Lösungen

Kapitel 1

Aufgabe 1.1:

	A	B	C	D	F
Ordnung	(3×2)	(2×2)	(2×3)	(3×3)	(3×3)
quadratische Matrix		x		x	x
Nullmatrix	x				
Einheitsmatrix		x			
Diagonalmatrix		x			
Treppenmatrix	x	x	x		
obere Dreiecksmatrix	(x)	x	(x)		
untere Dreiecksmatrix	(x)	x			x

Aufgabe 1.2:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

B und d können nicht berechnet werden.

Aufgabe 1.3:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 10 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 20 & 16 & 17 \\ 0 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -16 & 8 & 12 \\ -8 & 4 & 6 \end{pmatrix},\quad F=14$$

B kann nicht berechnet werden.

C. Mayer, *Lineare Algebra für Wirtschaftswissenschaftler*,
DOI 10.1007/978-3-8349-6727-5, © Gabler Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Aufgabe 1.4:

$$B\cdot D=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 28 & 0\end{pmatrix},\ D\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 12\\ 7 & 0\end{pmatrix},\ A\cdot C^T=\begin{pmatrix}5 & 7 & 4\\ 7 & 5 & 4\end{pmatrix},\ B^T\cdot A\cdot C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 16 & 40 & 12\end{pmatrix},$$

$$D^2=D\cdot D=\begin{pmatrix}25 & -6\\ -14 & 21\end{pmatrix},\quad c\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\ 15 & 10 & 5\end{pmatrix},\ a\cdot b=0,\ b\cdot a=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$D-B=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 7 & -4\end{pmatrix},\ a+b^T=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Alle anderen Ausdrücke können nicht berechnet werden. Die Ergebnisse von $B\cdot D$ und $D\cdot B$ unterscheiden sich, da bei der Matrixmultiplikation das Kommutativgesetz keine Gültigkeit besitzt.

Aufgabe 1.5:

$$B\cdot B^T=3,\ B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 10\end{pmatrix},\ B\cdot A\cdot C=\begin{pmatrix}16 & 52 & 68\end{pmatrix},\ A^T\cdot C^T=\begin{pmatrix}15 & 25\\ 23 & 39\end{pmatrix}$$

Alle anderen Multiplikationen sind nicht definiert.

Aufgabe 1.6:

a) X kann nicht berechnet werden.

b) $X=\begin{pmatrix}-5 & 10 & -2\\ 10 & -2 & -8\\ 9 & 2 & -1\end{pmatrix}$

Aufgabe 1.7:

a) Allgemein: $X=A^2+A\cdot B+A\cdot C+B\cdot A+B^2+B\cdot C+C\cdot A+C\cdot B+C^2$

b) $X=4\cdot A^2+2\cdot A\cdot C+2\cdot C\cdot A+C^2=\begin{pmatrix}-2 & 117\\ -26 & 63\end{pmatrix}$

c) $X = {}^{25}\!/_{4} \cdot A^2 = {}^{25}\!/_{4} \cdot \begin{pmatrix} -{}^{7}\!/_{2} & 1 & -4 \\ -{}^{5}\!/_{2} & {}^{7}\!/_{2} & 2 \\ {}^{5}\!/_{2} & 3 & -8 \end{pmatrix}$

d) $(F+G)^2 = (F+G)\cdot(F+G) = F^2 + F\cdot G + G\cdot F + G^2$

Die in der Aufgabenstellung angegebene Gleichung gilt nicht allgemein, da sich die beiden mittleren Terme nur dann zu $2\cdot F\cdot G$ zusammenfassen lassen, falls $F\cdot G = G\cdot F$ gilt.

Aufgabe 1.8:

$$x = 2$$

Aufgabe 1.9:

$$x = -37$$

Aufgabe 1.10:

$$X = \begin{pmatrix} 23 & -22 & -3 & 11 & 26 \\ 2 & -14 & 7 & 16 & 40 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.11:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \quad B\cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ 11 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.12:

$$b = \begin{pmatrix} 10.000 & 100 & 1 \end{pmatrix} \cdot a$$

Aufgabe 1.13:

$$a = x \cdot e^T = 0,\ \ b = x \cdot x^T = 14,\ \ c = x \cdot \left(e^T + x^T\right) = 14,\ \ d = x^T - 3 \cdot y^T = \begin{pmatrix} -16 & 0 & -9 & 4 \end{pmatrix}^T,$$

$$F = y^T \cdot x = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 0 & -10 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 9 & 0 & -6 \\ 2 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.14:

Bei den Umformungen b), c) und g) handelt es sich nicht um EZUs.

Bei e) handelt es sich zwar um eine EZU, diese wurde aber auf die falsche Zeile angewendet.

Aufgabe 1.15:

$$a = -7,\ \ b = 0$$

Aufgabe 1.16:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.17:

$$x = \begin{pmatrix} 20 & 60 & -30 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.18:

$$x = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.19:

$$x = \begin{pmatrix} 8/3 & -5/6 & 10/3 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.20:

$$x = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 11/3 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.21:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.22:

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.23:

$$x = \begin{pmatrix} 17 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.24:

$$x = \begin{pmatrix} -2 & 3/4 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.25:

$$\begin{pmatrix} g_{\text{Karl}} & g_{\text{Heinz}} & g_{\text{Frieder}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 105 & 84 & 100 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 1.26:

a) $m \cdot (M_{2002} + M_{2003}) \cdot (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T = 7.029$

b) Über das LGS $M_{2003}^T \cdot \begin{pmatrix} m_{Müller} \\ m_{Schmidt} \\ m_{Schneider} \\ m_{Schulz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\begin{pmatrix} m_{Müller} \\ m_{Schmidt} \\ m_{Schneider} \\ m_{Schulz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/9 \\ 0 \\ 0 \\ 80/9 \end{pmatrix}$

Kapitel 2

Aufgabe 2.1:

Die Koeffizientenmatrix A hat die Ordnung $(n \times n)$.

Aufgabe 2.2:

$$\begin{array}{rcrcr} 180x_A & - & 90x_B & = & 10.000 \\ -60x_A & + & 130x_B & = & 20.000 \end{array}$$

Aufgabe 2.3:

$$(x_A \quad x_B)^T = (100/3 \quad 100/3)^T$$

Aufgabe 2.4:

$$(x_A \quad x_B)^T = (4 \quad 3)^T$$

Aufgabe 2.5:

$$\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 500 & 200 & 1.000 \end{pmatrix}^T$$

$$SK_A = 16.000,\ SK_B = 50.000,\ SK_C = 28.000,\ SK_X = 51.000,\ SK_Y = 55.000$$

Aufgabe 2.6:

$$\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 12{,}5 \end{pmatrix}^T,\ SK_D = 110,\ SK_E = 47{,}5,\ SK_F = 52{,}5$$

Aufgabe 2.7:

a)

an / von	A	B	C	X	Y
A	-	75	80	80	35
B	90	-	40	25	20
C	30	75	-	115	120

b) $\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 30 & 60 & 40 \end{pmatrix}^T$

c) $SK_X = 8.500,\ SK_Y = 7.050$

Aufgabe 2.8:

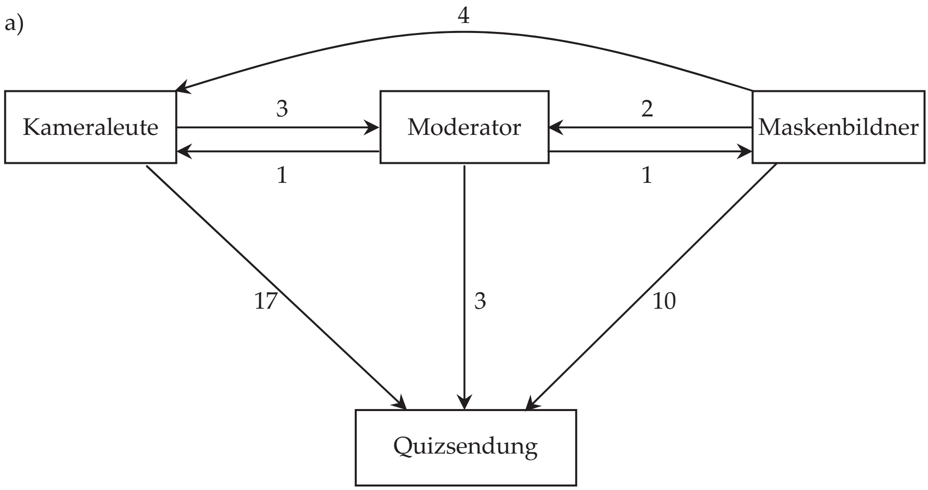
a) $\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T$

b) $SK_D = 40,\ SK_E = 50$

c) $HK_D = 0{,}25$ € pro Stück, $HK_E = 0{,}75$ € pro Stück

Aufgabe 2.9:

a)



b) $\left(x_{\text{Kamera}} \quad x_{\text{Moderator}} \quad x_{\text{Maske}}\right)^T = \left(45 \quad 340 \quad 40\right)^T$

c) $SK_{\text{Quizshow}} = 2.185$

Aufgabe 2.10:

$$\left(x_A \quad x_B \quad x_C\right)^T = \left(24{,}1 \quad 15{,}5 \quad 21{,}5\right)^T$$

$$SK_A = 261{,}5,\ SK_B = 335{,}5,\ SK_C = 337{,}5,\ SK_D = 188{,}5,\ SK_E = 411{,}5$$

Aufgabe 2.11:

a) $\left(x_{\text{Gepäckabfertigung}} \quad x_{\text{Lotsendienst}} \quad x_{\text{Flugzeugmaintenance}}\right)^T = \left(20.000 \quad 35.000 \quad 40.000\right)^T$

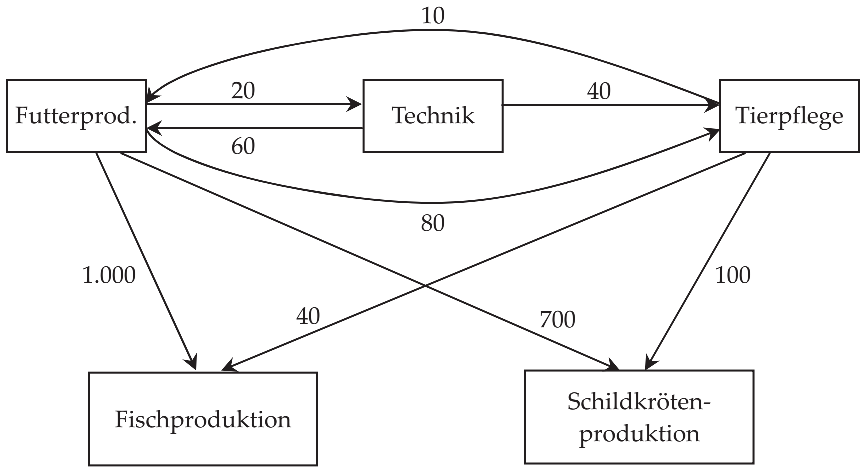
$SK_{\text{BryanAir}} = 325.000,\ SK_{\text{FCBAir}} = 290.000$

b) $SK_{\text{CargoBanana}} = 230.000,\ GK_{\text{CargoBanana}} = 330.000$

$p_{\text{Bananen}} = 1{,}65$ € pro Kiste

Aufgabe 2.12:

a)



b) $\begin{pmatrix} x_{Futterprod.} & x_{Technik} & x_{Tierpflege} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 50 & 60 \end{pmatrix}^T$

c) $SK_{Fischprod.} = 7.400$, $SK_{Schildkrötenprod.} = 9.500$

d) Die internen Verrechnungspreise ändern sich nicht.

Aufgabe 2.13:

a) $\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 20 \end{pmatrix}^T$, $SK_D = 400$, $SK_E = 200$

b) $p_D = 5$ € pro Einheit

Aufgabe 2.14:

a) $\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T$

b) F bezieht nun 3 Einheiten von A, keine Einheit von B und 3 Einheiten von C.

