Anhang

A 1 Bücher und Normen

A 1.1 Weiterführende Bücher

Biezeno, C.B.; *Grammel, R.*: Technische Dynamik. 2 Bde. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1971

Fischer, U.; *Stephan, W.*: Mechanische Schwingungen. Fachbuchverlag Leipzig, 1993

Hagedorn, P.; *Otterbein, S.*: Technische Schwingungslehre. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987

Irretier, H.: Grundlagen der Schwingungstechnik. 2 Bde. Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden, 2000 bzw. 2001

Klotter, K.: Technische Schwingungslehre
Erster Band: Einfache Schwinger
Teil A: Lineare Schwingungen. 1988
Teil B: Nichtlineare Schwingungen. 1980
Zweiter Band: Schwinger von mehreren Freiheitsgraden. Nachdruck der 2. Auflage von 1960, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1981

Magnus, K.; *Popp, K.*: Schwingungen. Teubner, Stuttgart, 1997

Waller, H.; *Schmidt, R.*: Schwingungslehre für Ingenieure. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989

Wittenburg, J.: Schwingungslehre: Lineare Schwingungen, Theorie und Anwendungen. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1996.

A 1.2 Ausgewählte Normen

DIN 1311 – Schwingungen und schwingungsfähige Systeme, Teil 1 bis Teil 3, 2000 bzw. 2002.

VDI 3830 – Werkstoff- und Bauteildämpfung. Blatt 1 bis Blatt 5 2004 bzw. 2005.

A 2 Lösungen der Aufgaben

2.1 $\hat{x} = 7{,}94$ cm; $\varphi_0 = 35{,}62°$

2.2 $f_0 = \dfrac{3}{4}H;\ \hat{f}_{\mathrm{ck}} = \dfrac{H}{k^2\,\pi^2}(1 - \cos k\,\pi);\ \hat{f}_{\mathrm{sk}} = -\dfrac{H}{k\pi}\cos k\,\pi\ ;$

Approximationen $f_k(t)$ für $f(t)$ durch Fourier-Reihe bis zur Ordnung k=4:

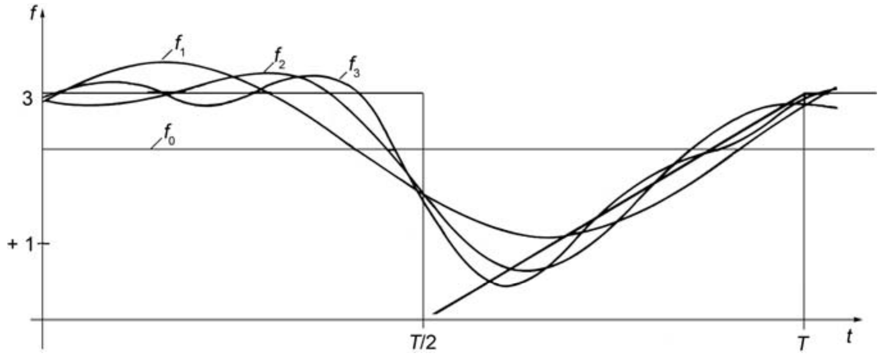


Bild A.1 Harmonische Analyse: Darstellung der Lösung zu Aufgabe 2.2 für H=3

$$f_4\,(t) = 2{,}25 + 0{,}60793\cos\frac{2\,\pi}{T}t \qquad + 0{,}06755\cos 3\,\frac{2\,\pi}{T}t$$
$$+ 0{,}95493\sin\frac{2\,\pi}{T}t - 0{,}47746\sin 2\,\frac{2\,\pi}{T}t +$$
$$+ 0{,}31831\sin 3\,\frac{2\,\pi}{T}t - 0{,}23873\sin 4\,\frac{2\,\pi}{T}t\ ,$$

2.3 $\hat{f}_{\mathrm{ck}} = 0,\ \hat{f}_{\mathrm{sk}} = 4H/(k^2\pi^2)\left(\sin\dfrac{k\pi}{2} - \sin\dfrac{k\,3\pi}{2}\right)$

3.1 $\omega = \sqrt{m\,g/((m + \mathrm{J_S}/r^2)(R - r))} = \sqrt{\dfrac{5}{7}g/(R - r)}$

3.2 $T = 2\pi\sqrt{\mathrm{J_A}/(m\,g\cos\gamma\cdot \mathrm{e})}$

3.3 $T = 2\pi\sqrt{\mathrm{J_A}/(m\,g\,\mathrm{e})} = 2\pi\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}r^2 + \dfrac{1}{3}h^2\right)/(g\sqrt{r^2 + h^2/4})} = 0{,}784\,\mathrm{s}$

3.4 $T = 2\pi\ \sqrt{(\mathrm{J_{01}} + m_2\,x^2)/((m_1\,\mathrm{e_1} - m_2\,x)g)}$

4.1 a) $\omega = \sqrt{(k\,\mathrm{e}^2 - m_1\,g\,h)/(m_1\,h^2)}$

b) $\omega = \sqrt{(k\,\mathrm{e}^2 - m_1\,g\,h)/(m_1\,h^2 + m_2\,\mathrm{e}^2)}$

c) $\omega = \sqrt{(k\,e^2 - m_1\,g\,h - m_1\,h^2\,\omega^{*2})/(m_1\,h^2 + m_2\,e^2)}$

$F_V = m_1\,r\,h/e\,\omega^{*2} - m_2\,g$

$\omega^* \geqq \sqrt{(k\,e^2 - m_1\,g\,h)/(m_1\,h^2)}$

4.2 a) $\omega = \dfrac{d\,b}{2}\sqrt{\pi\,E/(J_0\,l)}$

b) $\omega = b/\sqrt{(4l/(E\,\pi\,d^2) + k_2^{-1}(e_1/e_2)^2)\,J_0}$

4.3 Starrachse $k_{ges} = 2\,k_r\,k_w/(k_r + k_w)$, $\omega_z = \sqrt{k_{ges}/m} = \dfrac{12{,}04}{s}$

Einzelradaufhängung $k_{ges} = 2\,k_r\,k_w \Big/ \left(k_w + k_r \left(\dfrac{l-e}{b-e}\right)^2 \right)$

$\omega_z = \sqrt{k_{ges}/m} = 7{,}64\ 1/s$

4.4 $y = m\,g/k\,(1 - \cos\,\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{k/m}$

$y_{max} = 2\ m\ g/k = 2\ F_G\,/k = 2\ y_{stat}$. Die Federverformung und damit auch die Beanspruchung der Feder wird bei plötzlicher Belastung doppelt so groß wie bei statischer Belastung (dynamischer Lastfaktor).

4.5 a) $T = 2\,\pi\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}m_1\,l^2 + m_2\,x^2\right)/((m_1\,l/2 + m_2\,x)\,g)}$

b) $F_V = k\,b$

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1\,l/2 + m_2\,x)\,g + k\,b\,l\,(1 + l/(2b))}{1/3\ m_1\,l^2 + m_2\,x^2}}$$

4.6 $n = 80{,}4\ 1/\text{min}$

4.7 $n = 138{,}3\ 1/\text{min}$

4.8 a) $k_{ges} = 3\ E\ I/(l_1^2\,(l + l_1))$, $n = 768{,}7\ 1/\text{min}$

b) $1/k_{ges} = l_1^2\,(l + l_1)/(3\ E\ I) + (l_1/l)^2\,\dfrac{1}{k}$

$n = 526{,}2\ 1/\text{min}$

4.9 a) $\omega = \sqrt{(2k\,e^2 + (m_{Stab}\ l/2 + m\,l)\,g)\Big/\left(\left(\dfrac{1}{3}m_{Stab} + m\right)l^2\right)}$

b) $\omega = \sqrt{(2k\,e^2 - (m_{\text{Stab}}\; l/2 + m\,l)\,g)/\left(\left(\frac{1}{3} m_{\text{Stab}} + m\right) l^2\right)}$

c) $\omega = \sqrt{\dfrac{2k\,e^2 - (m_{\text{Stab}}\,l/2 + m\,l)\,g\,\cos\gamma}{(1/3\;m_{\text{Stab}} + m)\,l^2}}$

