulär, 96
Linearkombination von Vektoren, 47, 78, 125
linke Dreiecksmatrix, 192, 193
linke unipotente Matrix, 192
Linksmultiplikation, 212
lösbares Gleichungssystem, 261
Lösungsgesamtheit, 245
Lösungsmenge, 261
lokale Gleichgewichtsmatrix, 364
Lot, 33, 70
Luftkräfte, 216

**M**
Mannigfaltigkeit
– $d$-dimensionale, 262
– lineare, 81, 261, 323
Masche, 367
Mascheninzidenz-Matrix, 373
Masse
– schwingende, 216
Matrix
– Addition, 150
– adjungierte, 191
– algebraische Komplement einer, 183
– Bild einer, 159
– Blockzerlegung einer, 162
– charakteristisches Polynom einer, 213
– Defekt einer, 204, 234, 261
– Deflation einer, 257
– Determinante einer quadratischen, 169
– diagonalähnliche, 226
– diagonalisierbare, 226
– Dreieckszerlegung einer, 266
– Eintragungen der, 148
– Elemente der, 148
– elementweise Differentiation, 301
– Hauptdiagonale einer, 149
– Hauptdiagonalelement einer, 191
– hermitesche, 193, 235
– inverse, 166
– invertierbare, 166
– Jordansche Normalform einer, 236
– Kern einer, 159
– komplementäre, 183
– komplexe, 191
– komplexwertige, 148
– konjugiert komplexe, 191
– leicht invertierbare, 270

– linke unipotente, 192, 265
– negativ definite, 193
– negativ semidefinite, 193
– nilpotente, 283
– Nullraum einer, 160
– orthogonale, 192, 193, 197
– positiv definite, 193, 205, 268
– positiv semidefinite, 193, 205
– quadratische, 148
– Rang einer, 159
– rangdefizitäre, 342, 347
– rechte unipotente, 192
– reelle, 133
– reelle quadratische, 262
– reguläre, 164, 178, 181
– $s$-Multiplikation, 150
– schiefhermitesche, 193
– schiefsymmetrisch, 193
– schiefsymmetrische, 174
– schwach besetzte, 269
– Signatur einer, 204
– Singulärwert einer, 352
– Spaltenraum einer, 160
– Spektralradius einer, 212
– Spektrum einer, 212, 299
– Spur einer, 217
– Subtraktion, 150
– symmetrische, 193
– Trägheitsindex einer, 204
– transponierte einer, 152
– um $\boldsymbol{b}$ erweiterte, 260
– unitäre, 192
– unzerlegbare, 274
– vom Format $(m, n)$, 147
– Zeilenraum einer, 160
– zerlegbare, 274
– zugehörige negative, 149
– zweireihige quadratische, 36
Matrix-Cosinusfunktion, 303
Matrix-Produkt, 154
Matrix-Sinusfunktion, 303
Matrixfolge
– divergente, 294
– elementweise konvergente, 294
Matrixfunktion, 297
Matrixnorm, 302
Matrixpolynom, 284
– vertauschbares, 285
Matrixpotenzreihe, 297
Matrixreihe, 295
– divergente, 295
– Grenzmatrix einer, 295
– Grenzwert einer, 295
– konvergente, 295
– Summe einer, 295
Matrizenalgebra, 195, 196
Matrizengruppe, 195
$m$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit, 81
Meßfehler, 337
Michelson-Versuch, 17
Minimalpolynom, 292
Moment einer Kraft, 56
Monomorphismus, 136
Multilinearität, 172
Multiplikation
– von Vektoren mit einem Skalar, 10
Multiplikation mit Skalaren, 122
Multiplikationssatz
– für Determinanten, 180
multiplikative Schreibweise, 111

**N**

Nachrichtentechnik, 216
Nebendiagonalelement, 274
Nebenklasse, 117
negativ definite Matrix, 193
negativ semidefinite Matrix, 193
neutrales Element, 110
Newtonsches Verfahren, 232
nilpotente Matrix, 283
Norm, 143
– euklidische, 12
Normalform
– einer Drehung, 311
– einer quadratischen Form, 231
– orthogonale, 351
Normalformsatz, 202, 231
Normalgleichung, 341
– Lösung der, 346
Normalteiler, 113
normierter linearer Raum, 143
– vollständiger, 144
$n$-Tupel, 75
Nullmatrix, 148
– Neutralität der, 151
Nullpolynom, 284
Nullpunkt, 2
Nullraum
– einer Matrix, 160
Nullvektor, 9
numerischer Vektor, 138
numerisches Lösungsverfahren
– iteratives, 269
– konvergentes, 270