Aufgabe 2.15:

a) $\begin{pmatrix} x_{Trainerstab} & x_{Gaststätte} & x_{Physiotherapeuten} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 \end{pmatrix}^T$

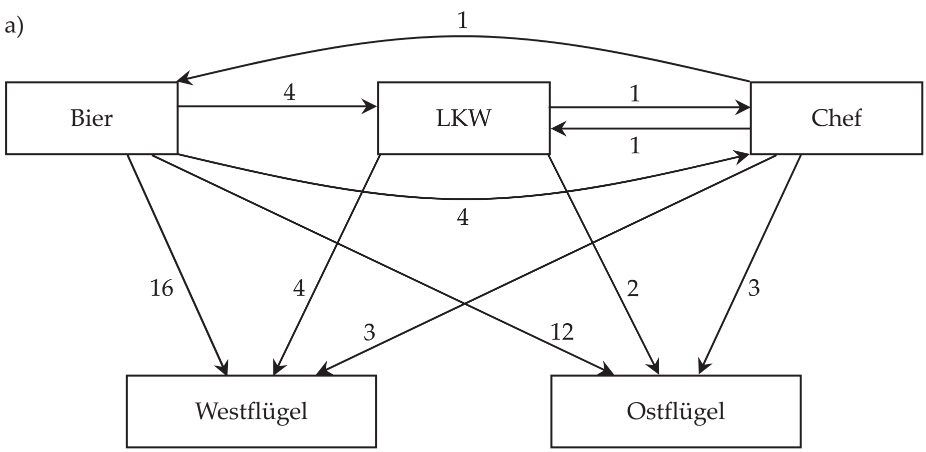
$SK_{Skat} = 150,\ SK_{Tennis} = 560,\ SK_{Kegeln} = 340$

b) Ja, die Sekundärkosten der Skatabteilung ändern sich. Zunächst führen die gestiegenen Primärkosten der Hikos Trainerstab und Physiotherapie zu höheren Verrechnungspreisen dieser Hikos. Da die Gaststätte Leistungen von diesen bezieht, ändert sich auch ihr Verrechnungspreis und somit auch die Sekundärkosten der Skatabteilung. Dies geschieht, obwohl die Skatabteilung direkt keine Leistungen vom Trainerstab und den Physiotherapeuten in Anspruch nimmt.

c) Richtig sind die Aussagen iii), iv) und vii).

Aufgabe 2.16:

a)



b) $\begin{pmatrix} x_{Bier} & x_{LKW} & x_{Chef} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3{,}23 & 18{,}48 & 16{,}43 \end{pmatrix}^T$

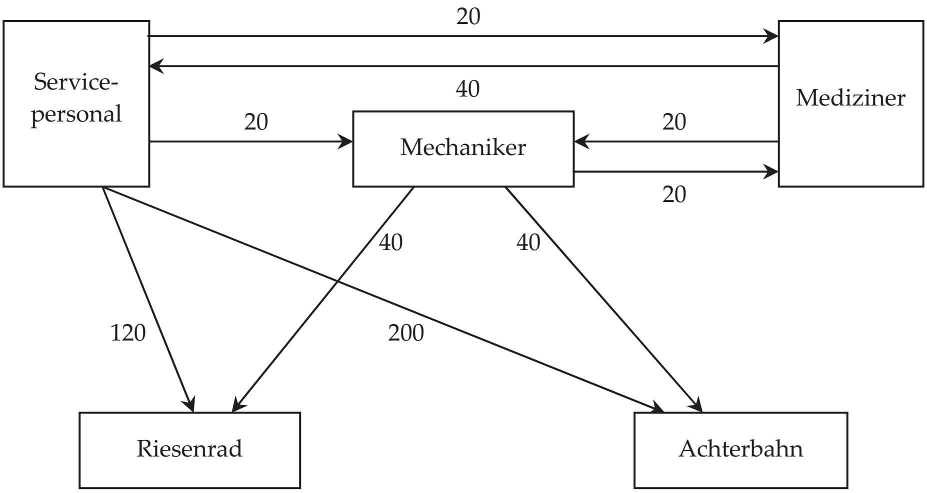
c) $\begin{pmatrix} x_{LKW} & x_{Chef} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 50/3 & 50/3 \end{pmatrix}^T$

$GK_{Ostflügel\_vorher} = 425{,}05,\ GK_{Ostflügel\_nachher} = 383{,}33$

Prozentuale Verbesserung: 9,81%

Aufgabe 2.17:

a)



b) $\begin{pmatrix} x_{Servicepersonal} & x_{Mechaniker} & x_{Mediziner} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 15 & 30 & 60 \end{pmatrix}^T$

c) $SK_{Achterbahn} = 4.200, \ SK_{Riesenrad} = 3.000$

d) $p_{Achterbahn} = 3$ € pro Fahrt

e) Die internen Verrechnungspreise verändern sich nicht.

Kapitel 3

Aufgabe 3.1:

$$\det(A) = -1.040$$

Aufgabe 3.2:

$$\det(A) = 2,\ \det(B) = 2$$

Aufgabe 3.3:

$$\det(A) = -3,\ \det(B) = -16$$

Aufgabe 3.4:

$$\det(A) = 6b + 3\text{, A ist somit singulär für } b = -0{,}5$$

Aufgabe 3.5:

$$a = 9/2$$

Aufgabe 3.6:

Bei a), c), d) und f) ist die dritte Spalte ein Vielfaches der ersten Spalte und somit $\det(A) = 0$.

Aufgabe 3.7:

$$\det(A) = (a+3)\cdot(1-a)\cdot(a+2)$$

Aufgabe 3.8:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 9 \\ -16 & -4 & 0 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.9:

$$a = 8,\ \ b = 6,\ \ c = 3,\ \ d = 2,\ \ \det(A) = 8$$

Aufgabe 3.10:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)} \xrightarrow{\cdot\det(A)} \det\left(A^{-1}\right)\cdot\det(A) = \frac{\det(A)}{\det(A)} \xleftrightarrow{\text{laut 1.)}} \det\left(A^{-1}\cdot A\right) = 1$$

$$\longrightarrow \det(E) = 1 \xleftrightarrow{\text{laut 2.)}} 1 = 1 \text{ q. e. d.}$$

Aufgabe 3.11:

$$x = -135$$

Aufgabe 3.12:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ -5{,}5 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.13:

$$C = \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Für $a<3$ ist $C>A$, für $a=3$ ist $C\geq A$, für $a>3$ lässt sich keine Relation aufstellen.

Aufgabe 3.14:

a) $\det(A) = 5$

b) A lässt sich durch die EZUs $III + I$, $(-2)\cdot I$ und $3\cdot II$ in B umwandeln, folglich ist $\det(B) = (-2)\cdot 3\cdot\det(A) = -30$.

A lässt sich durch die EZUs $(-1)\cdot \mathrm{I}$, $(-1)\cdot \mathrm{II}$, $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{III}$, $\mathrm{II}_n \leftrightarrow \mathrm{III}_n$ und $(-1)\cdot \mathrm{IV}$ sowie anschließende Transposition in C umwandeln, folglich ist $\det(C) = \det\left(C^T\right) = (-1)\cdot(-1)\cdot \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot \det(A) = \frac{5}{2}$.

c) $x = 10$

Aufgabe 3.15:

$$x = 6$$

Aufgabe 3.16:

$$x = 1$$

Aufgabe 3.17:

$$x = 40$$

Aufgabe 3.18:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.19:

$$x = 2$$

Aufgabe 3.20:

$$x = -12$$

Aufgabe 3.21:

Für $k \in \{-1;0\}$ existiert keine Inverse von A.

Aufgabe 3.22:

Die Kofaktormatrix ist singulär, wenn die zugehörige Matrix A singulär ist, und umgekehrt. Dies tritt ein, falls $a = \frac{7}{11}$.

Aufgabe 3.23:

B ist nicht die Inverse von A. A ist nicht quadratisch und besitzt somit keine Inverse.

Aufgabe 3.24:

$$A^{-1} = (-42),\quad B^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.25:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

B besitzt keine Inverse, da hier Zeilen Vielfache voneinander sind.

Aufgabe 3.26:

a) $m = n$

b) $n = k = p$

c) $n = p$ und $m = k$

d) $m = p$ und $n = k$

e) $m = n$

Aufgabe 3.27:

$$A^{-1} \text{ existiert nicht, } A^2 = A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ (A ist idempotent),}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{132} \cdot \begin{pmatrix} -44 & 24 & 20 \\ 22 & 12 & -1 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 30 \\ 12 & 36 & -16 \\ -10 & -8 & 72 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.28:

$$a = -3/4, \quad b = 1/4, \quad c = 3/4$$

Aufgabe 3.29:

Aus $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T$ lässt sich $\det(C) = \det(A)^{n-1}$ herleiten, wobei hier $n = 4$ gilt.

$\det(A) < -1 \;\Rightarrow\; \det(C) < \det(A)$

$\det(A) = -1 \;\Rightarrow\; \det(C) = \det(A)$

$-1 < \det(A) < 0 \;\Rightarrow\; \det(C) > \det(A)$

$0 < \det(A) < 1 \;\Rightarrow\; \det(C) < \det(A)$

$\det(A) = 1 \;\Rightarrow\; \det(C) = \det(A)$

$\det(A) > 1 \;\Rightarrow\; \det(C) > \det(A)$

Aufgabe 3.30:

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} \xrightarrow{\cdot A^T} \left(A^{-1}\right)^T \cdot A^T = \left(A^T\right)^{-1} \cdot A^T \xleftrightarrow{\text{laut 1.)}}$$

$$\left(A \cdot A^{-1}\right)^T = E \longleftrightarrow E^T = E \xleftrightarrow{\text{laut 2.)}} E = E \quad \text{q. e. d.}$$

Aufgabe 3.31:

a) Wenn $A^2 = A$ gilt, muss auch $A^n = A$ gelten. Da jeder Matrix eindeutig eine Determinante zugeordnet ist, folgt aus $A^2 = A$, dass $\det\left(A^2\right) = \det(A)$ für alle $\det(A) \in \mathbb{R}$ gilt.

$$\det\left(A^2\right) = \det(A) \xleftrightarrow{\text{laut Multiplikationssatz}} \det(A)^2 = \det(A) \xrightarrow{-\det(A)}$$
$$\det(A)\cdot\left(\det(A)-1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \det(A) = 0 \vee \det(A) = 1 \text{ q. e. d.}$$

b) Es existieren $2^3 = 8$ Diagonalmatrizen. Diese sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.32:

$B^2 = B \xrightarrow{\cdot B^{-1}}$ (nur und immer möglich, falls $\det(B) \neq 0$) $B = E$

Falls $\det(B) \neq 0$ (im Fall idempotenter Matrizen ist dann zwingend $\det(B) = 1$), gilt somit $B = E$. Ist $B \neq E$, muss gelten $\det(B) = 0$.

Aufgabe 3.33:

$$X = 42^7 \cdot E$$

Aufgabe 3.34:

$$X = \begin{pmatrix} -10 & -11 \\ 7 & 10{,}5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.35:

$$X = A^{-1} \cdot C + E$$

Aufgabe 3.36:

$$X = (C - 2 \cdot D)(3 \cdot A + B)^{-1}$$

Aufgabe 3.37:

$$X^{-1} = A \cdot B = \begin{pmatrix} -79 & 46 \\ -59 & 70 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.38:

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.39:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 & 2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.40:

$$X = 1/2 \cdot E$$

Aufgabe 3.41:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.42:

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.43:

a) $X = \det(A) \cdot (3 \cdot A - 2 \cdot E)^{-1}$

b) Nur falls $\det(3 \cdot A - 2 \cdot E) \neq 0$ ist X bestimmbar. Dies ist bei ii), iii) und iv) erfüllt.

c) i) X kann nicht bestimmt werden.

ii) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $X = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $X = E$

Aufgabe 3.44:

$$X = \begin{pmatrix} -1{,}25 & -4{,}5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.45:

a) $X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$, $X^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$

b) $X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $X^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.46:

$$X = \frac{3}{50} \cdot \begin{pmatrix} 31/3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.47:

$$X = \left(\frac{1}{\det(B)} \cdot E + C + B \right)^{-1} \cdot D$$

Aufgabe 3.48:

$$X = (F + G) \cdot (2 \cdot H + G - E)^{-1}$$

Aufgabe 3.49:

$$X = G$$

Aufgabe 3.50:

a) $x = \pm 1/4$

b) $X = -\frac{7}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5/8 \\ 8/7 & -5/8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.51:

a) Die Gleichung kann nicht nach H aufgelöst werden.

b) $H = 0$

c) $H = \begin{pmatrix} -103 & 48 & -61 \\ 95 & -42 & 57 \\ 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

d) $H = 57 \cdot E$

Aufgabe 3.52:

$$X = \tfrac{1}{2} \cdot E$$

Aufgabe 3.53:

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Aufgabe 3.54:

Die einzige reguläre, idempotente Matrix ist die Einheitsmatrix, es gilt $A = E$.

$$X = \frac{1}{48} \cdot \begin{pmatrix} -31 & 56 & -19 & -8 \\ 1 & -8 & 13 & 8 \\ 11 & 8 & -1 & -8 \\ -24 & 48 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.55:

$$\begin{aligned} \left(M^T\right)^2 &= \left(\left(E - Y \cdot \left(Y^T \cdot Y\right)^{-1} \cdot Y^T\right)^T\right)^2 = M^2 \\ &= \left(E - Y \cdot \left(Y^T \cdot Y\right)^{-1} \cdot Y^T\right) \cdot \left(E - Y \cdot \left(Y^T \cdot Y\right)^{-1} \cdot Y^T\right) = M \end{aligned}$$

Aufgabe 3.56:

$$x = A^{-1} \cdot b = \left(5 \quad -7 \quad -\tfrac{3}{2}\right)^T$$

Aufgabe 3.57:

$$x = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.58:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.59:

$$x = \begin{pmatrix} 7 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.60:

a) $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ -1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3/2 \end{pmatrix}^T$

c) $\det(A_1) = 6,\ \det(A_2) = -6,\ \det(A_3) = -9/2$

Aufgabe 3.61:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.62:

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.63:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.64:

$$x = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.65:

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.66:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.67:

$$x = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2{,}5 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.68:

$$x = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5{,}5 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 3.69:

a) $\det(A) = 6 - a$, falls $a = 6$ ist das LGS somit nicht eindeutig lösbar.

b) $x = \frac{1}{6-a} \cdot \begin{pmatrix} 18 - 3a \\ -12 + 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Sofern $a \neq 6$ ist die Lösung also unabhängig von a.)