4.10 $\omega = \sqrt{(k_{\text{V}}\,l_1^2 + k_{\text{H}}\,l_2^2)/(m_1\,e_1^2 + m_2\,e_2^2)}$

4.11 a) $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1\,b^2 + k_2\,h^2 - m\,g\,h/2}{\text{J}_{\text{S}} + m/4\,(b^2 + h^2)}} = 9{,}57\,\dfrac{1}{\text{s}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\text{J}_{\text{S}} + m(b^2 + h^2)/4}{mg/2\,\sqrt{b^2 + h^2}}} = 2{,}10\text{ s}$

4.12 a) $T = 2\pi\sqrt{2\,r/g} = 1{,}79\text{ s}$

b) $k = m\,(2\;\omega(b)^2\,r - g)/(2\,r) = 18210$ N/m

4.13 a) $\omega = \sqrt{(k_{\text{R}}\;e^2 + G\,\pi\,d^4/(32\,l))/(m\,e^2)}$

b) $\omega = \sqrt{(k_{\text{R}}\;e^2 + G\,\pi\,d^4/(32\,l))/(m\,e^2 + \text{J}_{\text{S}})}$

4.14 $\text{J}_{\text{S}} = T^2\,m\,g\,e^2/(4\,\pi^2\,l) = 0{,}647\text{ kg m}^2$

4.15 $T = 2\pi\sqrt{l\,b/(e\,g)}$

4.16 a) $\omega = \sqrt{k\,(l/2\sin\gamma)^2/(1/12\;m_1\;l^2)} = \sqrt{\dfrac{3k\,\sin^2\gamma}{m_1}} = \dfrac{67{,}9}{\text{s}}$

b) $F_{\text{V}} = 3{,}654$ N; von Einfluss, aber sehr gering;

$\omega = \sqrt{(k\,(l/2\sin\gamma)^2 + F_{\text{V}}\;l/2\cos\gamma)/(1/12\;m_1\;l^2 + m_2\;l^2/4)} = 29{,}4\text{ 1/s}$

c) $\omega = \sqrt{(k\,\sin^2\gamma + \rho\,g\,\pi\,d^2/4)/(1/3\;m_1 + m_2)} = 29{,}2\text{ 1/s}$; (ohne F_{V})

4.17 $\omega = \sqrt{(k\,(l_1/l_2)^2\;e^2 + m\,g\,l\cos\beta)/(m\,l^2)}$

$= \sqrt{k/m\,(l_1/l_2\;e/l)^2 + g/l\cos\beta}$

4.18 a) $\omega = \sqrt{\left(k_{\text{D}} - \frac{3}{2} m\,g\,l\right)/\left(\frac{5}{4} m\,l^2\right)}$

Stabilitätsbedingung: $k_D > \frac{3}{2} m\, g\, l$

b) $\omega = \sqrt{(k_D + m\, r\, \omega^{*2}\ 3/2\, l)/(5/4\, m\, l^2)}$

4.19 a) $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $\omega_2 = \sqrt{(k_2\, h_F^2 - m_2\, g\, h)/(m_2\, h^2)}$

b) $\omega = \sqrt{(k_1\, h^2 + k_2\, h_F^2 - m_2\, g\, h)/((m_1 + m_2)\, h^2)}$

$$\omega = \sqrt{\left((k_1\, h^2 + k_2\, h_F^2 - \left(m_2 + \frac{1}{2} m_{AB}\right) g\, h\right)/((m_1 + m_2 + m_{AB}) h^2)}$$

4.20 a) $\omega_y = 2\, l_3/l_1 \sqrt{k/m}$; b) $\omega_y = \sqrt{k_{yers}/m}$ mit

$$k_{yers} = 1/((l_1 \backslash l_3)^2/(4k) + 8\, l_1^2\, l_2/(G\, \pi\, d_2^4) + 64\, l_1^3/(3\, E\, \pi\, d_1^4))$$

4.21 a) $\omega = \sqrt{2 k_1/m}$;

b) Ohne Federvorspannung: $\omega = \sqrt{2\, k_1/m}$, mit Federvorspannung:
Federkraft $F_2 = F_V + \Delta F$

$$F_2 = F_V + k_2(\sqrt{l^2 + x^2} - l)$$

$$= F_V + k_2\, l(\sqrt{1 + (x/l)^2} - 1)$$

$$= F_V + k_2\, l\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + - \ldots - 1\right)$$

$$F_2 = F_V + k_2\, l \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

Die weiteren Reihenglieder können vernachlässigt werden, da sie klein von höherer Ordnung sind.

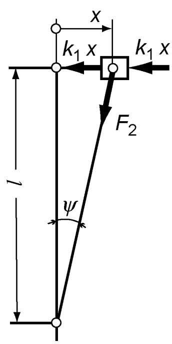


Bild A.2
Zu Aufgabe 4.21 b)

Rückstellkraft aus der zusätzlichen Feder $F_{2x} = - F_2 \sin \psi$. Dabei ist

$$\sin \psi = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{x}{l} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2}} = \frac{x}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \underbrace{\frac{3}{8}\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \ldots}_{\text{Klein von höherer Ordnung}}\right)$$

Damit

$$F_{2x} = -\left(F_V + k_2 \frac{l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)\frac{x}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)$$

$$= -F_V \frac{x}{l} \underbrace{- k_2 \frac{l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + F_V \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - + \ldots}_{\text{Klein von höherer Ordnung}}$$

Damit wird die gesamte Rückstellkraft

$$F_R = -2\,k_1\,x - F_V \frac{x}{l} = -(2\,k_1 + F_V/l)\,x \text{ und } \omega = \sqrt{\frac{2\,k_1 + \dfrac{F_V}{l}}{m}}.$$

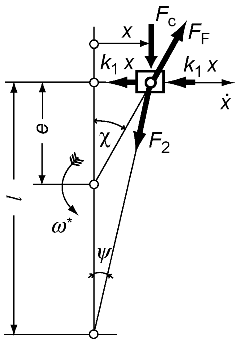


Bild A.3 Zu Aufgabe 4.21 c)

c) Mit d'Alembert: Trägheitskräfte

Fliehkraft $F_F = m \dfrac{e}{\cos\chi}\,\omega^{*2}$

Trägheitskraft aus Coriolisbeschleunigung

$F_C = m\,2\,\omega^*\,\dot{x}$ ($\perp$ zur Führung)

Nach Newton

$$\sum F_{ix} = -2\,k_1\,x - F_V \frac{x}{l} + F_F \sin\chi = m\,\ddot{x} \quad \text{oder}$$

$$-2\,k_1\,x - F_V \frac{x}{l} + m\,e\tan\chi\,\omega^{*2} = m\,\ddot{x} \text{ mit } \tan\chi = \frac{x}{e}$$

erhält man $-\left(2\,k_1 + \dfrac{F_V}{l} - m\,\omega^{*2}\right)x = m\,\ddot{x}$, daraus liest man ab

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,k_1 + F_V/l}{m} - \omega^{*2}}\ .$$

5.1 a) Vier Federn parallelgeschaltet; $k_y = 2\,k_R + 2\,k_W$; $m = 2\,m_1 + m_2$; ohne Dämpfung $\omega_{0y} = \sqrt{k_y/m} = 103{,}9$ 1/s; mit Dämpfung $\delta = 2\,d/(2\,m) = 56{,}1$ 1/s $< \omega_{0y}$, also schwache Dämpfung. $\omega_{dy} = \sqrt{\omega_{0y}^2 - \delta^2} = 87{,}5$ 1/s.

b) $k_D = \sum k_i\, r_i^2 + F_G\, e \cos\beta = 2\,k_R\,(l/2)^2 + 2\,k_W\,(e_F/2)^2$

$J_O = 2\,m_1\,(l/2)^2 + 1/12\,m_2\,l^2$, ohne Dämpfung $\omega_{0\varphi} = \sqrt{\dfrac{k_D}{J_O}} = 117{,}9$ 1/s,

mit Dämpfung $\delta = 2\,d\,r_d^2/(2\,J_O) = 46{,}0$ 1/s,

$\omega_{d\varphi} = \sqrt{\omega_{0\varphi}^2 - \delta^2} = 108{,}5$ 1/s.