**O**

obere Dreiecksmatrix, 193
Optimallösung, 339
Ordinate, 2
orthogonal, 23
Orthogonalbasis, 135
orthogonale

– Normalform, 351
orthogonale Matrix, 192, 193
orthogonales Komplement, 85, 142, 263
Orthogonalisierungsverfahren
– Schmidtsches, 84
Orthogonalprojektion, 340
Orthonormalbasis, 68, 142, 229, 230
Orthonormalsystem, 142, 193
Ortspfeil, 9, 43
Ortsvektor, 9, 26

**P**
Parabel, 332
Paraboloid
– elliptisches, 336
– hyperbolisches, 336
Parallelogrammgleichung, 38
Parallelschaltung von Vierpolen, 152
Parameter, 27
Parameterform
– einer Geraden, 33
– einer Geraden im $\mathbb{R}^3$, 70
Parameterform der Geraden, 26
Permutation
– Fehlstand einer, 115, 169
– gerade, 115, 169
– ungerade, 115, 169
Permutationsgruppe, 113
Permutationsmatrix, 192, 265
Pfeil, 8, 42
– Aufpunkt des, 8
– Fußpunkt des, 8
– Spitze des, 8
Polarkoordinaten, 7
Polynom
– annullierendes, 286
– erzeugendes, 284
– komplexes, 284
– reelles, 284
– zweiten Grades, 326
positiv definite Matrix, 193
positiv semidefinite Matrix, 193
Potentialtheorie, 264
Potenzen, 120
Potenzreihe, 296
Poyntingscher Vektor, 60
Prä-Hilbertraum, 141
Prisma, 65
Produkt
– äußeres, 50
– inneres, 24
Projektion, 22
Projektionsvektor, 46
Pseudoinverse, 351
Punkt, 122, 332
– in der Ebene, 9

$p$-zeiliges Trapezsystem, 96, 102

**Q**
$QR$-Verfahren, 259
quadratische
– Ergänzung, 201
– Matrix, 148
quadratische Ergänzung, 327
quadratische Form, 200
quadratisches lineares Gleichungssystem
– reguläres, 101
– singuläres, 102
Quadrik, 326
– Hauptachsen einer, 329
– im $\mathbb{R}^3$, 333
– Mittelpunkt der, 329

**R**
Randwertproblem, 264
Rang
– einer Matrix, 159
– – Berechnung des, 161
– einer Menge von Vektoren, 105
Rangbeziehungen, 160
Rangkriterium, 261, 337
Rechenregeln für das Spatprodukt, 63
rechte Dreiecksmatrix, 185, 192, 193
rechte unipotente Matrix, 192
Rechte-Hand-Regel, 50
Rechtssystem, 50
rechtwinklig, 23
Reduktion durch unipotente Matrizen, 201
reelles
– Polynom, 284
Regeln der Bruchrechnung, 120
Relativbeschleunigung, 18
relative
– Trägkeitskraft, 19
Relativitätstheorie, 17
Resonanzeffekt, 216
Rest, 289
Restklassenkörper modulo $p$, 121
Resultierende, 13
Richtung, 47
Richtungscosinus, 48
Richtungscosinus-Matrix, 383
Ring, 121
– kommutativer, 121
Roboter, 376
Robotik, 379
rotierende Achse, 211

**S**
Säkulargleichung, 212
Sarrussche Regel, 49, 53
Sattel, 336

Satz
– des Pythagoras, 142
– des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$, 83
– über die Hauptachsentransformation, 202
– von Euler über Drehmatrizen, 315
– von Jacobi, 202
– von Lagrange, 118
Satz von
– Cayley-Hamilton, 287
schiefe Ebene, 14
schiefhermitesche Matrix, 193
schiefsymmetrische Matrix, 193
Schmidtsches Verfahren, 233
Schmitdsches Orthogonalisierungsverfahren, 142
Schnitt eines Graphen, 369
schwach besetzte Matrix, 269
schwaches
– Spaltensummenkriterium, 275
– Zeilensummenkriterium, 274
Schwarzsche Ungleichung, 77
schwingende Tragfläche, 211
Schwingung
– starr gekoppelte, 251
Segment eines Roboters, 376
Seitenhalbierende, 39
senkrecht, 23
shiften, 221
Signatur, 234
Signatur einer Matrix, 204
Singulärwertzerlegung, 351, 352
Sinus, 3
Skalar, 122
skalare Multiplikation eines Vektors, 10
Skalarmatrix, 192
Spaltenindex, 148
Spaltenmatrix, 153
Spaltenpivotierung, 93
Spaltenraum
– einer Matrix, 160
Spaltensummenkriterium
– schwaches, 275
– starkes, 272
Spaltenvektor, 153
– Einträge des, 75
– Komponenten des, 75
– Koordinaten des, 75
– reeller, 75
Spaltenzahl, 148
Sparse-Matrix, 269
Spatprodukt, 49, 68
Spektralradius, 270, 272
Spektralradius einer Matrix, 212
Spektrum einer Matrix, 212
Spiegelung, 304, 305, 307, 318
Spiegelungsmatrix, 305–307
Spur einer Matrix, 217
Stabendkraft, 362
Stabkraft-Vektor, 365
Stabwerk, 359
Stäbe, 359
starkes
– Spaltensummenkritierium, 272
– Zeilensummenkriterium, 272
starrer Körper, 376
Startvektor, 270
strukturverträgliche Abbildung, 133
Subdiagonalmatrix, 193
Subtraktion
– von Vektoren, 10
Summe von Unterräumen, 130
Superdiagonalmatrix, 193
surjektiv, 136
Symmetriegruppe, 114
symmetrische Matrix, 193