Aufgabe 3.70:

a) $c \neq 4d - 21/2$

b) $x = \dfrac{1}{2c - 8d + 21} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4c + 9d - 21 \\ 3c - 5d + 21 \end{pmatrix}$

c) $-7/9 \leq d \leq 0$

d) $x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T$

e) $c = 5$

Aufgabe 3.71:

a) Eine Matrix ist regulär, falls sie invertierbar ist. Sie ist quadratisch und ihre Determinante ist nicht Null.

b) Eine Matrix ist idempotent, falls alle Potenzen dieser Matrix gleich sind. Dies ist für die Matrix A bereits erfüllt, falls gilt $A^2 = A$.

c) Eine, nur die Einheitsmatrix ist regulär und idempotent.

Kapitel 4

Aufgabe 4.1:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 17 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 1.700 & 4.300 & 1.000 \end{pmatrix}^T$

c) $k_E = \begin{pmatrix} 64 & 12 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.2:

a) $q_R = \begin{pmatrix} 65 & 60 & 60 \end{pmatrix}^T$

b) $K = 1.100$

c) $G = 900$

Aufgabe 4.3:

a) $q_R = \begin{pmatrix} 3.600 & 2.600 & 3.300 \end{pmatrix}^T$

b) $k_E = \begin{pmatrix} 135 & 65 \end{pmatrix}$

c) $G = 5.000$

Aufgabe 4.4:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 19 & 16 \\ 10 & 20 \\ 18 & 22 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 9.700 & 8.000 & 10.900 \end{pmatrix}^T$

c) $k_E = \begin{pmatrix} 103 & 112 \end{pmatrix}$

d) $G = 11.500$

Aufgabe 4.5:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 800 & 400 & 200 \end{pmatrix}^T$

c) Es bleiben keine Rohstoffe auf Lager.

d) $\text{Gewinn} = 10.350$

e) $\Delta\text{Gewinn}_{12} = -20\%,\ \Delta\text{Gewinn}_{23} = 20\%,\ \text{Gewinn}_3 < \text{Gewinn}_1$

Aufgabe 4.6:

$$g_E = \begin{pmatrix} 1{,}34 & 0{,}16 & 0{,}41 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.7:

a) $q_R = \begin{pmatrix} 1.400 & 2.200 & 1.400 \end{pmatrix}^T$

b) $\text{Gewinn} = 2.800$

c) $K_Z = 1.250$

d) $p_{E_3} = 120$

Aufgabe 4.8:

a) $M_{VE} = \begin{pmatrix} 60 & 100 \\ 48 & 70 \\ 26 & 50 \\ 50 & 80 \end{pmatrix},\ M_{RE} = \begin{pmatrix} 420 & 700 \\ 580 & 960 \\ 420 & 690 \\ 580 & 960 \\ 490 & 790 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 7.700 & 10.600 & 7.650 & 10.600 & 8.850 \end{pmatrix}^T,\ q_V = \begin{pmatrix} 1.100 & 830 & 510 & 900 \end{pmatrix}^T$

c) $p_{R_3} = 1$ € pro Stück

Aufgabe 4.9:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 36 & 19 \\ 36 & 28 \\ 32 & 21 \\ 28 & 32 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 740 & 920 & 740 & 920 \end{pmatrix}^T$

c) $k_E = \begin{pmatrix} 10 & 7 \end{pmatrix}$

d) Materialkosten $= 1.000$

Aufgabe 4.10:

a) $q_R = \begin{pmatrix} 1.750 & 2.195 & 3.595 & 1.255 \end{pmatrix}^T$

b) Gewinn $= 3.400$

c) $q_E = \begin{pmatrix} 400 & 400 \end{pmatrix}^T$

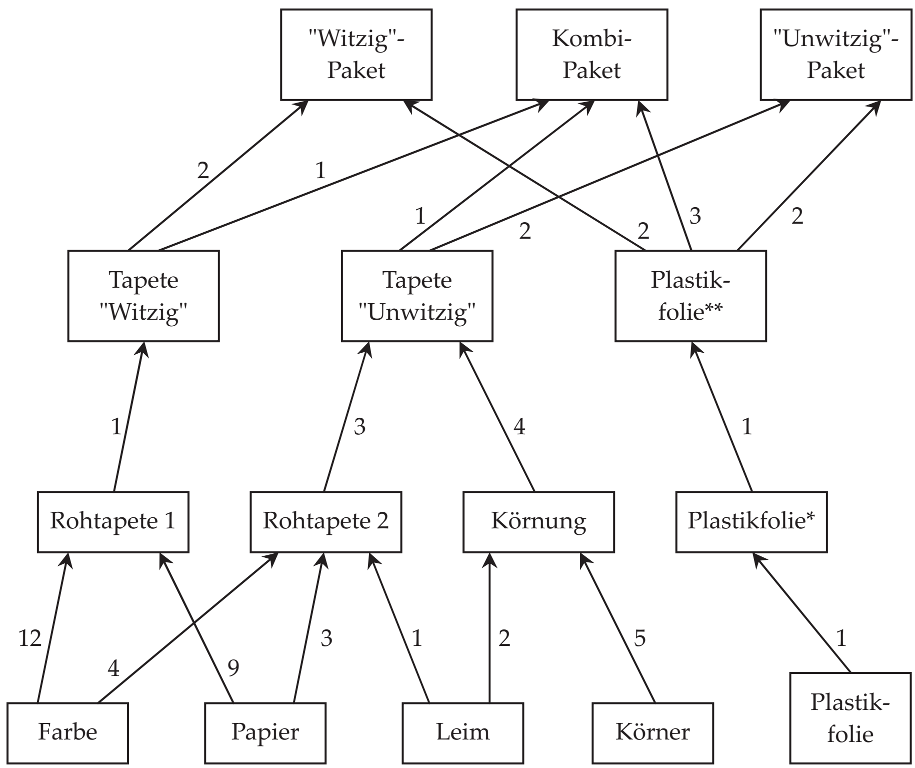
d) $q_R = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 60 & 20 \end{pmatrix}^T$

Materialkosten $= 200$

Aufgabe 4.11:

a) Nein, der Produktionsprozess ist nicht direkt in Produktionsmatrizen umwandelbar, denn verschiedene Rohstoffe (bzw. Zwischenprodukte) gehen direkt in die Endprodukte (bzw. andere Zwischenprodukte höherer Produktionsstufen) ein und überspringen somit Produktionsstufen. Um die M_{RE} zu bestimmen, können in jeder Produktionsstufe weitere Zwischenprodukte eingeführt werden. Dies führt zu:

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 24 & 24 & 24 \\ 18 & 18 & 18 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 20 & 40 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



b) Ihr Rohstofflager reicht nicht aus. Sie müssen $q_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ nachkaufen.

Aufgabe 4.12:

a) $q_V = \begin{pmatrix} 200 & 400 \end{pmatrix}^T$

b) $q_E = \begin{pmatrix} 25 & 250 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 4.13:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 320 & 135 \end{pmatrix}^T$

c) $q_E = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 4.14:

a) $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 1.200 & 695 & 1.490 \end{pmatrix}^T$, $q_Z = \begin{pmatrix} 10 & 105 & 90 \end{pmatrix}^T$

c) Gewinn $= 5.000$

d) Gewinn bei Einkauf der Rohstoffe: -7.000

Gewinn bei Einkauf der Zwischenprodukte: $11.000 - 10 \cdot p_{Z_1}$

Der Kauf der Zwischenprodukte ist folglich zu präferieren, falls $p_{Z_1} < 1.800$. Der Gewinn des Alternativangebots ist positiv, falls $p_{Z_1} < 1.100$.

Aufgabe 4.15:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 24 \\ 13 & 10 & 22 \\ 19 & 18 & 21 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 1.890 & 1.535 & 1.865 \end{pmatrix}^T$

c) Materialkosten $= 21.490$

Erlös $= 28.000$

Gewinn $= 6.510$

d) $p_{E_2} = 658$ € pro Stück

Aufgabe 4.16:

a) Materialkosten $= 285$

b) $q_E = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}^T$

c) $q_E = \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}^T \Rightarrow q_Z = \begin{pmatrix} 20 & 1 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 4.17:

$$a = 3$$

Aufgabe 4.18:

a) $\text{Gewinn} = \left(p_E - p_R \cdot M_{RE}\right) \cdot q_E$

b) $a = 3$

Aufgabe 4.19:

a) $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 20 & 15 \\ 50 & 0 & 40 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \ M_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \ M_{RE} = \begin{pmatrix} 130 & 160 & 0 \\ 370 & 255 & 345 \\ 550 & 410 & 800 \\ 80 & 10 & 110 \end{pmatrix}$

b) $p_{Bratwurst} = 5{,}30$ € pro kg

c) Sie müssen 1.000 kg Karotten nachkaufen, während 4.000 kg Körner im Lager verbleiben.

d) $q_Z = \begin{pmatrix} 140 & 440 & 800 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 4.20:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 13 \\ 4 & 7 & 5 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

b) $q_R = \begin{pmatrix} 345 & 180 & 295 \end{pmatrix}^T$

c) $K = 3.920$ €, $E = 5.000$ €, $G = 1.080$ €

d) $a \leq 2$

Aufgabe 4.21:

$$a = 4, \;\; b = 8, \;\; c = {}^{16}\!/_{19}$$

Aufgabe 4.22:

$$q_{R_1} = 600$$

Kapitel 5

Aufgabe 5.1:

$$y = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 160 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 5.2:

Nein, da $\det(E - Q) < 0$ ist.

Aufgabe 5.3:

a) $Q = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

b) $y = \begin{pmatrix} 240 & 40 \end{pmatrix}^T$

c) $\Delta q = \begin{pmatrix} 600 & 350 \end{pmatrix}^T$

d) Ja, da $(E - Q)^{-1} \geq 0$ ist.

Aufgabe 5.4:

a_{23}: verbrauchte Menge von Gut 2 zur Herstellung einer Einheit von Gut 3

$\sum_{j=1}^{3} x_{2j}$: innerbetrieblich verbrauchte Menge von Gut 2 zur Herstellung des Produktionsplans q

$q_1 - y_1$: innerbetrieblich verbrauchte Menge von Gut 1 zur Herstellung des Produktionsplans q

$\sum_{j=1}^{3} a_{1j}$: innerbetrieblich verbrauchte Menge von Gut 1 zur Herstellung je einer Einheit der Güter

b_{11}: der Anteil der produzierten Einheiten von Gut 1, der zur Befriedigung des innerbetrieblichen Verbrauchs der anderen Produktionsstätten 2 und 3 und der externen Nachfrage nach Gut 1 zur Verfügung steht

Aufgabe 5.5:

a) $y = \begin{pmatrix} 10 & 70 & 20 \end{pmatrix}^T$

b) $X = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 15 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 5 \end{pmatrix}$

c) Ja, da alle sukzessiven Hauptminoren von $(E - Q) > 0$ sind.

d) $q = \begin{pmatrix} 175 & 350 & 175 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 5.6:

a) $q = \begin{pmatrix} 2.600 & 2.500 & 3.200 \end{pmatrix}^T$

b) Ja, da alle sukzessiven Hauptminoren von $(E - Q) > 0$ sind.