5.2 a) $f_x = 1/(2\,\pi)\sqrt{k_{x\,ges}/m_{ges}} = 1/(2\,\pi)\sqrt{48\,E\,I_1/(h^3\,m_{ges})} = 5{,}97$ Hz

b) $f_y = 1/(2\,\pi)\sqrt{4\,E\,A/(h\,m_{ges})} = 67{,}52$ Hz

c) $f_{dy} = 0{,}98\,f_y = f_y\sqrt{1-\vartheta^2}$, $\quad \vartheta = \sqrt{1-0{,}98^2} = 0{,}199$

5.3 a) $\omega_0 = 13{,}53$ 1/s, b) $d = J_O/r_d^2\,\omega_0 = 3974{,}4$ kg/s,

$\varphi = \varphi_0\, t\, e^{-\delta t} = 3{,}0\dfrac{1}{s}\,t\,e^{-13{,}53\frac{1}{s}t}$, $\quad t_m = 1/\delta = 0{,}074$ s

$\varphi_{max} = 0{,}0816 = 4{,}67°$

c) $k > m\,g\,e/(2\,r^2) = 4179$ N/m

5.4 a) $\omega_0 = \sqrt{(k_R\,l^2 + k_W(e_F \sin\gamma)^2)/(J_S + m\,e^2)}$

b) $d < 2/(e_F \sin\gamma)^2\sqrt{(k_R\,l^2 + k_W(e_F \sin\gamma)^2)\,(J_S + m\,e^2)}$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

5.5 a) $T_d = 0{,}345$ s, $\omega_d = 18{,}22$ 1/s

b) $\delta = 0{,}124$ 1/s, $\vartheta = 0{,}0068$

c) $k = 1{,}778 \cdot 10^6$ N/m

d) $x = 1{,}8\text{ cm}\,e^{-0{,}124\frac{1}{s}t}\left(\cos\left(18{,}22\dfrac{1}{s}t\right) + 0{,}0068\sin\left(18{,}22\dfrac{1}{s}t\right)\right)$

5.6 a) $\omega_0 = \dfrac{r_i\,h}{r_i - r}\sqrt{\dfrac{2\,E\,b\,h}{(r_i - r)\,\rho\,\pi(r_a^2 - r_i^2)\,b_R\,(r_a^2 + r_i^2)}}$

b) $\Lambda = 1/20 \ln 3 = 0{,}055$

5.7 a) $\omega_{0y} = \sqrt{k_{yers}/m}, \quad k_{yers} = \dfrac{2\,k_R\;k_W}{k_W + k_R\,(l_R/l_W)^2}$

b1) $\omega_{0D} = \sqrt{k_{Ders}/J_A}, \quad k_{Ders} = 2(k_W\;l_W^2 + k_R\;l_R^2)$

$$J_A = 2\left(\frac{1}{3}m_1\;l_R^2 + \frac{1}{2}m_2\;l_2^2 + \frac{1}{3}m_{Feder}\;l_W^2 + m_{Rad}\;l_R^2\right)$$

b2) $\omega_{dD} = \sqrt{\omega_{oD}^2 - \delta_D^2}$ mit $\delta_D = (d_W\;l_W^2 + d_R\;l_R^2)/J_A$

Bei blockierten Rädern vergrößert sich die Drehmasse.

$J_{Abl} = J_A + 2\;J_{ERad}$

5.8 a) $\omega_{0y} = \sqrt{k_{ges}/m}, \quad k_{ges} = E_{Seil}\;A\,k_D/(E_{Seil}\;A\,r^2 + k_D\;l)$

$y = \upsilon_0/\omega_{0y}\sin\omega_{0y}\,t\,, \quad \upsilon_0 \leqq g/\omega_{0y}$

b) $\omega_{dy} = \sqrt{\omega_{0y}^2 - (d/(2\,m))^2}, \quad y = \upsilon_0/\omega_{dy}\;e^{-\delta t}\sin\omega_{dy}\,t$

υ_0 darf größer werden.

5.9 a) $\omega_{0y} = d^2/(8\,l_m)\sqrt{3\,E\,\pi/(m\,(l+l_m))} = 363{,}2\;1/\mathrm{s}$

b) $\Lambda = 0{,}0277$: $\delta = 1{,}60\;1/\mathrm{s}$, $\omega_{dy} = 363{,}2\;1/\mathrm{s}$,

$$k_{yers} = 1/\left(\frac{1}{k_A}\left(\frac{l_m}{l}\right)^2 + \frac{1}{k_B}\left(\frac{l_m + l}{l}\right)^2 + \frac{64\,l_m^2\,(l + l_m)}{3\,E\,\pi\,d^4}\right)$$

$\omega_{0y} = \sqrt{k_{yers}/m}$

6.1 a) $\omega_{0y} = 21{,}95\;1/\mathrm{s}$, b) $\omega_{0y} = 27{,}05\;1/\mathrm{s}$, F_v ist ohne Einfluss auf die Frequenz, wenn sie so groß ist, dass alle Federn stets „im Eingriff“ sind.

c) $\hat{y} = -\,0{,}00773$ m, $k_v\,|\,\hat{y}\,| = 1159{,}5\;\mathrm{N} < F_v$, Vorspannkraft reicht aus.

6.2 a) $\omega_0^{(1)} = 81{,}0\;1/\mathrm{s}$,

b) $\omega_0^{(2)} = \sqrt{2}\;\omega_0^{(1)} = 114{,}6\;1/\mathrm{s}$

c) $\omega_d = 108{,}3\;1/\mathrm{s}$,

d) $\hat{\varphi} = -\,0{,}1037$ rad, $F_{max} = 59{,}7$ N, Vorspannkraft reicht aus.

6.3 a) $k = 16151\;\mathrm{kg/s^2}$, $F_{min} = -\,49{,}58$ N,

b) $J_S = 0{,}761\;\mathrm{kgm^2}$

6.4 a) $\omega_{0D} = 97{,}6$ 1/s

b) $\hat{\varphi} = -1{,}607$ rad, $\Omega = 100$ 1/s,

$M_{max} = 1{,}025 \cdot 10^5$ Nm, ω_{0D} vermindern durch weichere Lagerung: z. B. d_1 verkleinern, oder l_1, l_2 erhöhen.

6.5 a) $\omega_{0x} = \sqrt{2\,k/m_1}$

b) $\omega_{0x} = \sqrt{2\,k\,/(m_1 + 2(m_{Feder}/3 + J_{S2}\,/\,r^2))}$

c) $\ddot{x} + \dfrac{2\,k}{m} x = \mu\,(m_1 + m_{Feder})\,g\,/\,m$, mit $m = m_1 + \dfrac{2}{3} m_{Feder}$,

$x = \mu\,(m_1 + m_{Feder})\,g/(2\,k)\,(1 - \cos\,\omega_{0x}\,t)$, Sprungantwort,

$\omega^* > \dot{x}_{max}\,/\,r = \mu\,(m_1 + m_{Feder})\,g/(r\sqrt{2\,m\,k})$

6.6 a) $\omega_0 = \sqrt{2\,k_R\ k_W\ l^2\,/((k_R + k_W)(J_S + m\,l_m^2))}$

b) $d_{ges} = \dfrac{0{,}594}{l}\sqrt{2\,k_R\ k_W\,(J_S + m\,l_m^2)\,/(k_r + k_W)}$

c) $\upsilon_{krit} = b\ \omega_0/(2\,\pi)$

6.7 a) $\omega_0 = \sqrt{k\,R^2\,/\left((m_1\,/\,2)\,(r_a^2 + r_i^2) + m_2\left(l^2\,/12 + \left(r_a + \dfrac{l}{2}\right)^2\right)\right)}$,

Beschränkung auf kleine Schwingungen ist nicht notwendig.

b) $\omega_0 = \sqrt{\left(k\,R^2 - \sqrt{3}\,/\,2\,m_2 g\,\left(r_a + \dfrac{l}{2}\right)^2\right)/N}$, N wie bei a)

c) $\hat{\varphi} = (\hat{M}/J_O)\,/(\omega_0^2 - \Omega^2)$.