**T**

Tangens, 5
Teilraum, 79
Tetraeder, 65
Totalpivotierung, 96
Trägheitsellipsoid, 336
Trägheitsindex, 234
Trägheitsindex einer Matrix, 204
Trägheitskraft
– relative, 19
Trägheitssatz, 234
Transformation einer Matrix, 220
– auf Jordansche Normalform, 236
Transformationsinvarianz, 222
Transformationsmatrix, 247
Translationsanteil, 323
transponiert, 76
Transponierte, 152
Transposition, 114
Transpositionsregel, 170
Trapezsystem, 161
Turm, 211

**U**

Übergangsmatrix, 319, 322
Umkehrabbildung, 166
unitäre Matrix, 192
Unterdeterminante, 179
untere Dreiecksmatrix, 193
Untergruppe, 113
– echte, 113
– Linksnebenklasse einer, 117
– Rechtsnebenklasse einer, 117
– triviale, 113
– volle, 113
Untermatrix, 162, 183, 209
Unterraum, 79, 160, 261

– Basis eines, 79
– Dimension eines, 79
– eines Vektorraumes, 126
unzerlegbare Matrix, 274
Ursprung, 2

**V**
Vektor, 122
– Betrag eines, 76
– dreidimensionaler, 42
– euklidische Norm eines, 76
– Komponenten des, 8
– Koordinaten des, 8
– Länge eines, 12, 76
– negativer, 10
– numerischer, 138
– räumlicher, 42
– verschieblicher, 43
– zweidimensionaler, 8
Vektoren, 1
– Addition von, 10, 75
– inneres Produkt zweier, 76
– kollineare, 67
– komplanare, 67
– linear unabhängige, 68
– Multiplikation mit einem Skalar, 75
– Skalarprodukt zweier, 76
– Subtraktion von, 10, 75
Vektorraum, 11
– Dimension eines, 126
– endlichdimensional, 126
– euklidischer, 141
– Kopie eines, 137
– $n$-dimensionaler reeller, 75
– über einem Körper $\mathbb{K}$, 121
– unendlichdimensionaler, 126
Vektorraum-Homomorphismus, 133
Verknüpfung, 108
Verschieben von Eigenwerten, 221
Vielfachheit
– algebraische, 223
– geometrische, 223
Vierpol, 152
vollständige Pivotierung, 93
Vorwärtselimination, 278

**W**
Walze, 14
Weierstraß-Jordansche Normalform, 236
Wertebereich
– eines Gruppen-Homomorphismus, 117
windschiefe Geraden, 70
Winkel, 3, 48
– zwischen zwei Elementen eines euklidischen Vektorraums, 142
Winkelanordnung, 155
Winkelgeschwindigkeitsvektor, 231
Wirkungslinie
– der Kraft, 14
– der Resultierenden, 14

**Z**
Zeilen-Pivotierung, 93
Zeilenindex, 148
Zeilenmatrix, 153
Zeilenraum
– einer Matrix, 160
Zeilensummenkriterium
– schwaches, 274
– starkes, 272
Zeilenvektor, 75, 153, 193
Zeilenzahl, 148, 179
Zentrifugalkraft, 18
Zentripetalbeschleunigung, 18
Zentripetalkraft, 18
zerlegbare Matrix, 274
Zwei-Massen-Schwinger, 214
Zweig, 366
Zwischenwinkel, 25, 46
Zylinder, 330
– elliptischer, 336
– hyperbolischer, 336
– parabolischer, 336