Aufgabe 5.7:

a) $Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

b) $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 27 & 12 \end{pmatrix}^T$

c) $q = \begin{pmatrix} 50 & 55 & 60 & 88 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 5.8:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/6 \\ 1/10 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.9:

a) $y = \begin{pmatrix} 25 & 5 \end{pmatrix}^T$

b) $Q = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

c) $q = \begin{pmatrix} 280 & 375 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 5.10:

a) $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

b) $X = \begin{pmatrix} 100 & 94 & 305 \\ 50 & 235 & 183 \\ 150 & 94 & 366 \end{pmatrix}$

c) $\det(E-Q) = 0{,}001 > 0,\ \det\left((E-Q)_{33}\right) = 0{,}38 > 0,\ \det\left(\left((E-Q)_{33}\right)_{22}\right) = 0{,}8 > 0$

Jede sinnvolle externe Nachfrage lässt sich somit befriedigen.

d) $q^d = 7 \cdot q^a = \begin{pmatrix} 3.500 & 3.290 & 4.270 \end{pmatrix}^T$, da $y^d = 7 \cdot y^a$

Aufgabe 5.11:

a) $X = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

b) $y = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 26 \end{pmatrix}^T$

c) Ja, da $(E-Q)^{-1} \geq 0$ ist.

d) $q = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 100 \end{pmatrix}^T$, $y = \begin{pmatrix} 100 & 70 & 70 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 5.12:

a) $q = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 150 \end{pmatrix}^T$

b) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

c) $q = \begin{pmatrix} 163 & 196 & 170 \end{pmatrix}^T$

d) Ja, da alle sukzessiven Hauptminoren von $(E-Q) > 0$ sind.

Aufgabe 5.13:

a) Ja, da $(E-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 180 & 155 & 145 \\ 160 & 140 & 130 \\ 190 & 165 & 155 \end{pmatrix} \geq 0$ bzw. alle Hauptminoren von $(E-Q) > 0$ sind.

b) $q = \begin{pmatrix} 48.000 \\ 43.000 \\ 51.000 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 24.000 & 8.600 & 15.300 \\ 9.600 & 12.900 & 20.400 \\ 19.200 & 21.500 & 10.200 \end{pmatrix}$

c) $y = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 300 \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 5.14:

$$X = \begin{pmatrix} 69 & 43 & 0 \\ 46 & 0 & 207 \\ 23 & 86 & 345 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.15:

a) $x_{13} = 3,\ x_{22} = 6,\ x_{31} = 3,\ a_{11} = 0{,}1,\ a_{32} = 0{,}1,\ a_{33} = 0{,}4$

b) $y = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}^T$

c) $q^c = 2 \cdot q = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 20 \end{pmatrix}^T$, da $y^c = 2 \cdot y^b$

Aufgabe 5.16:

a) Ja, da $(E-Q)^{-1} = \frac{1.000}{527} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}19 & 0{,}11 \\ 0{,}04 & 0{,}79 & 0{,}18 \\ 0{,}14 & 0{,}13 & 0{,}63 \end{pmatrix} \geq 0$ bzw. alle Hauptminoren von $(E-Q) > 0$ sind.

b) $q = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 15 \\ 0 & 75 & 30 \\ 60 & 25 & 15 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 205 \\ 145 \\ 50 \end{pmatrix}$

c) $Q \cdot q$ ist der innerbetriebliche Verbrauch bei Herstellung des Produktionsplans q.

Aufgabe 5.17:

$$q = \begin{pmatrix} 750 & 369 & 234 \end{pmatrix}^T,\ \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} & \sum_{j=1}^{3} x_{2j} & \sum_{j=1}^{3} x_{3j} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 744 & 363 & 228 \end{pmatrix}^T$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.18:

$$y = \begin{pmatrix} 29 & 42 & 103 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 5.19:

$$q = \begin{pmatrix} 150 & 600 & 300 \end{pmatrix}^T, \; y = \begin{pmatrix} 45 & 60 & 75 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 5.20:

a) $x_{11} = 40, \; x_{22} = 15, \; x_{33} = 56, \; y = \begin{pmatrix} 120 & 30 & 112 \end{pmatrix}^T$

b) $y = \begin{pmatrix} 30 & 90 & 138 \end{pmatrix}^T$

c) Sind die sukzessiven Hauptminoren von $(E - Q) > 0$?

Sind alle Komponenten der Matrix $(E - Q)^{-1} \geq 0$?

d) $X = Q$. gilt, falls $q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Aufgabe 5.21:

a) $Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 28 & 77 & 26 \\ 28 & 0 & 39 \\ 56 & 7 & 65 \end{pmatrix}, \; q = \begin{pmatrix} 140 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix}$

b) $y = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T$

c) $q^c = 2 \cdot q = \begin{pmatrix} 280 & 140 & 260 \end{pmatrix}^T$

d) $q^d = \begin{pmatrix} 335 & 170 & 310 \end{pmatrix}^T$

e) $\det(E - Q) = 0{,}05 > 0, \; \det\left((E - Q)_{33}\right) = 0{,}58 > 0, \; \det\left(\left((E - Q)_{33}\right)_{22}\right) = 0{,}8 > 0$

Jede sinnvolle externe Nachfrage lässt sich somit befriedigen.

Aufgabe 5.22:

a) $Q = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/2 \\ 4/25 & 3/10 \end{pmatrix}$

b) Es sind 2 Vektorpaare notwendig.

c) $q = \begin{pmatrix} 80 & 50 \end{pmatrix}^T$

Kapitel 6

Aufgabe 6.1:

$$c = 0{,}6a + 0{,}2b$$

Aufgabe 6.2:

a) a, b, c sind linear abhängig.

b) a, b, c sind linear unabhängig.

Aufgabe 6.3:

c lässt sich für $d = 2$ als LK der Vektoren a und b darstellen als: $c = 0{,}5a + 0{,}25b$

Aufgabe 6.4:

d lässt sich für $e = -8$ als LK der Vektoren a, b und c darstellen als: $d = 5a + 2b + 2c$

Aufgabe 6.5:

a, b, c und d sind linear abhängig. a lässt sich darstellen als: $a = 2b - c - 2d$

Aufgabe 6.6:

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, um d als LK von a, b und c darzustellen:

$a \cdot x_1 + b \cdot (-2{,}5 + 1{,}5 \cdot x_1) + c \cdot (-2 + 0{,}5 \cdot x_1) = d$ mit $x_1 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6.7:

Der Rang einer Matrix, welche die Vektoren enthält ist zwei. Somit sind die Vektoren l.a., die größtmögliche l.u. Teilmenge enthält zwei Vektoren.

Aufgabe 6.8:

Mit

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } e = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sind die folgenden Mengen sämtliche Teilmengen von $\mathbb{A}$, die Teilmengen besitzen, welche drei linear unabhängige Vektoren enthalten: $\{a,b,c\}$, $\{a,c,e\}$, $\{b,c,d\}$, $\{b,c,e\}$, $\{c,d,e\}$, $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,c,d,e\}$, $\{b,c,d,e\}$, $\{a,b,c,d,e\}$

Für $\mathbb{B}$ können keine Mengen existieren, die Teilmengen besitzen, welche drei linear unabhängige Vektoren enthalten, da die Vektoren dem $\mathbb{R}^2$ entstammen. Hier sind mehr als zwei Vektoren immer l. a.

Für eine Matrix A gilt stets $0 \le rg(A) \le \min(n,m)$. Eine Matrix, welche Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ enthält, hat also maximal einen Rang von 2 und somit gibt es maximal 2 l. u. Vektoren.

Aufgabe 6.9:

a, b, c sind linear unabhängig.

Aufgabe 6.10:

$$\operatorname{rg}(A)=3,\ \operatorname{rg}(B)=2,\ \operatorname{rg}(C)=4,\ \operatorname{rg}(D)=3$$

Aufgabe 6.11:

$$\operatorname{rg}(A)=2,\ \operatorname{rg}(B)=2,\ \operatorname{rg}(C)=3,\ \operatorname{rg}(D)=3$$

Aufgabe 6.12:

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}2-3x_3 & \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x_3 & x_3\end{pmatrix}^T,\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 6.13:

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}5+x_3 & 4+2x_3 & x_3 & 2\end{pmatrix}^T,\ x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 6.14:

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}-2+x_2 & x_2 & 3-2x_2 & -4+3x_2\end{pmatrix}^T,\ x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 6.15:

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & \tfrac{70}{13}-\tfrac{24}{13}x_1 & -\tfrac{73}{13}+\tfrac{41}{13}x_1 & -\tfrac{90}{13}+\tfrac{71}{26}x_1\end{pmatrix}^T,\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 6.16:

a) $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}\tfrac{8}{3}+\tfrac{4}{3}x_2+3x_5 & x_2 & -8-2x_2-7x_5 & -7-4x_5 & x_5\end{pmatrix}^T, x_2, x_5\in\mathbb{R}\right\}$

b) x_4 und x_5 sind nicht gleichzeitig frei wählbar, da die beiden Variablen nur in gegenseitiger Abhängigkeit ausgedrückt werden können.

Aufgabe 6.17:

Das LGS ist nicht eindeutig lösbar.

Aufgabe 6.18:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3-3x_4 & x_4 & 2+5x_4 & x_4 \end{pmatrix}^T, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 6.19:

a) $x_3 \in [2;7]$

b) $a = 4$

Aufgabe 6.20:

a) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1-x_2 & 4-x_1 \end{pmatrix}^T, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

b) $x_1 \in [0;4],\ x_2 \in [0;1],\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

Spezielle Lösungen sind beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$.

Aufgabe 6.21:

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3x_3 & x_3 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Es gibt keine positive Lösung.

Aufgabe 6.22:

a) $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{1}{2}x_3-x_4 & \frac{4}{3}x_3-\frac{7}{3}x_4 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}$

b) Ja, x_1 und x_3 können gemeinsam frei gewählt werden.

Aufgabe 6.23:

Das LGS ist unlösbar.

Aufgabe 6.24:

a) $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix} 3-x_3 & -4-2x_3 & x_3 & 0 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

b) Es existieren keine nichtnegativen Lösungen.

Aufgabe 6.25:

a) $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix} -3x_4+3 & x_4 & 5x_4+2 & x_4 \end{pmatrix}^T, x_4 \in \mathbb{R}\right\}$

b) Es existiert kein a, für das v eine Lösung des LGS ist.

Aufgabe 6.26:

a) $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix} 8-5x_3 & -2+2x_3 & x_3 & 0{,}5 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

b) Für $a=2$ ist v eine Lösung des LGS.

Aufgabe 6.27:

Keine Lösung für $a=\frac{1}{2}$

Genau eine Lösung für $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$: $x=\begin{pmatrix} \frac{-4a}{1-2a} & \frac{4}{1-2a} \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.28:

Unendlich viele Lösungen für $a=1$: $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}4-2x_3 & 3+x_3 & x_3\end{pmatrix}^T, x_3\in\mathbb{R}\right\}$

Genau eine Lösung für $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $x=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.29:

Keine Lösung für $a=1$

Unendlich viele Lösungen für $a=0$: $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_2 & -1\end{pmatrix}^T, x_2\in\mathbb{R}\right\}$

Genau eine Lösung für $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$: $x=\begin{pmatrix}\frac{a(a+2)}{a-1} & \frac{3}{2(a-1)} & \frac{a+2}{2(a-1)}\end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.30:

Keine Lösung für $a=-0{,}4$

Genau eine Lösung für $a\neq-0{,}4$: $x=\begin{pmatrix}\frac{2{,}2}{a+0{,}4} & -0{,}2-\frac{5{,}72}{a+0{,}4} & -0{,}4-\frac{2{,}64}{a+0{,}4}\end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.31:

Unendlich viele Lösungen für $a=0{,}5$: $\mathbb{L}_h=\left\{\begin{pmatrix}\frac{3}{14}x_3 & \frac{3}{7}x_3 & x_3\end{pmatrix}^T, x_3\in\mathbb{R}\right\}$

Genau eine Lösung für $a\neq0{,}5$: $x=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.32:

Keine Lösung für $a\neq-5$

Unendlich viele Lösungen für $a=-5$:
$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}3-x_3+2x_4 & -4-2x_3-x_4 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T, x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 6.33:

Für $c = b + 2a$ ist das LGS (eindeutig) lösbar mit: $x = \begin{pmatrix} 2a - 3c & 3a - 4c \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.34:

a) $\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = 0 \\ 2 & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}$

$\mathrm{rg}(A_I) = 1$

$\mathrm{rg}(A_{II}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = 0 \\ 2 & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}$

b) In A_I sind die Zeilen und die Spalten für $a \in \mathbb{R}$ l. a.