6.8 a) $f_{0y} = 1{,}82$ Hz b) $\hat{y} = 0{,}0147$ mm

6.9 a) $f_0 = 51{,}1$ Hz b) $\hat{y} = 0{,}207$ cm c) $\omega_d = 315{,}2$ 1/s

6.10 a) $f_0 = 5{,}02$ Hz b) $\hat{F} = 53{,}9$ N, $\hat{y} = -1{,}226$ cm

überkritisch erregt, $a_{max} = \ddot{y}_{max} = |\,\hat{y}\,|\,\Omega^2 = 13{,}76$ m/s^2

7.1 a) $\omega_{0z} = \sqrt{E\,\pi(d_a^2 - d_i^2)/(h m)}$,

$\omega_{0x} = \omega_{0y} = \dfrac{1}{4h}\sqrt{3\,E\,\pi(d_a^4 - d_i^4)/(h m)}$,

$\omega_{0Dz} = \dfrac{1}{4h}\sqrt{3\,E\,\pi(d_a^4 - d_i^4)(l_1^2 + l_2^2)/(h\,J_{Sz})}$,

b) $\delta_x = 1{,}581\,\dfrac{1}{s}$, $d_x = 3{,}162\,m\dfrac{kg}{s}$, $\omega_{dDz} = \sqrt{\omega_{0DZ}^2 - \delta_{Dz}^2}$

mit $\delta_{Dz} = d_x\,(l_1^2 + l_2^2)/(2\,J_{Sz})$

c) $\hat{x} = \dfrac{\Delta m}{m} e\,\Omega^2 / \sqrt{(\omega_{0x}^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\delta_x^2\,\Omega^2}$

$\zeta_x = \arctan\,(2\,\delta_x\,\Omega/(\,\omega_{0x}^2 - \Omega^2\,))$

7.2 a) $J_{AB} = 12{,}96$ kgm^2 b) $k_{Dges} = 0{,}45904 \cdot 10^6$ Nm

c) $\omega_{0D} = 188{,}2\,\dfrac{1}{s}$ d) $\delta = 2{,}076\,\dfrac{1}{s}$ e) $\omega_{dD} = 188{,}19\,\dfrac{1}{s}$

f) Amplitude $\hat{\varphi} = 0{,}1002$ rad, Phasenverschiebg. $\zeta = 84{,}5°$

7.3 a) $\omega_{0z} = \sqrt{(2\,k_1 \sin^2\gamma + k_2)/m}$,

$\omega_{dz} = \sqrt{(2k_1 \sin^2\gamma + k_2)/m - ((2\,d_1 \sin^2\gamma + d_2)/(2\,m))^2}$

b) $\omega_{0Dx} = l \sin\gamma\,\sqrt{2\,k_1/J_{Sx}}$,

$\omega_{dDx} = \sqrt{2\,k_1\,l^2 \sin^2\gamma/J_{Sx} - (d_1\,l^2 \sin^2\gamma/J_{Sx})^2}$

c) $\varphi = \hat{\varphi}\sin(\Omega t - \zeta)$,

$\hat{\varphi} = M_0 / \sqrt{(k_D - J_{Sx}\,\Omega^2)^2 + (2\,d_1\,l^2 \sin^2\gamma)^2\,\Omega^2}$,

$\tan\zeta = 2\,d_1\,l^2 \sin^2\gamma\,\Omega\,/\,(k_D - J_{Sx}\,\Omega^2)$

7.4 a) $\omega_{0y} = 30{,}8\,\dfrac{1}{s}$ b) $\hat{y} = -\,0{,}437$ m;

c) $-\,33\,983\text{ N} \leqq F_u \leqq 32\,413$ N, $m_2 > 3304$ kg

1. Ω vergrößern, 2. k kleiner wählen.

d) $\hat{x} = 0{,}041$ m, $\zeta = 95{,}4°$

7.5 a) $\zeta = 51{,}34°$ b) $\hat{F} = 7{,}68$ N

7.6 a) $k = 19\,341$ kg/s^2 b) $\Lambda = 0{,}04621$, $\delta = 0{,}3851$ 1/s,

$d = 46{,}209$ kg/s, $\hat{x} = 3{,}306$ cm, $\zeta = \pi/2 = 90°$

8.1 $\omega_1 = 6{,}37\ 1/\mathrm{s}$, $\omega_2 = 33{,}31\ 1/\mathrm{s}$

8.2 a) $\omega_1 = 12{,}06\ 1/\mathrm{s}$, $\omega_2 = 15{,}04\ 1/\mathrm{s}$, 1. Eigenvektor:

$$\begin{bmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,\mathrm{cm} \\ -0{,}0152\,\mathrm{rad} \end{bmatrix}, \quad 2.\,\text{Eigenvektor:} \begin{bmatrix} 1\,\mathrm{cm} \\ 0{,}0254\,\mathrm{rad} \end{bmatrix}$$

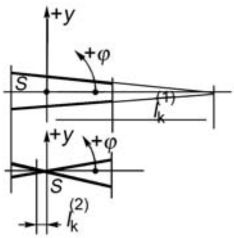


Bild A.4
Eigenschwingungsformen - Lösung zur Aufgabe 8.2

1. Eigenschwingung: Schwingungsknoten liegt um $l_\mathrm{k}^{(1)} = 6{,}58$ m vor S.

2. Eigenschwingung: Schwingungsknoten liegt um $l_\mathrm{k}^{(2)} = 0{,}394$ m hinter S.

b) $k_\mathrm{h} = 8{,}9143 \cdot 10^5$ N/m

c) $\omega_\mathrm{y} = 13{,}09\ 1/\mathrm{s}$, $\omega_\varphi = 15{,}42\ 1/\mathrm{s}$

8.3 a) $\omega_1 = 238\ 1/\mathrm{s}$, $\omega_2 = 493\ 1/\mathrm{s}$ b) $A_2 = 135\ \mathrm{cm}^2$

8.4 a) $\cos\varphi\,\ddot{x} + \left(\mathrm{e} + \dfrac{i^2}{\mathrm{e}}\right)\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} + m_2\,\mathrm{e}\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - m_2\,\mathrm{e}\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + k\,x = 0$$

b) $\ddot{x} + \left(\mathrm{e} + \dfrac{i^2}{\mathrm{e}}\right)\ddot{\varphi} + g\,\varphi = 0$

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} + m_2\,\mathrm{e}\,\ddot{\varphi} + k\,x = 0$$

8.5 a) $2 \times 3 = 6$ Freiheitsgrade b) Hub- und Drehschwingungen der beiden Massen sind entkoppelt. $\omega_{\mathrm{y}1} = \sqrt{2\,k_1/m_1}$,

$$\omega_{\varphi 1} = \sqrt{k_1\,l_1^2/(2\,\mathrm{J}_{\mathrm{S}1})},\ \ \omega_{\mathrm{y}2} = \sqrt{2\,k_2/m_2},\ \ \omega_{\varphi 2} = \sqrt{k_2\,l_2^2/(2\,\mathrm{J}_{\mathrm{S}2})}\,,$$

$$\omega_\mathrm{x}^{(1)} = 0,\ \ \omega_\mathrm{x}^{(2)} = \sqrt{k\,(1/m_1 + 1/m_2)}\ \text{ mit }\ k = E\,A/l$$

c) Nur die Schwingungen in x-Richtung werden beeinflusst.

$$\nu_1^2 = (k_3 + k)/m_1,\ \ \nu_2^2 = k/m_2,$$

die beiden Eigenkreisfrequenzen $\omega_x^{(1)}, \omega_x^{(2)}$ berechnen sich nach (8.6), wobei dort k_2 durch k zu ersetzen ist.

d) Stab BD an einer der Massen in x-Richtung verschieblich lagern.