In A_{II} sind die Zeilen für $a \in \mathbb{R}$ l. a., die Spalten sind für $a = 0$ l. a. und für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l. u.

In A sind die Zeilen und die Spalten für $a \in \mathbb{R}$ l. a.

c) Ein zugrunde liegendes LGS ist nie eindeutig lösbar, da $\mathrm{rg}(A) < n = 4$ stets gilt.

d) Ein zugrunde liegendes LGS ist lösbar (und zwar mit unendlich vielen Lösungen), falls $a \neq 0 \wedge b_3 = 2b_1$ oder $a = 0 \wedge b_2 = b_1 \wedge b_3 = 2b_1$. Andernfalls hat das LGS keine Lösung. Der Vektor b ist somit für $a = 3$ eine Lösung, sonst nicht.

Aufgabe 6.35:

a) $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq m$

b) $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq m - k$

c) $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min\{m - k; n\}$

Aufgabe 6.36:

a) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 3x_1 - a + 1 & 1 \end{pmatrix}^T, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

b) Ein LGS ist eindeutig lösbar, falls $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b) = n$ gilt.

c) Nur falls $b = 0^T$ gilt, ist ein LGS unabhängig von der Gestalt der Koeffizientenmatrix A immer lösbar, denn es gilt: $rg(A) = rg(A \mid 0)$

d) Dies ist unmöglich, denn ein LGS ist nie unabhängig von der Gestalt der Koeffizientenmatrix A immer eindeutig lösbar. Dazu müsste $rg(A) = rg(A \mid b) = n$, also insbesondere $rg(A) = n$ gelten, was unabhängig von b ist.

e) i) Falls $A \cdot x = b$ eindeutig lösbar ist, gilt $rg(A) = rg(A \mid b) = n$. Aus $rg\left(A^T\right) \leq rg(A \mid b) \leq n$ und $rg(A) = rg\left(A^T\right) = n$ ergibt sich $rg\left(A^T\right) = rg\left(A^T \mid b\right) = n$, weshalb auch $A^T \cdot x = b$ eindeutig lösbar sein muss.

ii) Falls $A \cdot x = b$ unendlich viele Lösungen besitzt, gilt $rg(A) = rg(A \mid b) < n$. Da $rg(A) = rg\left(A^T\right) < n$, folgt, dass $A^T \cdot x = b$ nicht eindeutig lösbar sein kann. Eine Aussage über die Validität von $rg\left(A^T\right) = rg\left(A^T \mid b\right)$ ist dagegen nicht möglich. $A^T \cdot x = b$ kann unendlich viele Lösungen oder keine Lösung haben.

Aufgabe 6.37:

a) Keine Lösung für $a = -\frac{1}{2}$

Unendlich viele Lösungen für $a = 3$: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{15} - \frac{2}{15}x_2 & x_2 & \frac{9}{5} - \frac{3}{5}x_2 \end{pmatrix}^T, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Genau eine Lösung für $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$: $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2a+1} & \frac{7a+5}{2a+1} & \frac{-3}{2a+1} \end{pmatrix}^T$

b) Unendlich viele Lösungen für $a = -\frac{1}{2}$: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 & -\frac{1}{2}x_3 & x_3 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 6.38:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ existiert eine eindeutige Lösung: $x = \begin{pmatrix} 2a & 7 & 3b & 2a - 4{,}5b \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.39:

Keine Lösung für $a - b + 3 = 0$

Genau eine Lösung für $a - b + 3 \neq 0$: $x = \begin{pmatrix} \frac{-7a+b-12}{3a-3b+9} & \frac{8a-5b+6}{3a-3b+9} & \frac{3}{a-b+3} \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.40:

Keine Lösung für $a+b+5=0$ und $a\neq 4$

Unendlich viele Lösungen für $a=4$ und $b=-9$:

$$\mathbb{L}=\left\{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x_3 \quad -\tfrac{5}{2}x_3 \quad x_3\right)^T, x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

Genau eine Lösung für $a+b+5\neq 0$: $x=\left(\dfrac{9+b}{2a+2b+10} \quad \dfrac{(b-1)\cdot(4-a)}{4a+4b+20} \quad \dfrac{4-a}{a+b+5}\right)^T$

Aufgabe 6.41:

a) $a=-\tfrac{1}{2}$

b) $a\in\mathbb{R}$

c) Keine Lösung für $a=-\tfrac{1}{2}$ und $b\neq 0$

Unendlich viele Lösungen für $a=-\tfrac{1}{2}$ und $b=0$:

$$\mathbb{L}=\left\{\left(2x_2-\tfrac{1}{3}x_4-\tfrac{7}{3} \quad x_2 \quad \tfrac{2}{3}x_4+\tfrac{2}{3} \quad x_4\right)^T, x_2,x_4\in\mathbb{R}\right\}$$

Unendlich viele Lösungen für $a\neq-\tfrac{1}{2}$ und $b\in\mathbb{R}$:

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{7a+b+3{,}5}{3(a+0{,}5)}+\dfrac{4a+4}{3}x_2 \\ x_2 \\ \dfrac{2a+2b+1}{3(a+0{,}5)}+\dfrac{-8a+4}{3}x_2 \\ \dfrac{b}{a+0{,}5}+4x_2 \end{pmatrix}, x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 6.42:

Keine Lösung für $b=0$ und $a\neq 9$ sowie für $b=-3$ und $a\neq 6$

Unendlich viele Lösungen für $b=0$ und $a=9$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Unendlich viele Lösungen für $b = -3$ und $a = 6$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_3 & 1 + x_3 & x_3 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Genau eine Lösung für $b \in \mathbb{R} \setminus \{-3;0\}$ und $a \in \mathbb{R}$: $x = \begin{pmatrix} \frac{-3a+3b+27}{2b(b+3)} & \frac{a+b-3}{b+3} & \frac{a-6}{b+3} \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.43:

Keine Lösung für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{3}\right\}$

Unendlich viele Lösungen für $a \in \mathbb{R}$ und $b = 0$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\tfrac{1}{5}(3a+1) + \tfrac{1}{2}ax_3 & \tfrac{2}{5}(a+2) - 2ax_3 & x_3 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Unendlich viele Lösungen für $a \in \mathbb{R}$ und $b = \tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{3}$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \tfrac{3}{8}a - \tfrac{5}{12} + \tfrac{1}{2}ax_3 & \tfrac{1}{4}a + \tfrac{5}{6} - 2ax_3 & x_3 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Hinweis: Für $a = \tfrac{2}{9}$ ist $b=0$ und die beiden Lösungsmengen sind identisch.

Aufgabe 6.44:

a) $\det(A) = a^2 + 2$

b) Da $\det(A) = a^2 + 2 > 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, ist stets $rg(A) = n = 3$, und damit weiter $rg(A \mid b) = n = 3$, da A quadratisch ist.

c) $$x = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + a - 3 \cdot b}{a^2 + 2} \\ \dfrac{-2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b}{a^2 + 2} \\ \dfrac{2 - 2 \cdot b + a \cdot b}{a^2 + 2} \end{pmatrix}$$

Das LGS ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ lösbar.

d) $x = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$

Aufgabe 6.45:

a) $rg(A)$ gibt die Anzahl der l.u. Zeilen und Spalten der Matrix A an. Gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $rg(A) = m$, so sind die Zeilen stets l.u. (Nur falls zudem $n = m$ gilt, die Matrix A also quadratisch ist, sind auch die Spalten l.u.)

b) Falls $rg(A) = rg(A \mid b) = n$ gilt, ist das LGS eindeutig lösbar.

Falls $rg(A) = rg(A \mid b) < n$ gilt, besitzt das LGS unendlich viele Lösungen.

Falls $rg(A) < rg(A \mid b)$ gilt, ist das LGS unlösbar.

c) i) Das LGS kann eindeutig lösbar sein oder unendlich viele Lösungen besitzen, da zwangsläufig auch $rg(A \mid b) = m$ gilt.

ii) Das LGS kann eindeutig lösbar sein oder unlösbar sein, aber nie unendlich viele Lösungen besitzen. Zwar ist weiterhin die Relation zwischen $rg(A)$ und $rg(A \mid b)$ unbekannt, jedoch gilt$rg(A) = n$, was unendlich viele Lösungen ausschließt.

d) Falls $b = 0$ gilt, ist das LGS immer lösbar, da dann stets $rg(A) = rg(A \mid b)$ gilt.

i) Das LGS kann eindeutig lösbar sein oder unendlich viele Lösungen besitzen, da die Relationen zwischen $rg(A) = rg(A \mid b)$ und n unbekannt ist.

ii) Das LGS ist eindeutig lösbar, da sich dann $rg(A) = rg(A \mid b) = n$ ergibt.

e) Falls A die $(m \times n)$-Nullmatrix ist, gilt $rg(A) = 0$. Die Anzahl der Zeilen der Koeffizientenmatrix bzw. die Anzahl der Variablen eines LGS muss stets größer Null sein, also gilt $n > 0$, woraus folgt: $rg(A) < n$. Da die Relation zwischen $rg(A)$ und $rg(A \mid b)$ allerdings unbekannt ist, kann das LGS unendlich viele Lösungen besitzen oder unlösbar sein.

Die Tatsache, dass $m = n$ gilt, ändert die Antwort nicht.

f) i) Sei $B = \left(\begin{array}{c} a \\ \hdashline b \\ \hdashline c \end{array}\right)$, so muss, damit die 2. Zeile eine Linearkombination der anderen beiden Zeilen ist, die Gleichung $x_1 \cdot a + x_2 \cdot c = b$ lösbar sein. Das heißt, $\left(\begin{array}{c:c} a & c \end{array}\right) \cdot x = b$ muss lösbar sein. Hier ist $\operatorname{rg}\left(\begin{array}{c:c} a & c \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c:c|c} a & c & b \end{array}\right) = 2$, somit ist die 2. Zeile ist eine Linearkombination der anderen, wobei $\frac{7}{26} \cdot a + \frac{15}{26} \cdot c = b$.

ii) Sei $B = \left(\begin{array}{c:c:c} d & e & f \end{array}\right)$, so muss, damit die 2. Spalte eine Linearkombination der anderen beiden Spalten ist, die Gleichung $x_1 \cdot d + x_2 \cdot f = e$ lösbar sein. Das heißt, $\left(\begin{array}{c:c} d & f \end{array}\right) \cdot x = e$ muss lösbar sein. Hier ist jedoch $\operatorname{rg}\left(\begin{array}{c:c} a & c \end{array}\right) < \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c:c|c} a & c & b \end{array}\right)$ und die 2. Spalte ist somit keine Linearkombination der beiden anderen.

Kapitel 7

Aufgabe 7.1:

a) $z = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 2 & 0 & 6 & 64 \end{pmatrix}^T$

b) $z = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 2 & 1 & 6 & 64 \end{pmatrix}^T$

c) Zuweisung ist nicht eindeutig für: x_3 bzw. $x_5 \in \mathbb{R} \setminus \{\text{ungerade natürliche Zahlen}\}$, das heißt, falls $x_3 \vee x_5 \notin \{1;3;5;7;9;11;\ldots\}$.

Zuweisung ist widersprüchlich, falls zudem $2x_3 \neq y_3^2$ bzw. $2x_5 \neq y_5^2$

d) Die Abgeschlossenheit bzgl. einer Vektoraddition von x und y ist erfüllt:

$$a \oplus b = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$$

Das Kommutativgesetz bzgl. einer Vektoraddition ist nicht erfüllt:

$$a \oplus b = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \end{pmatrix}^T \neq b \oplus a = \begin{pmatrix} 3 & 25 & 16 \end{pmatrix}^T$$

Das Assoziativgesetz bzgl. einer Vektoraddition ist nicht erfüllt:

$$(a \oplus b) \oplus c = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -8 \end{pmatrix}^T \neq a \oplus (b \oplus c) = \begin{pmatrix} 6 & 256 & -4 \end{pmatrix}^T$$

Es existiert kein neutrales Element der Vektoraddition:
Gleichgültig, ob ein Element von links oder von rechts addiert wird, der Ergebnisvektor besteht an der zweiten Stelle nur aus dem Quadrat des zweiten Elementes des rechten Vektors und an der dritten Stelle nur aus dem doppelten des dritten Elementes des linken Vektors. Somit kann kein neutrales Element der Vektoraddition existieren.

Es existiert kein inverses Element der Vektoraddition:
Begründung wie oben.

$\mathbb{V}$ ist somit kein Vektorraum, da mehrere Vektorraumaxiome nicht erfüllt sind.

Aufgabe 7.2:

a) a, b und c bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, da $d = x_1 \cdot a + x_2 \cdot b + x_3 \cdot c$ eindeutig lösbar ist mit: $x = \begin{pmatrix} -2d_1 + d_2 + d_3 & 4d_1 - d_2 - 2d_3 & 3d_1 - d_2 - d_3 \end{pmatrix}^T$

b) $e = -7a + 19b + 14c$

Aufgabe 7.3:

a) a, b und c bilden keine Basis des $\mathbb{R}^3$, da sie linear abhängig sind.

b) d ist keine LK der Vektoren a, b und c und liegt somit nicht im Unterraum $\mathbb{U}$.

Aufgabe 7.4:

$$\dim([\mathbb{A}]) = 2 \text{ mit } \mathbb{A} = \{v_1, v_2, v_3\}, \text{ eine Basis von } [\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 7.5:

Vier Basen des $\mathbb{R}^3$ sind beispielsweise:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 7.6:

a) Nein, da $\mathbb{A} \not\subset \mathbb{R}^4$ ist.

b) $\dim([\mathbb{A}]) = 3$

c) Eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) Ja, da $[\mathbb{A}] = \mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 7.7:

a) $d \notin \mathbb{U}$

b) $\dim(\mathbb{U}) = 3$

c) Nein, da $d \notin \mathbb{U}$ ist..

Aufgabe 7.8:

$$\dim([\mathbb{A}]) = 3,\ \text{eine Basis von } [\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -55 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 7.9:

a) $\dim([\mathbb{A}]) = 3,\ \text{eine Basis von } [\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\mathbb{A}$ erzeugt weder den $\mathbb{R}^3$ noch den $\mathbb{R}^4$, sondern einen dreidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 7.10:

a) Eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbb{B}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbb{C}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 25 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 32 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b) Die Vektoren der Menge $\mathbb{A}$ bilden einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^2$.

Die Vektoren der Menge $\mathbb{B}$ bilden einen dreidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

Die Vektoren der Menge $\mathbb{C}$ bilden einen dreidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 7.11:

a) Nein, da die Vektoren l. a. sind.

b) $\dim([\mathbb{A}]) = 2$

c) Eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) Falls $a = -6$ gilt $v \in [\mathbb{A}]$.

Aufgabe 7.12:

a) $\dim([\mathbb{B}]) = 2$

b) Eine Basis von $[\mathbb{B}] = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Nur $\mathbb{D}$ ist eine Basis eines zweidimensionalen Unterraums des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7.13:

a) Benötigt wird eine Menge mit 3 l. u. Vektoren, welche je 4 Elemente besitzen, z. B.:

$$\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Im $\mathbb{R}^3$ kann sich ein Unterraum maximal in 3 Dimensionen ausdehnen. Es gibt somit keinen vierdimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Man bräuchte eine Menge mit 4 l. u. Vektoren, welche je 3 Elemente besitzen. Dies ist nicht möglich.

Aufgabe 7.14:

a) $\dim([\mathbb{A}]) = 3$

b) Eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\mathbb{B}$ kann höchstens fünf l. u. Vektoren enthalten.

d) $\mathbb{B}$ muss zwei linear unabhängige Vektoren enthalten, ferner muss gelten $\dim([\mathbb{A} \cup \mathbb{B}]) = 5$.

Aufgabe 7.15:

a) $\mathbb{A}_{neu} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\mathbb{B}_{neu} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Eine Basis von $[\mathbb{C}] = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\dim([\mathbb{C}]) = 3$

e) $\dim([\mathbb{F}]) \in \{5;6;7\}$

f) $\dim([\mathbb{G}]) \in \{0;1;2;3\}$

Aufgabe 7.16:

a) Falls $a = 1$ und $b = 3$ erzeugt $\mathbb{A}$ einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

b) $\mathbb{A}$ kann weder den $\mathbb{R}^3$ noch den $\mathbb{R}^4$ erzeugen.

c) $\dim([\mathbb{A}]) = 3$, eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 7.17:

a) $\dim([\mathbb{A}]) = 2$

b) Eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

d) Da $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^4$ sind, lässt sich niemals ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ erzeugen.

Aufgabe 7.18:

a) Die Vektoren a, b, c, d sind damit für alle $u \in \mathbb{R}$ linear abhängig.

b) $\dim([\mathbb{A}]) = \operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad u = -1 \\ 3 & \text{falls} \quad u \neq -1 \end{cases}$,

Falls $u = -1$, dann ist unter anderem $\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $[\mathbb{A}]$.

Falls $u \neq -1$, dann ist unter anderem $\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $[\mathbb{A}]$.

c) Für $u = -1$ ist $\operatorname{rg}(B) = 3 > \operatorname{rg}(A) = 2$ und der Vektor e liegt nicht in $[\mathbb{A}]$.

Für $u \neq -1$ ist $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A) = 3$ und der Vektor e liegt in $[\mathbb{A}]$.

Aufgabe 7.19:

a) Eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim([\mathbb{A}]) = 2$

b) Eine Menge $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^4$ kann niemals den $\mathbb{R}^2$ oder den $\mathbb{R}^3$ erzeugen. Da $\dim([\mathbb{A}]) = 2 < \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ ist, kann $\mathbb{A}$ nicht den kompletten $\mathbb{R}^4$ erzeugen.

c) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}$ erzeugt den $\mathbb{R}^4$ nicht, da $\dim([\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}]) = 3$ ist.

d) Es existieren $v \in \mathbb{R}^4$ mit $v \neq 0$, welche sowohl von $\mathbb{A}$ als auch von $\mathbb{B}$ erzeugt werden, da $\dim([\mathbb{A}] \cap [\mathbb{B}]) = \dim([\mathbb{A}]) + \dim([\mathbb{B}]) - \dim([\mathbb{A} \cup \mathbb{B}]) = 2 + 2 - 3 = 1 > 0$ ist.

Aufgabe 7.20:

a) $\dim([\mathbb{A}]) = 3$, eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\mathbb{A}$ ist EZS des $\mathbb{R}^3$.

c) Ja, da $\mathbb{A}$ den gesamten $\mathbb{R}^3$ erzeugt.

Aufgabe 7.21:

a) $\dim([\mathbb{A}]) = 3$, eine Basis von $[\mathbb{A}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ -20/3 \end{pmatrix} \right\}$

b) Es gilt $[\mathbb{B}] \subseteq [\mathbb{A}]$, aber nicht $[\mathbb{B}] = [\mathbb{A}]$.

Aufgabe 7.22:

a) Der $\mathbb{R}^3$ kann niemals Teilmenge eines Unterraums des $\mathbb{R}^4$ sein.

b) Nein, da $\dim([\mathbb{A}]) = 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ ist.

c) Ja, da $\dim([\mathbb{A}]) = 3 = \dim([\mathbb{A} \cup \mathbb{B}])$ ist.

d) Nein, da $\dim([\mathbb{A}]) = 3 < 4 = \dim([\mathbb{A} \cup \mathbb{C}])$ ist.

Aufgabe 7.23:

a) $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_3 & 2x_3 & x_3 & 0 \end{pmatrix}^T, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\dim(\mathbb{L}_h) = 1$

c) Eine Basis von $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 7.24:

a) $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 & -2x_3 - 3x_4 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\dim(\mathbb{L}_h) = 2$, eine Basis von $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $x \notin \mathbb{L}_h$

Aufgabe 7.25:

a) $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 + 2x_3 & x_3 & -3x_1 + 7x_3 \end{pmatrix}^T, x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

b) Eine Basis von $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(\mathbb{L}_h) = 2$

Aufgabe 7.26:

a) $\mathbb{L}_h = \left\{ \left(-\tfrac{19}{7}x_3 + x_5,\ -\tfrac{22}{7}x_3 + 2x_5,\ x_3,\ \tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{5}{2}x_5,\ x_5 \right)^T, x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\dim(\mathbb{L}_h) = 2$, eine Basis von $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -\tfrac{19}{7} \\ -\tfrac{22}{7} \\ 1 \\ \tfrac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -\tfrac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Die Lösungsmenge bildet einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^5$

Aufgabe 7.27:

a) $\mathbb{L}_h = \left\{ \left(-\tfrac{3}{2}x_4 - 2x_5 \quad -2x_4 - 4x_5 \quad 3x_4 - \tfrac{1}{2}x_5 \quad x_4 \quad x_5 \right)^T, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\dim(\mathbb{L}_h) = 2$, eine Basis von $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -\tfrac{3}{2} \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -\tfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Ja, da $\mathbb{L}_h \subseteq \mathbb{R}^5$, $\mathbb{L}_h \neq \emptyset$ und $\mathbb{L}_h$ abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit einem Skalar ist und die Axiome der Vektorraumtheorie erfüllt.

Aufgabe 7.28:

a) $\mathbb{L}_h = \left\{ \left(-2x_4 - 2x_5 \quad -3x_3 + x_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \right)^T, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$

b) Eine Basis von $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(\mathbb{L}_h) = 3$

c) $a \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$

d) Mit Vektoren des $\mathbb{R}^5$ lässt sich niemals ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ erzeugen.

Aufgabe 7.29:

a) $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_2 & x_2 & \frac{1}{2}x_2 & 0 \end{pmatrix}^T, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

b) Eine Basis von $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(\mathbb{L}_h) = 1$

c) Nein, da $\mathbb{L}_h \subseteq [\mathbb{A}]$ und $\dim([\mathbb{A}]) = 3 \neq \dim\left(\left[\mathbb{R}^4\right]\right) = 4$ ist.

Aufgabe 7.30:

a) Beispielsweise:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ & - & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

b) $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{11} + \frac{17}{11}x_5 & \frac{1}{11} - \frac{5}{11}x_5 & \frac{2}{11} + \frac{1}{11}x_5 & \frac{3}{11} - \frac{4}{11}x_5 & x_5 \end{pmatrix}^T, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$

c) Nein, da $\mathbb{L}_h$ nicht abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar und nicht abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition ist.

Aufgabe 7.31:

a) Die Vektoren in $\mathbb{B}$ sind l. a., somit kann $\mathbb{B}$ keine Basis eines Unterraums sein.

b) $\mathbb{B}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{L}_h$.

Aufgabe 7.32:

a) Keine Lösung für $a = 0$ und $b \neq 1$

Unendlich viele Lösungen für $a = 0$ und $b = 1$: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_2 \end{pmatrix}^T, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Genau eine Lösung für $a \neq 0$: $x = \begin{pmatrix} -ab & \frac{a+b-1+ab}{2a} \end{pmatrix}^T$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

c) Da $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist, ist $\mathbb{L}$ kein Unterraum des $\mathbb{R}^1$.

d) Falls entweder $a = 0 \wedge b = 1$ oder falls $a = 1 \wedge b = 0$ ist.

Aufgabe 7.33:

a) LGS 1: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid 0) = n$, das LGS ist eindeutig lösbar mit $\mathbb{L}_{h,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \right\}$.

LGS 2: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid 0) < n$, das LGS hat unendlich viele Lösungen:

$\mathbb{L}_{h,2} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 & x_2 & 0 \end{pmatrix}^T, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

b) Beide LGS sind homogen, die Lösungen der LGS sind somit Unterräume.