8.6 a) 3; b) Translationsschwingung in horizontaler und vertikaler Richtung, Drehschwingung um Achse durch S.

c) $\omega_{0\mathrm{x}} = \sqrt{E\,b\,h/(l\,m)}, \quad \omega_{0\mathrm{y}} = \sqrt{(E\,b\,h^3/(2\,l^3) + k)/m}$,

$\omega_{0\varphi} = \sqrt{3\,E\,b\,h^3\,L^2/(2\,l^3\,m\,(L^2 + H^2))}$ d) $\omega_{\mathrm{dx}} = \omega_{0\mathrm{x}}$,

$\omega_{\mathrm{d}\varphi} = \omega_{0\varphi}, \; \omega_{\mathrm{dy}} = \sqrt{\omega_{0\mathrm{y}}^2 - (d/(2\,m))^2}$

8.7 a) 3; b) Translationsschwingung in x-Richtung, y-Richtung, Drehschwingung um S. c) $\omega_{0\mathrm{x}} = \sqrt{2\,k_2/m}$,

$\omega_{0\mathrm{y}} = \sqrt{(k_1 + 2\,F_\mathrm{v}/l_2)/m}, \; \omega_{0\varphi} = \sqrt{6\,F_\mathrm{v}/(l_2\,m)}$ d) $\omega_{\mathrm{dx}} = \omega_{0\mathrm{x}}$,

$\omega_{\mathrm{dy}} = \sqrt{\omega_{0\mathrm{y}}^2 - (d/(2\,m))^2}, \; \omega_{\mathrm{d}\varphi} = \omega_{0\varphi}$

8.8 a) 3; Translationsschwingung in x-Richtung,

$\omega_{0\mathrm{x}} = \sqrt{2\,E\,\mathrm{e}\,h/((l-b)m)}$; Translationsschwingung in y-Richtung,

$\omega_{0\mathrm{y}} = \sqrt{4\,E\,\mathrm{e}\,h^3/((l-b)^3\,m)}$; Drehschwingung um S,

$\omega_{0\varphi} = h/(2\,l_\mathrm{F})\sqrt{2\,E\,\mathrm{e}\,h\,(b/2 + l_\mathrm{F})\,(2 + b/l_\mathrm{F})/\mathrm{J_S}}$

b) $\omega_{\mathrm{dx}} = \sqrt{\omega_{0\mathrm{x}}^2 - (d/m\cos^2\beta)^2}, \; \omega_{\mathrm{dy}} = \sqrt{\omega_{0\mathrm{y}}^2 - (d/m\sin^2\beta)^2}$,

$\omega_{\mathrm{d}\varphi} = \sqrt{\omega_{0\varphi}^2 - (d\,b^2\sin^2\beta/(4\,\mathrm{J_S}))^2}$

c) $y = -\,v_0/\omega_{\mathrm{dy}}\,\mathrm{e}^{-\delta_\mathrm{y}\,t}\sin\omega_{\mathrm{dy}}\,t$

9.1 $$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathrm{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_2 + \dfrac{\mathrm{J}_3}{i^2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{J}_4 \end{bmatrix}; \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{\mathrm{D}12} & -k_{\mathrm{D}12} & 0 \\ -k_{\mathrm{D}12} & k_{\mathrm{D}12} + \dfrac{1}{i^2}k_{\mathrm{D}34} & -\dfrac{k_{\mathrm{D}34}}{i} \\ 0 & -\dfrac{k_{\mathrm{D}34}}{i} & k_{\mathrm{D}34} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{\mathrm{D1}} + d_{\mathrm{D12}} & -d_{\mathrm{D12}} & 0 \\ -d_{\mathrm{D12}} & d_{\mathrm{D12}} + d_{D2} + \dfrac{1}{i^2}(d_{\mathrm{D34}} + d_{\mathrm{D3}}) & -\dfrac{d_{\mathrm{D34}}}{i} \\ 0 & -\dfrac{d_{\mathrm{D34}}}{i} & d_{\mathrm{D34}} + d_{\mathrm{D4}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

9.2 $$\ddot{x}_1 + \frac{d_1 + d_{15}}{m_1}\dot{x}_1 - \frac{d_{15}}{m_1}\dot{x}_5 + \frac{k_1 + k_{12} + k_{15}}{m_1}x_1 - \frac{k_{12}}{m_1}x_2 - \frac{k_{15}}{m_1}x_5 = \frac{k_1}{m_1}x_{\mathrm{u}} + \frac{d_1}{m_1}\dot{x}_{\mathrm{u}},$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{d_{23}}{m_2}\dot{x}_2 - \frac{d_{23}}{m_2}\dot{x}_3 + \frac{k_{12}}{m_2}x_2 - \frac{k_{12}}{m_2}x_1 = 0,$$

$$\ddot{x}_3 + \frac{d_{23}}{m_3}\dot{x}_3 - \frac{d_{23}}{m_3}\dot{x}_2 + \frac{k_{34}}{m_3}x_3 - \frac{k_{34}}{m_3}x_4 = 0,$$

$$\ddot{x}_4 + \frac{d_{45}}{m_4}\dot{x}_4 - \frac{d_{45}}{m_4}\dot{x}_5 + \frac{k_{34} + k_{45}}{m_4}x_4 - \frac{k_{34}}{m_4}x_3 - \frac{k_{45}}{m_4}x_5 = 0,$$

$$\ddot{x}_5 + \frac{d_{15} + d_{45}}{m_5}\dot{x}_5 - \frac{d_{15}}{m_5}\dot{x}_1 - \frac{d_{45}}{m_5}\dot{x}_4 + \frac{k_{15} + k_{45}}{m_5}x_5 - \frac{k_{15}}{m_5}x_1 - \frac{k_{45}}{m_5}x_4 = 0$$

9.3 a) $k_{\mathrm{y}} = 2{,}5266 \cdot 10^8$ kg/s^2 b) $\omega_1 = 62{,}98$ 1/s,

$\omega_2 = 252{,}39$ 1/s, $\hat{y}_1 = +\,0{,}148$ m, $\hat{y}_2 = -\,0{,}01$ m

c) $k_{\mathrm{z}} = 3158{,}3 \cdot 10^4$ kg/s^2, $\hat{y}_2 = -\,0{,}01$ m

9.4 e) $d_2 = \sqrt[4]{32\, l_2\, \mathrm{J}_2\, \Omega^2/(\pi\, G)}$

9.5 a) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 61{,}8$ 1/s b) $\hat{M} = 2{,}57 \cdot 10^3$ Nm

9.6 a) 2, ja, $\omega_{\mathrm{y}} = 44{,}7$ 1/s, $\omega_{\varphi} = 78{,}8$ 1/s b) $\hat{y} = -\,1{,}51$ cm,

$\hat{\varphi} = 0{,}00024$ rad, $F_{\mathrm{Adyn}} = \pm\,146{,}7$ kN c) $\omega_1 = 38{,}8$ 1/s, $\omega_2 = 74{,}3$ 1/s