LGS 1: $\dim\left(\mathbb{L}_{h,1}\right) = 0$, einzige Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

LGS 2: $\dim\left(\mathbb{L}_{h,2}\right) = 1$, eine Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) i) Gesucht sind eine Basis und die Dimension von $\mathbb{U} = \mathbb{L}_{h,1} \cup \mathbb{L}_{h,2}$, falls $\mathbb{U}$ ein Unterraum ist. Da $\mathbb{L}_{h,1} \subset \mathbb{L}_{h,2}$, folgt $\mathbb{U} = \mathbb{L}_{h,2}$. $\mathbb{L}_{h,2}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ mit bekannter Basis und Dimension (siehe Teilaufgabe b)).

(Bei Interpretation der Fragestellung als "ausschließliches oder" entspricht der gesuchte Raum dem oben angegebenen Raum, jedoch ohne den Nullvektor. Da dann unter anderem die Abgeschlossenheitsanforderungen nicht erfüllt sind, handelt es sich nicht um einen Unterraum. Somit lässt sich keine Basis und keine Dimension angeben.)

ii) Gesucht sind nun eine Basis und die Dimension von $\mathbb{U} = \mathbb{L}_{h,1} \cap \mathbb{L}_{h,2}$, falls $\mathbb{U}$ ein Unterraum ist. Da $\mathbb{L}_{h,1} \subset \mathbb{L}_{h,2}$, folgt $\mathbb{U} = \mathbb{L}_{h,1}$. $\mathbb{L}_{h,1}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ mit bekannter Basis und Dimension (siehe Teilaufgabe b)).

Kapitel 8

Aufgabe 8.1:

a) EV: x_1 := Anzahl der hergestellten Güter G_1

x_2 := Anzahl der hergestellten Güter G_2

x_3 := Anzahl der hergestellten Güter G_3

ZF: $z = 38x_1 + 46x_2 + 42x_3 \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rcrcrcl} 40x_1 & + & 80x_2 & + & 60x_3 & \leq & 16.000 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & \leq & 2.200 \\ & & & & x_1 & \geq & 3x_2 \end{array}$$

NNB: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b) ZF: $z = 40x_1 + 80x_2 + 60x_3 \rightarrow \min$

NB:
$$\begin{array}{rcrcrcl} 38x_1 & + & 46x_2 & + & 42x_3 & \geq & 9.000 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & \leq & 2.200 \\ & & & & x_1 & \geq & 3x_2 \end{array}$$

EV und NNB ändern sich nicht.

Aufgabe 8.2:

a) EV: x_1 := Produktionsmenge Gut 1

x_2 := Produktionsmenge Gut 2

x_3 := Produktionsmenge Gut 3

ZF: $z = 45x_1 + 30x_2 + 25x_3 \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rcl} 40x_1 + 50x_2 + 30x_3 & \leq & 1.000 \\ x_1 & \leq & \tfrac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_2 & \leq & 10 \\ x_2 & \geq & 2x_1 \\ x_2 & \geq & 2x_3 \end{array}$$

NNB: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b) Neue Nebenbedingung: $x_3 \geq 30$.

Das LP hat keine zulässige Lösung mehr.

Aufgabe 8.3:

a) EV: m := Lernzeit für Mathematik in Tagen

w := Lernzeit für Wirtschaftsinformatik in Tagen

t := Lernzeit für Technik des betrieblichen Rechnungswesens in Tagen

p := Lernzeit für Produktionswirtschaft in Tagen

ZF: $z = p \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rcl} m + w + t + p & \leq & 18 \\ m + w + t & \leq & 2p \\ m \leq t & \leq & w \\ w & \geq & 4 \\ m & \geq & 3 \end{array}$$

NNB: $m, w, t, p \geq 0$

b) $m = 3,\ w = 4,\ t = 3,\ p = 8$ mit zugehörigem $z^{opt} = 8$

Aufgabe 8.4:

EV: f := Anzahl der Frauen, welche die Party betreten dürfen

m := Anzahl der Männer, welche die Party betreten dürfen

ZF: $z = 14f + 24m \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rcrcl} & & f & \leq & 800 \\ & & f & \leq & 650 \\ & & m & \leq & 1.000 \\ f & + & m & \leq & 1.400 \\ & & m & \leq & \frac{13}{7}f \end{array}$$

NNB: $f, m \geq 0$

Aufgabe 8.5:

EV: siehe Aufgabenstellung

ZF: $z = 0{,}19b + 0{,}4c + 0{,}3e + 0{,}75k + 0{,}06l + 0{,}08m + 1{,}3s + 0{,}2t \rightarrow \min$

NB:
$$\begin{array}{rcccccl} & & 4 & \leq & l & \leq & 6 \\ 0{,}4l & \leq & w & + & m & \leq & \frac{2}{3}l \\ & & & & 4b & \leq & l \\ & & 3 & \leq & t & \leq & 5 \\ & & & & e & \geq & 0{,}5 \\ & & & & c & \geq & e \\ & & & & s & \geq & 4e \\ & & & & k & \geq & 2{,}5 \end{array}$$

NNB: $b, c, e, k, l, m, s, t, w \geq 0$

Aufgabe 8.6:

EV: x_1 := Anzahl der gehaltenen Rinder

x_2 := Anzahl der gehaltenen Schafe

x_3 := Anzahl der gehaltenen Schweine

ZF: $z = (1.800 - 150)x_1 + (180 - 20)x_2 + (250 - 80)x_3 = 1.650x_1 + 160x_2 + 170x_3 \to \max$

NB:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 30x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & \le & 1.000 \\ 10x_1 & + & 15x_2 & + & 5x_3 & \le & 16 \cdot 60 \\ 5x_1 & + & 1{,}5x_2 & + & 2x_3 & \le & 200 \\ & & & & x_1 & \le & 20 \end{array}$$

NNB: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Aufgabe 8.7:

EV: k := Karottensaft-Anteil am Getränk

t := Traubensaft-Anteil am Getränk

h := Honig-Anteil am Getränk

p := Pfefferminzlikör-Anteil am Getränk

ZF: $z = 0{,}3k + 0{,}15t + 3h + 2p \to \min$

NB:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 0{,}05 & \le & h & \le & 0{,}1 & & & & \\ & & t & \ge & 2k & & & & \\ & & k & > & h & & & & \\ 0{,}01 & \le & p & \le & 0{,}05 & & & & \\ k & + & t & + & h & + & p & = & 1 \end{array}$$

NNB: $k, t, h, p \ge 0$

Aufgabe 8.8:

EV: z := Anzahl der Werbeseiten in Zeitungen
r := Anzahl der Werbespots im Radio [zu je 30 Sekunden]
f := Anzahl der Werbespots im Fernsehen [zu je 30 Sekunden]
l := Werbung auf Litfaßsäulen [in Litfaßsäulenwochen]

ZF: $z = 20.000z + 2.000r + 10.000f + 600l \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5.000z & + & 800r & + & 6.000f & + & 300l & \leq & 250.000 \\ & & & & & & z & \geq & 10 \\ & & & & & & l & \leq & 200 \\ & & & & & & f & \geq & r \\ & & & & & & 0{,}5f & \geq & 2z \end{array}$$

NNB: $z, r, f, l \geq 0$

Aufgabe 8.9:

EV: $x_{Öl}$:= Anteil der Ölkontrakte im Portfolio
x_{Ku} := Anteil der Kupferkontrakte im Portfolio
x_{Ni} := Anteil der Nickelkontrakte im Portfolio

ZF: $z = 0{,}04x_{Öl} + 0{,}05x_{Ku} + 0{,}06x_{Ni} \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_{Ku} & + & x_{Ni} & < & x_{Öl} \\ & & & & x_{Ku} & \geq & 0{,}1 \\ & & x_{Ni} & + & 0{,}05 & \geq & x_{Ku} \\ & & x_{Ku} & + & 0{,}05 & \geq & x_{Ni} \\ x_{Öl} & , & x_{Ku} & , & x_{Ni} & \leq & 0{,}6 \\ x_{Öl} & + & x_{Ku} & + & x_{Ni} & = & 1 \end{array}$$

NNB: $x_{Öl}, x_{Ku}, x_{Ni} \geq 0$

Aufgabe 8.10:

EV: x_A := Menge Sorte A in kg

x_B := Menge Sorte A in kg

ZF: $z = 5x_A + 8x_B \to \min$

NB:
$$\begin{array}{rcrcl} 2x_A & + & x_B & \geq & 8 \\ 3x_A & + & 4x_B & \geq & 14 \\ x_A & + & 5x_B & \geq & 6 \\ & & x_A & \leq & \tfrac{2}{3}\cdot(x_A + x_B) \\ & & x_B & \leq & \tfrac{2}{3}\cdot(x_A + x_B) \end{array}$$

NNB: $x_A, x_B \geq 0$

Aufgabe 8.11:

EV: h := Schlaf pro Nacht zu Hause in Stunden

v := Anzahl der besuchten Vorlesungsblöcke pro Woche

t := Anzahl der besuchten Tutoriumsblöcke pro Woche

m := Bei Maike verbrachte Zeit pro Woche in Stunden

ZF:
$$\begin{aligned} z &= 7h + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}v + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{2}t + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}m \\ &= 7h + \tfrac{3}{16}v + \tfrac{27}{16}t + \tfrac{1}{9}m \to \max \end{aligned}$$

NB:
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 5 & \leq & h & \leq & 14 \\ & & & & 5 & \leq & v & \leq & 12 \\ & & & & & & t & \geq & 1 \\ & & & & & & v & \geq & t \\ & & & & 2v & + & 2t & \geq & 20 \\ & & & & & & m & \leq & 30 \\ & & & & \tfrac{3}{2}v & + & \tfrac{3}{2}t & < & m \\ 7h & + & \tfrac{3}{2}v & + & \tfrac{3}{2}t & + & m & \leq & (24-3)\cdot 7 - 19 \end{array}$$

NNB: $h, v, t, m \geq 0$

Aufgabe 8.12:

EV: x_1 := Produktionsmenge P_1 auf Maschine 1

x_2 := Produktionsmenge P_1 auf Maschine 2

x_3 := Produktionsmenge P_2

x_4 := Produktionsmenge P_3

ZF: $z = 10(x_1 + x_2) + 20x_3 + 15x_4 \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_3 & \leq & 1.000 \\ 4x_2 & + & 4x_4 & \leq & 2.000 \\ & & x_1 & \geq & \tfrac{2}{3} \cdot (x_1 + x_2) \\ & & x_4 & \leq & \tfrac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{array}$$

NNB: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Aufgabe 8.13:

$$z = x_1 + 5x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & \leq & 5 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & - & 3x_2 & - & 2x_3 & \leq & -2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Umformung zum Standardmaximierungsproblem ist nicht möglich.

Aufgabe 8.14:

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 5x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ -3x_1 & - & 4x_2 & & & \leq & 4 \\ & & & & 2x_3 & \leq & 8 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Umformung zum Standardmaximierungsproblem ist möglich.

Aufgabe 8.15:

Nein, da es sich nicht um eine konvexe Menge handelt.

Aufgabe 8.16:

Die graphische Lösung führt zu: $x^{opt} = (4 \quad 7)^T$, $z^{opt} = 39$

Aufgabe 8.17:

Die graphische Lösung führt zu: $x^{opt} = (2 \quad 4)^T$, $z^{opt} = -4$

Aufgabe 8.18:

Die graphische Lösung führt zu: $x^{opt} = (4 \quad 1{,}5)^T$, $z^{opt} = 6{,}25$

Aufgabe 8.19:

a) D

b) $B, C, \overline{BC}$

c) $A, D, E, \overline{AE}, \overline{ED}$

d) $A, B, \overline{AB}$

Aufgabe 8.20:

$$x^{opt} = \left(\tfrac{9}{4} \quad \tfrac{1}{2}\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 0\right)^T,\ z^{opt} = 8{,}75,\ y^{opt} = \left(\tfrac{5}{4} \quad \tfrac{1}{4}\right)^T$$

Aufgabe 8.21:

$$x^{opt} = \left(8 \quad 4\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 0\right)^T,\ z^{opt} = 68,\ y^{opt} = \left(1{,}3 \quad 0{,}8\right)^T$$

Aufgabe 8.22:

$$x^{opt} = \left(14 \quad 9\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 0 \quad 10\right)^T,\ z^{opt} = 87,\ y^{opt} = \left(0{,}9 \quad 0{,}7 \quad 0\right)^T$$

Somit sind die Kapazitäten 1 und 2 voll ausgelastet.