9.7 a) $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 2\,\mathrm{e}\sqrt{k\,(1/\mathrm{J}_1 + 1/\mathrm{J}_2)}$; b) $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$

$\psi = \hat{M}_1/(J_1(\omega_2^2 - \Omega^2))\sin\Omega\, t + C_1\cos\omega_2\, t + C_2\sin\omega_2\, t$

c) $\omega_d = \sqrt{\omega_2^2 - \delta^2}$ mit $\delta = 2\, d\, e^2\, (1/J_1 + 1/J_2)$,

$\psi = \hat{\psi} \sin(\Omega\, t - \zeta)$ mit $\hat{\psi} = \hat{M}_1 / J_1 / \sqrt{(\omega_2^2 - \Omega^2) + 4\, \delta^2\, \Omega^2}$

$\zeta = \arctan\left(2\, \delta\Omega / (\omega_2^2 - \Omega^2)\right)$

10.1 $\cos\lambda \cosh\lambda = 1$, $\lambda_1 = 4{,}73$, $\lambda_2 = 7{,}85$, $\lambda_3 = 10{,}996$,
$\omega_i = \lambda_i^2 / l^2 \sqrt{EI/\mu}$

10.2 $\cos\lambda \cosh\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \dfrac{\pi}{2} + 0{,}30431 = 1{,}8751$,

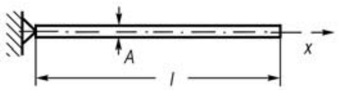
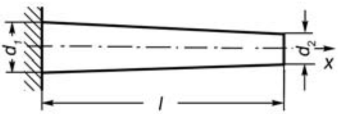
$\lambda_2 = \dfrac{3\,\pi}{2} - 0{,}01830 = 4{,}6941$, $\lambda_3 = \dfrac{5\,\pi}{2} + 0{,}00078 = 7{,}8548$,

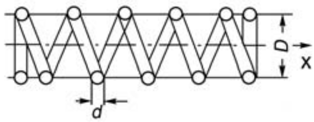
$\lambda_n \approx (2\,n - 1)\dfrac{\pi}{2}$

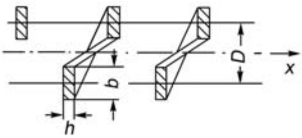
10.3 $\cos\lambda \cosh\lambda = 1$,
$\lambda_1 = \dfrac{3\,\pi}{2} + 0{,}01765 = 4{,}73004$, $\lambda_2 = \dfrac{5\,\pi}{2} - 0{,}00078 = 7{,}85320$,
$\lambda_3 = \dfrac{7\,\pi}{2} + 0{,}00003 = 10{,}99561$, … , $\lambda_n \approx (2\,n + 1)\dfrac{\pi}{2}$,
$\omega_1 = 434$ 1/s, $\omega_2 = 1196$ 1/s

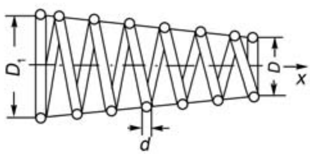
10.4 a) $w(0, t) = w(l, t) = 0$, $w'(0, t) = 0$, $w''(l, t) = 0$
b) $\tan\lambda = \tanh\lambda$ c) $\lambda_1 = 3{,}9266$ d) $\omega_1 = 545$ 1/s

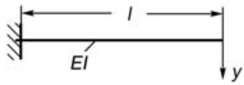
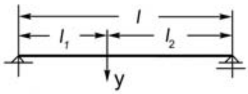
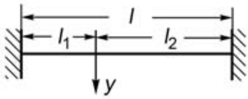
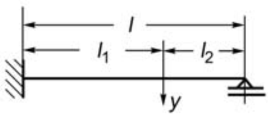
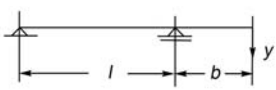
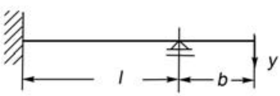
A 3 Federsteifigkeiten

Längsfedern: Stäbe	**Federkonstante**
 A = Querschnittsfläche über Stablänge konstant l = Stablänge E = Elastizitätsmodul	$k_x = \dfrac{E\,A}{l}$
Stäbe mit veränderlicher Querschnittsflache  Querschnittsfläche = Kreisquerschnitt; Durchmesser ändert sich linear über die Stablänge	$k_x = \dfrac{E\,\pi\,d_1\,d_2}{4\,l}$
Querschnittsfläche = Rechteck Höhe h ändert sich linear; Breite b ist konstant über die Stablänge	$k_x = \dfrac{E\,b\,(h_1 - h_2)}{l\,\ln(h_1 / h_2)}$
Stab mit über die Stablänge 1 beliebig veränderlicher Querschnittsfläche $A = A\,(x)$	$k_x = \dfrac{E}{\int_0^l \dfrac{\mathrm{d}x}{A\,(x)}}$

<table>
<tr><th>Längsfedern: Schraubenfedern</th><th>Federkonstante</th></tr>
<tr><td>Zylindrische Schraubenfeder mit Kreisquerschnitt


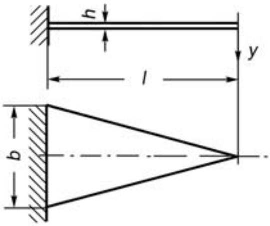
d = Drahtdurchmesser
D = Windungsdurchmesser
i = Anzahl der federnden Windungen
G = Gleitmodul</td><td>$$k_x = \frac{G\,d^4}{8\,i\,D^3}$$</td></tr>
<tr><td>Zylindrische Schraubenfeder mit Rechteckquerschnitt


$\psi = \psi(h/b)$
<table><tr><td>h/b</td><td>0,5</td><td>1,0</td><td>1,5</td><td>2,0</td><td>3,0</td></tr><tr><td>$\psi \approx$</td><td>6,5</td><td>5,5</td><td>6,0</td><td>7,0</td><td>9,2</td></tr></table></td><td>$$k_x = \frac{G\,b^2\,h^2}{\psi\,i\,D^3}$$</td></tr>
<tr><td>Kegelstumpffeder mit Kreisquerschnitt

</td><td>$$k_x \approx \frac{G\,d^4}{2\,(D_1 + D_2)(D_1^2 + D_2^2)\,i}$$</td></tr>
</table>

Biegefedern: Balken mit über die Stablänge konstanter Biegesteifigkeit *EI*	**Federkonstante**
Einseitig eingespannter Balken  I = axiales Flächenmoment zweiter Ordnung der Querschnittsflache	$k_y = \frac{3\,E\,I}{l^3}$
Beidseitig frei aufliegender Balken 	$k_y = \frac{3\,E\,I\,l}{l_1^2\,l_2^2}$
Beidseitig eingespannter Balken 	$k_y = \frac{3\,E\,I\,l^3}{l_1^3\,l_2^3}$
Balken mit Einspannung und frei drehbarem Lager 	$k_y = \frac{4\,E\,I\,l^2}{l_1^3\,l_2^2\left(1+\frac{l_2}{3\,l}\right)}$
Balken mit starrer und vertikal verschieblicher Einspannung 	$k_y = \frac{12\,E\,I}{l^3}$
Statisch bestimmt gelagerter Balken mit Kragarm 	$k_y = \frac{3\,E\,I}{b^2\,(l+\,b)}$
Statisch unbestimmt gelagerter Balken mit Kragarm 	$k_y = \frac{12\,E\,I}{b^2\,(4b+3l)}$

<table>
<tr><th>Biegefedern: Balken mit veränderlicher Biegesteifigkeit EI</th><th>Federkonstante</th></tr>
<tr><td>