Aufgabe 8.23:

$$x^{opt} = \left(41{,}5 \quad 18\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 0 \quad 292\right)^T,\ z^{opt} = 1.154,\ y^{opt} = \left(\tfrac{3}{10} \quad \tfrac{47}{40} \quad 0\right)^T$$

Aufgabe 8.24:

$$x^{opt} = \left(\tfrac{10}{3} \quad 0 \quad \tfrac{70}{3}\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 0\right)^T,\ z^{opt} = 110,\ y^{opt} = \left(2 \quad 1\right)^T$$

Aufgabe 8.25:

$$x^{opt} = \left(12{,}5 \quad 25 \quad 0\right)^T,\ z^{opt} = 87{,}5,\ y^{opt} = \left(\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{5}{8}\right)^T$$

Aufgabe 8.26:

$$x^{opt} = \left(0 \quad 20 \quad 10\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 0\right)^T,\ z^{opt} = 90,\ y^{opt} = \left(1{,}75 \quad 0{,}25\right)^T$$

Aufgabe 8.27:

$$x^{opt}=\begin{pmatrix}30 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\ s^{opt}=\begin{pmatrix}10 & 0\end{pmatrix}^T,\ z^{opt}=90$$

Aufgabe 8.28:

$$x^{opt}=(2{,}5\quad 10\quad 0)^T,\ s^{opt}=(0\quad 15\quad 0)^T,\ z^{opt}=35,\ y^{opt}=(1{,}5\quad 0\quad 0{,}5)^T$$

Aufgabe 8.29:

$$x^{opt}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 12\end{pmatrix}^T,\ s^{opt}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T,\ z^{opt}=30,\ y^{opt}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 8.30:

$$x^{opt}=\begin{pmatrix}24 & 0 & 2\end{pmatrix}^T,\ s^{opt}=\begin{pmatrix}16 & 0 & 0\end{pmatrix}^T,\ z^{opt}=108,\ y^{opt}=\begin{pmatrix}0 & 2/5 & 6/5\end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 8.31:

$$x^{opt}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 6{,}25\end{pmatrix}^T,\ s^{opt}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 6{,}25\end{pmatrix}^T,\ z^{opt}=46{,}25,\ y^{opt}=\begin{pmatrix}3/8 & 7/4 & 0\end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 8.32:

$$x^{opt}=\begin{pmatrix}12 & 12 & 0\end{pmatrix}^T,\ s^{opt}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 0\end{pmatrix}^T,\ z^{opt}=108,\ y^{opt}=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0 & 1{,}1\end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 8.33:

$$x^{opt}=\begin{pmatrix}17 & 6 & 0\end{pmatrix}^T,\ s^{opt}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 26\end{pmatrix}^T,\ z^{opt}=86,\ y^{opt}=\begin{pmatrix}1{,}8 & 0{,}4 & 0\end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 8.34:

$$x^{opt} = (8 \quad 4 \quad 3)^T,\ s^{opt} = (0 \quad 0 \quad 0)^T,\ z^{opt} = 49,\ y^{opt} = (0{,}6 \quad 0{,}3 \quad 0{,}8)^T$$

Aufgabe 8.35:

$$x^{opt} = \left(0 \quad 20/3 \quad 20/3\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 40 \quad 40/3 \quad 0\right)^T,\ z^{opt} = 200/3,\ y^{opt} = \left(5/9 \quad 0 \quad 0 \quad 5/3\right)^T$$

Aufgabe 8.36:

$$x^{opt} = \left(53/5 \quad 31/5 \quad 41/5\right)^T,\ s^{opt} = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 37/5\right)^T,\ z^{opt} = 85,\ y^{opt} = \left(0 \quad 1 \quad 1/2 \quad 0\right)^T$$

Aufgabe 8.37:

Das Problem weist unendlich viele Lösungen bei begrenztem Zielfunktionswert auf. Die Lösungsmenge lässt sich darstellen als $\mathbb{L} = \left\{ \left(x_1 \quad 10/3 - 2/3\, x_1\right)^T, x_1 \in [0{,}5;4] \right\}$ mit $z^{opt} = 10$.

Aufgabe 8.38:

Eine optimale Lösung kann nicht bestimmt werden, da das Problem unendlich viele Lösungen bei unbegrenztem Zielfunktionswert aufweist.

Aufgabe 8.39:

$$x^{opt} = (1 \quad 3)^T,\ s^{opt} = (0 \quad 0 \quad 8)^T,\ y^{opt} = (0{,}2 \quad 3{,}2 \quad 0)^T,\ z^{opt} = 10$$

Aufgabe 8.40:

$$x^{opt} = (1 \quad 4{,}5)^T,\ s^{opt} = (3 \quad 0 \quad 0)^T,\ y^{opt} = (0 \quad 2{,}75 \quad 0{,}25)^T,\ z^{opt} = 24{,}5$$

Aufgabe 8.41:

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^T,\; s^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}^T,\; y^{opt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,\; z^{opt} = 12$$

Aufgabe 8.42:

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T,\; s^{opt} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}^T,\; y^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T,\; z^{opt} = 4$$

Aufgabe 8.43:

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T,\; s^{opt} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,\; y^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}^T,\; z^{opt} = 9$$

Aufgabe 8.44:

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T,\; s^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T,\; y^{opt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,\; z^{opt} = 40$$

Aufgabe 8.45:

a) $p \in [1;3]$

b) $x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}^T,\; s^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^T,\; z^{opt} = 46,\; y^{opt} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}^T$

c) $x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{61}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T,\; s^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T,\; z^{opt} = 44\frac{2}{3},\; y^{opt} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}^T$

Veränderung: $\Delta x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}^T,\; \Delta s^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T,\; \Delta z^{opt} = -\frac{4}{3}$

Aufgabe 8.46:

a) Es kann kein Anfangstableau sein, da eine Zielvariable in der Basis steht. Ein Endtableau kann es nicht sein, da die Zielzeile nicht vollständig ≥ 0 ist.

b) $z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 120 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 100 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 90 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

c) $x^{opt} = (42 \quad 16 \quad 0 \quad 0)^T,\ s^{opt} = (20 \quad 0 \quad 0)^T,\ z^{opt} = 132,\ y^{opt} = (0 \quad 3/5 \quad 4/5)^T$

Aufgabe 8.47:

a) Alle Werte in der Zielzeile sind ≥ 0.

b) Die Basis enthält die Variablen der pivotisierten Spalten, also x_2, s_2 und x_1.

$x^{opt} = (20 \quad 20 \quad 0)^T,\ s^{opt} = (0 \quad 40 \quad 0)^T$

c)

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	1	1	1	1	0	0	40
s_2	0	2	2	0	1	0	80
s_3	1	0	1	0	0	1	20
Z	–4	–3	–4	0	0	0	0

d) $z = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$

e) Kapazitätsbedarf: $b - s^{opt} = (40 \quad 40 \quad 20)^T$

Aufgabe 8.48:

a) $x^{opt} = (20 \quad 0 \quad 5)^T,\ s^{opt} = (0 \quad 0 \quad 5)^T,\ z^{opt} = 35,\ y^{opt} = (1/2 \quad 1/4 \quad 0)^T$

b) Die Restriktion ist bei der Produktion x^{opt} aus a) nicht bindend, die optimale Lösung ändert sich somit nicht.

c) $x^{opt} = (22 \quad 0 \quad 4)^T,\ s^{opt} = (2 \quad 0 \quad 4 \quad 0)^T,\ z^{opt} = 34,\ y^{opt} = (0 \quad 1/2 \quad 0 \quad 1/5)^T$

Aufgabe 8.49:

a) Das Simplex-Tableau hat 4 Zeilen und 7 Spalten.

b) Es können 9 Werte nicht näher bestimmt werden.

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	?	0	?	$5/2$
x_2	0	1	?	0	?	5
s_2	0	0	?	1	?	$5/2$
Z	0	0	?	0	?	?

c) ZF: $z = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

NB:
$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 20 \end{array}$$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

$z^{opt} = 55/2$

Aufgabe 8.50:

a)
$$\begin{array}{rcrcll} 0{,}5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 32 & \text{(I)} \\ 0{,}75x_1 & + & 1{,}5x_2 & \leq & 27 & \text{(II)} \\ 1{,}5x_1 & + & x_2 & \leq & 30 & \text{(III)} \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 57 & \text{(IV)} \end{array}$$

b) $x^{opt} = \begin{pmatrix}18 & 3\end{pmatrix}^T$, $s^{opt} = \begin{pmatrix}17 & 9 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$, $z^{opt} = 120$, $y^{opt} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}^T$

c) Bei veränderter ZF ergibt sich: $x^{opt} = \begin{pmatrix}12 & 12\end{pmatrix}^T$, $s^{opt} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 9\end{pmatrix}^T$, $z^{opt} = 84$

Die Vermietung der freien Kapazitäten in der neuen Region erbringt 38 €, was zu einem Gesamterlös von 122 € führt. Die beste Möglichkeit ist jedoch umzusiedeln, nichts zu produzieren und alle Kapazitäten zu vermieten. Dies erbringt 404 €.

Aufgabe 8.51:

$$a = 3,\ b = 20,\ c = 10$$

Aufgabe 8.52:

Anlagenbauerin Brigitte sollte Maschine 3 auf 7 oder 8 Einheiten ausbauen. Sie erhält dafür 4.900 € bzw. 6.400 €. Das optimale Produktionsprogramm lautet dann $x^{opt} = \begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}^T$ bzw. $x^{opt} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$, der Unternehmensgewinn liegt bei 35.500 € - 4.900 € bzw. 37.000 € - 6.400 € = 30.600 €.

Stichwortverzeichnis

B

Basis 150

C

Cramer-Regel 54

D

Determinante 42
Determinantenkriterium 54
Diagonalmatrix 2
Dimension 150
Dreiecksmatrix 3

E

Einheitsmatrix 2
Elementare Zeilenumformung 10
Erweiterte Koeffizientenmatrix 8
Erzeugendensystem 149
EZS *siehe* Erzeugendensystem
EZU *siehe* Elementare Zeilenumformung

F

Freie Variable 123

G

Gauß/Jordan-Algorithmus 9
Gauß-Algorithmus 9
Gebundene Variable 123

H

Hauptdiagonale 1
Hauptkostenstelle 25
Hauptminoren 47
Hawkins-Simon-Bedingung 102
Hilfskostenstelle 25

I

Idempotenz 54
Innerbetriebliche Materialverflechtung 75
Inverse 48

K

Koeffizientenmatrix 8
Kofaktor 47
Kofaktormatrix 47

L

Leontief-Modell 97
LGS *siehe* Lineares Gleichungssystem
LhGS *siehe* Linear homogenes Gleichungssystem
Linear homogenes Gleichungssystem 9
Lineare Abhängigkeit 118
Lineare Optimierung 169
Lineare Unabhängigkeit 118
Lineares Gleichungssystem 8

C. Mayer, *Lineare Algebra für Wirtschaftswissenschaftler,*
DOI 10.1007/978-3-8349-6727-5, © Gabler Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lineares Programm 169
Linearkombination 117

M

Matrix 1
- Diagonal- 2
- Dreiecks- 3
- Einheits- 2
- Null- 2
- Quadratische 2
- Streichungs- 41
- Treppen- 3

Matrixaddition 4
Matrixgleichungen 53
Matrixinversion 49
Matrixmultiplikation 5
Matrixoperationen 4
Matrixrelationen 7
Minimales EZS 150
Minoren 47

N

Nullmatrix 2
Nullvektor 3

O

Ordnung 1

P

Pivotelement 11
Pivotisierung 11
Primärkosten 25
Produktionsmatrix 75, 97

Q

Quadratische Matrix 2

R

Rang 119
Rangkriterium 121
Redundante Gleichung 124
Regulär 48

S

Sarrus-Regel 44
Schlupfvariable 179
Sekundärkosten 25
Sensitivitätsanalyse 191
Simon-Hawkins-Bedingung 102
Simplex 172
Simplexalgorithmus
- dualer 191
- primaler 178

Singulär 48
Skalar 4
Spaltenvektor 3
Standardmaximierungsproblem 178
Streichungsmatrix 41
Sukzessive Hauptminoren 47

T

Technologiematrix 99
Transposition 4
Treppenmatrix 3

U

Unterraum 148

V

Vektor 145
  Null- 3
  Spalten- 3
  Zeilen- 3
Vektorraum 145

Z

Zeilenvektor 3