Dreieckfeder

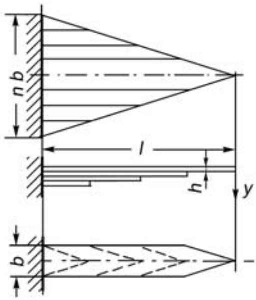


</td><td>

$$k_y = \frac{E\,h^3\,b}{6l^3}$$

</td></tr>
<tr><td>

Geschichtete Dreieckfeder



$n =$ Anzahl der Blätter

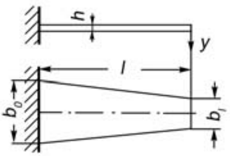
$b =$ Breite der Blätter

</td><td>

$$k_y = \frac{E\,h^3\,n\,b}{6l^3}$$

</td></tr>
<tr><td>

Trapezfeder



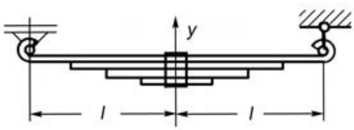
$$\psi = \frac{3}{2 + \dfrac{b_1}{b_0}}$$

</td><td>

$$k_y = \frac{E\,b_0\,h^3}{4\,\psi\,l^3}$$

</td></tr>
<tr><td>

Geschichtete Blattfeder

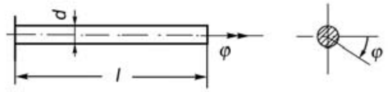
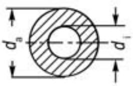
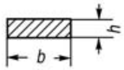


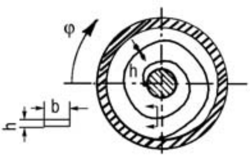
$n =$ Anzahl der Blätter
$n' =$ Anzahl der bis zum Federende reichenden Blätter

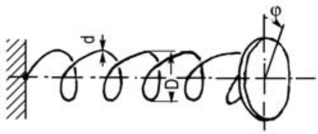
</td><td>

$$k_y = \frac{\left(2 + \dfrac{n'}{n}\right) E\,n\,b\,h^3}{6l^3}$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Drehfedern</th><th>Federkonstante</th></tr>
<tr><td>Drehstab mit Kreisquerschnitt

</td><td>$k_D = \dfrac{G\,\pi\,d^4}{32\,l}$</td></tr>
<tr><td>Drehstab mit Kreisringquerschnitt

</td><td>$k_D = \dfrac{G\,\pi\,(d_a^4 - d_i^4)}{32\,l}$</td></tr>
<tr><td>Drehstab mit Rechteckquerschnitt


Achtung: $h < b$
$\psi = \dfrac{1}{3}\left(1 - 0{,}63\dfrac{h}{b} + 0{,}052\left(\dfrac{h}{b}\right)^5\right)$</td><td>$k_D = \psi\dfrac{G\,b\,h^3}{l}$</td></tr>
<tr><td>Spiralfeder mit Rechteckquerschnitt


$l =$ Gesamtlänge der Feder</td><td>$k_D = \dfrac{E\,b\,h^3}{12\,l}$</td></tr>
<tr><td>Zylindrische Schraubenfeder mit Kreisquerschnitt


d = Drahtdurchmesser
D = Windungsdurchmesser
i = Windungszahl</td><td>$k_D = \dfrac{E\,d^4}{64\,i\,D}$</td></tr>
</table>

A 4 Näherungsweise Berücksichtigung der Federmasse bei Biegefedern

Einseitig eingespannte Welle mit Einzelmasse am Wellenende

Die Wellenmasse m_{Welle} sei über die Wellenlänge gleichmäßig verteilt. Dann gilt für die Massenbelegung $\mu = m_{\text{Welle}}/l$. Die Biegesteifigkeit EI sei konstant.

Die Masse m führt harmonische Schwingungen

$$y_{\text{m}} = \hat{y}_{\text{m}} \sin \omega t$$

aus. Die Schwinggeschwindigkeit von m beträgt

$$\dot{y}_{\text{m}} = \hat{y}_{\text{m}} \, \omega \cos \omega t.$$

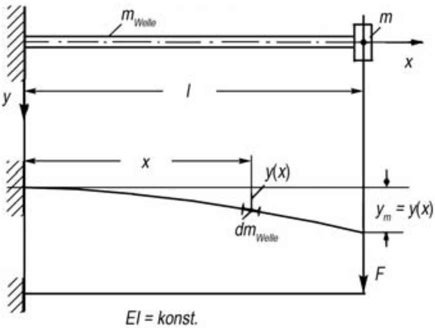


Bild A.5
Einseitig eingespannte Welle mit Einzelmasse

Wenn in der Welle keine Kontinuumsschwingungen auftreten, so gilt für die Bewegung des Masseteilchens $\mathrm{d}m_{\text{Welle}}$ an der Stelle x

$$y\,(x) = \hat{y} \sin \omega t\,, \qquad \dot{y}\,(x) = \hat{y}\, A\, \omega \cos \omega t\,.$$

Dabei verhalten sich die Amplituden so wie die entsprechenden Auslenkungen:

$$\frac{\hat{y}}{\hat{y}_{\text{m}}} = \frac{y\,(x)}{y_{\text{m}}} = \frac{\dot{y}\,(x)}{\dot{y}_{\text{m}}}\,.$$

Für die Biegelinie der Welle mit Einzellast am Wellenende gilt

$$y = \frac{F}{E\,I}\frac{x^2}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right), \quad y_{\text{m}} = y(l) = \frac{F\,l^3}{3\,E\,I}.$$

Die Geschwindigkeit des Wellenelements ist

$$\dot{y}\,(x) = \dot{y}_{\text{m}} \frac{y\,(x)}{y_{\text{m}}} = \dot{y}_{\text{m}} \frac{3}{2}\frac{x^2}{l^2}\left(1 - \frac{x}{3\,l}\right).$$

Für seine kinetische Energie ergibt sich

$$\mathrm{d}E_\text{kin Welle} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m_\text{Welle}\;\dot{y}(x)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m_\text{Welle}\;\dot{y}_\mathrm{m}^2\,\frac{9}{4}\frac{x^4}{l^4}\left(1-\frac{2}{3}\frac{x}{l}+\frac{x^2}{9\,l^2}\right).$$

Die gesamte in der Welle enthaltene kinetische Energie erhält man durch Integration über die Wellenlänge:

$$E_\text{kin Welle} = \int\limits_0^l \frac{9}{8}\,\dot{y}_\mathrm{m}\left(\frac{x^4}{l^4}-\frac{2}{3}\frac{x^5}{l^5}+\frac{x^6}{9\,l^6}\right)\mu\,\mathrm{d}x\,.$$

Dabei wird $\mathrm{d}m_\text{Welle} = \mu\;\mathrm{d}x$ gesetzt. Die Auswertung des Integrals liefert

$$E_\text{kin Welle} = \frac{1}{2}\frac{33}{140}\,m_\text{Welle}\,\dot{y}_\mathrm{m}^2\,.$$

Aus der Gesamtenergie für das System

$$E_\text{ges} = \frac{1}{2}c_\mathrm{y}\,y_\mathrm{m}^2+\frac{1}{2}m\,\dot{y}_\mathrm{m}^2+\frac{1}{2}\frac{33}{140}m_\text{Welle}\,\dot{y}_\mathrm{m}^2$$

$$= \frac{1}{2}c_\mathrm{y}\,y_\mathrm{m}^2+\frac{1}{2}\left(m+\frac{33}{140}m_\text{Welle}\right)\dot{y}_\mathrm{m}^2$$

im Vergleich zu der Gesamtenergie eines Feder-Masse-Systems

$$E_\text{ges} = \frac{1}{2}c_\mathrm{y}\,y_\mathrm{m}^2+\frac{1}{2}m\,\dot{y}_\mathrm{m}^2$$

kann die Ersatzmasse

$$m_\text{ers} = m+\frac{33}{140}m_\text{Welle}$$

ermittelt werden.

Beidseitig frei aufliegende Welle mit Einzelmasse in Wellenmitte

Es sind die gleichen Überlegungen wie oben beim einseitig eingespannten Träger anzustellen. Für die linke Wellenhälfte, Bereich $0 \leqq x = \frac{1}{2}$, lautet die Gleichung der Biegelinie

$$y = \frac{F\,l^3}{16\,E\,I}\left(\frac{x}{l}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{l}\right).$$

Die Durchbiegung in Wellenmitte ist

$$y_\mathrm{m} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F\,l^3}{48\,E\,I}\,.$$

Für die Geschwindigkeit des Wellenelements $\mathrm{d}m_\mathrm{Welle} = \mu\ \mathrm{d}x$ gilt

$$\dot{y}(x) = \dot{y}_\mathrm{m}\frac{y(x)}{y_\mathrm{m}} = \dot{y}_\mathrm{m}\,3\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right).$$

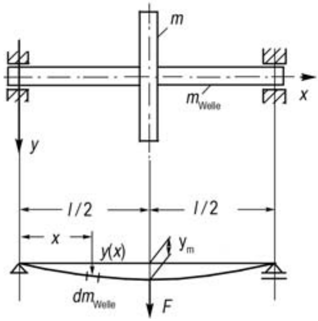


Bild A.6 Zweifach gelagerte Welle mit Einzelmasse in Wellenmitte

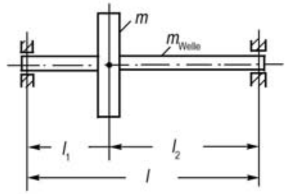


Bild A.7 Zweifach gelagerte Welle, Einzelmasse ausmittig

Die kinetische Energie des Wellenelements berechnet sich zu

$$\mathrm{d}\,E_\text{kin Welle} = \frac{1}{2}\mathrm{d}m_\mathrm{Welle}\ \dot{y}(x)^2 = \frac{1}{2}\mu\ \mathrm{d}x\ \dot{y}_\mathrm{m}^2\ 9\left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right)^2.$$

Für die Berechnung der gesamten kinetischen Energie der Welle braucht aus Symmetriegründen nur über die halbe Wellenlänge integriert zu werden

$$E_\text{kin Welle} = 2\int_0^{l/2}\frac{1}{2}\mu\ \dot{y}_\mathrm{m}^2\ 9\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{16}{9}\left(\frac{x}{l}\right)^6\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{17}{35}m_\mathrm{Welle}\ \dot{y}_\mathrm{m}^2\,.$$

Damit ist in diesem Fall die in der Schwingungsberechnung zu berücksichtigende Masse

$$m_\mathrm{ges} = m + \frac{17}{35}\,m_\mathrm{Welle}\,.$$

Für den allgemeinen Fall (siehe Bild A.5) gilt

$$m_\mathrm{ges} = m + \psi\,m_\mathrm{Welle}$$

mit

$$\psi = \frac{l^3}{4\,l_1\,l_2}\left[\frac{1}{l_2}\left(\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{l_2}{l}\right)^2\right)^2 - \frac{2}{5}\left(1-\left(\frac{l_2}{l}\right)^2\right)\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{l_1}{l}\right)^4\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{l_1}\left(\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{l_1}{l}\right)^2\right)^2 - \frac{2}{5}\left(1-\left(\frac{l_1}{l}\right)^2\right)\left(\frac{l_2}{l}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{l_2}{l}\right)^4\right)\right].$$

Anmerkung: Für $l_1 \to 0$ geht $\psi \to \infty$. Vernünftige Resultate liefert die Beziehung etwa im Bereich

$$\frac{l}{3} \leqq l_1 \leqq \frac{2}{3} l\,.$$

A 5 Formelzeichen

Matrizen und Vektoren (hier einspaltige Matrizen) werden fett dargestellt

A	Fläche
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{adj}}$	zu $\boldsymbol{A}$ adjungierte Matrix
a_{C}	Coriolisbeschleunigung
a_{n}	Normal- oder Zentripetalbeschleunigung
a_{S}	Schwerpunktbeschleunigung
a_{t}	Tangentialbeschleunigung
c	Schallgeschwindigkeit
$\boldsymbol{D}$	Dämpfungsmatrix
d	Dämpfungskonstante
E	Elastizitätsmodul
E	Energie
E_{kin}	Kinetische Energie
E_{pot}	Potentielle Energie
F	Kraft, Erregerkraft
$\boldsymbol{F}$	Kraft-Vektor
F_{C}	Corioliskraft
F_{d}	Dämpferkraft
F_{F}	Fliehkraft, Federkraft
F_{G}	Gewichtskraft
F_{n}	Normalkraft
F_{R}	resultierende Kraft, Reibungskraft
F_{S}	Seilkraft
F_{t}	Tangentialkraft
f	Frequenz
n	Nachgiebigkeit
G	Gleitmodul
g	Fallbeschleunigung
$\underline{H}$	komplexer Frequenzgang
h	Höhe
I	axiales Flächenmoment 2. Ordnung
I_{p}	polares Flächenmoment 2. Ordnung
i	Trägheitsradius
J	Massenträgheitsmoment, Drehmasse
$\mathbf{J}$	Drehmassenmatrix
J_{S}	Drehmasse bezogen auf die (feste) Achse durch S
j	imaginäre Einheit
$\boldsymbol{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}$	Drehsteifigkeitsmatrix
k	Federkonstante
k_{D}	Drehfederkonstante
l	Länge
l_{red}	reduzierte Pendellänge
M	Moment, Erregermoment
$\boldsymbol{M}$	Massenmatrix
m	Masse
m_{F}	Federmasse
$\boldsymbol{N}$	Nachgiebigkeitsmatrix
n	Drehzahl
n_{ik}	Nachgiebigkeiten, Einflusszahlen
p	Impuls
S	Schwerpunkt, Massenmittelpunkt
T	Schwingungsdauer
t	Zeit
V_1	Vergrößerungsfunktion
v	Geschwindigkeit
W	Arbeit
x, y, z	Auslenkung (Federweg) in x-, y-, z-Richtung
$\boldsymbol{x}$	Vektor der Freiheitsgrade des mechanischen Systems
$\hat{x}$	Amplitude (der Auslenkung in x-Richtung)
$\hat{\boldsymbol{x}}$	Amplitudenvektor
$\underline{x}$	Komplexe Größe (der Auslenkung)
$\tilde{x}$	Effektivwert
$x\,(t)$	Zeitverlauf des Schwingweges

$\dot{x}$	Geschwindigkeit (1. Zeitableitung)
$\ddot{x}$	Beschleunigung (2. Zeitableitung)
$\overline{x}$	Mittelwert
x_p	Erzwungene Schwingung (partikuläre Lösung)
x_s, x_c	Sinusschwingung, Kosinusschwingung
x_d	gedämpfte (Eigen-) Schwingung
$\hat{\boldsymbol{x}}_\mathrm{k}$	*k*-ter Eigenvektor
x_0	Anfangsauslenkung in *x*-Richtung
β	Winkel
γ	Winkel
Δ	Differenz, Koeffizientendeterminante
δ	Abklingkonstante
θ	Dämpfungswinkel
ϑ	Dämpfungsgrad
Λ	logarithmisches Dekrement
λ	Wurzel der charakteristischen Gleichung, Eigenwert
μ	Gleitreibungszahl, Massenbelegung
π	= 3,14159 ...
ρ	Dichte
τ	Zeit (dimensionslose)
$\varphi(t)$	Drehwinkel-Zeitfunktion
$\dot{\varphi}$	Winkelgeschwindigkeit
$\ddot{\varphi}$	Winkelbeschleunigung
ψ	Drehwinkel
φ_os	Nullphasenwinkel, Sinusschwingung
ζ	Phasenverschiebung
ω	Kreisfrequenz
ω_d	Kreisfrequenz der gedämpften Eigenschwingung
ω_i	*i*-te Eigenkreisfrequenz
Ω	Erregerkreisfrequenz

A 6 Sachverzeichnis