Exkurs: Wege zur algebraischen Syntax

Even when symbols are used, and the solution they yield is recognized, it would be desirable that students appreciate the ‚power of symbols': only with the use of symbols can a conjecture of an argument be conclusively accepted or dismissed.
(Arcavi 1994, S. 25)

Algebraische Ausdrücke in durch Konventionen vorgegebener Syntax sind als komprimierte Schreibweisen der gemachten Entdeckungen für die weitere mathematische Diskussion der erkannten Regeln, Muster und Strukturen *im Sekundarbereich* wesentlich. Auch hier ist es selbstverständlich, dass nicht die Symbolsprache an sich einen Wert hat, sondern die bewusste und verstehende Nutzung dieser ‚neuen' Sprache. Ist es ein unterrichtliches Anliegen, zunehmend auch symbolische Schreibweisen zu etablieren, so ist der Weg zur Syntax nicht ganz einfach.

Die folgenden zwei Ansätze, die auf internationale Forschungen zurückgehen, haben einen jeweils ganz spezifischen Fokus auf die Förderung von Notationskompetenzen. Der zweite Ansatz wird aktuell auch in deutschen Forschungen aufgegriffen. Es geht jeweils um die *Entwicklung der Sprache der Symbole*, die eine eigene Syntax mit sich bringt.

Selbstverständlich ist die Entwicklung algebraischen Denkens auch ganz unabhängig von der Entwicklung dieser Symbolsprache möglich. Muster zu erkennen, Gleichungen und Terme zu gestalten und zu deuten, funktionale Beziehungen aufzudecken gelingt, wie in den vorangegangenen Kapitel aufgezeigt, auch ohne die Ausbildung der algebraischen Symbolsprache. Wird die algebraische Sprache als Symbolsprache jedoch beherrscht, so kann, in Bezug auf Mason, festgehalten werden: „Algebraic symbolism, according to Mason [1996], is the language that gives voice to this thinking, the language that expresses the generality" (Zazkis und Liljedahl 2002, S. 399).

A. S. Steinweg, *Algebra in der Grundschule,*
DOI 10.1007/978-3-8274-2738-0, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Sollen Kinder eigenständig *Zeichen für Variable erfinden* (Specht 2009, S. 181 ff.), so verwundert es nicht, dass sie alle Formen von ‚Zeichen', die ihnen aus anderen Zusammenhängen bekannt sind, nutzen. Dazu gehören konkrete Zeichnungen (gegenständlich) wie auch geometrische Zeichen (Dreiecke, Kreise etc.) Wie in etlichen anderen Bereichen der Mathematik, können die Konventionen der Nutzung von Buchstabenvariablen nicht von den Lernenden weitgehend selbstständig entdeckt werden, sondern müssen, sofern denn als Ziel gewollt, unterrichtlich eingeführt werden.

Didaktische Ideen zur gezielten Ausbildung und einer Einführung einer algebraischen Syntax, die in diesem Exkurs dargestellt werden, sind im deutschsprachigen Raum erst bei der direkten Einführung in die Algebra in den Jahrgangsstufen 7 oder 8 laut Lehrplänen relevant. Die folgenden Ansätze verorten sich selbst jedoch gezielt nicht erst in der mittleren Sekundarstufe, sondern versuchen Wege aufzuzeigen, wie eine Hinführung zur algebraischen Syntax bereits ab dem Grundschulbereich denkbar werden könnte.

In den beiden hier im Folgenden vorgestellten Ansätzen wird also jeweils ein Weg vorgeschlagen, die algebraische Grammatik der Notation von Termen und Gleichungen für junge Lernende verständlich zu machen. Dabei wird in einem Ansatz ein Weg zur Syntax gezielt über arithmetische Aktivitäten gesucht, während im anderen die Ebene der Zahlen und Arithmetik gezielt ausgeschlossen wird.

A Von Multiplikationstafeln zur algebraischen Symbolsprache – ‚Grid'-Algebra

Der erste Ansatz geht auf Hewitt (2007, 2009 und 2012) zurück und nennt sich Grid-Algebra. Hewitt (2009) unterscheidet zwischen der *Entwicklung algebraischen Denkens* und der Hinführung zur Syntax. Algebraisches Denken steht für ihn im engen Zusammenhang zu Beschreibung und Begründung von Mustern, die erkannt werden und deren Regeln man formuliert (Kapitel 2).

Der hier thematisierte Ansatz zielt also auch in seiner Ansicht nicht auf Aktivitäten, die algebraische Denkentwicklung fördern, sondern auf eine mögliche Hinführung zur algebraischen Syntax, d. h. zu den Konventionen, die einer korrekten Notation von Termen und Gleichungen zu Grunde liegen: „The difference between finding rules and expressing those rules in formal notation highlights a difference I see between these two aspects of mathematics. Spotting patterns and finding rules is algebraic in nature whereas how to express those rules is a matter of language and notation" (Hewitt 2009, S. 43).

Hewitt unterscheidet in seinen Forschungen zur frühen Algebra das *Notwendige* (necessary) vom *Willkürlichen* (arbitrary). Das *Notwendige* ergibt sich aus mathematischen Operationsregeln und Eigenschaften der Operationen (Kapitel 4), d. h., es ist jeweils notwendige Konsequenz aus der Berechnung algebraischer Terme oder Gleichungen:

„For example, it is necessary that 3 (x + 4) gives the same numerical result as 3x + 12 no matter what value x takes; it is necessary that if $\frac{4(k+1)}{2} - 6 = 34$ and k is a real number then k must equal 19. This is the case no matter if I choose to write this in words, formal notation, or some other way" (Hewitt 2012, S. 142).

Die mathematische *Symbolsprache* wird von ihm folgerichtig als das *Willkürliche* identifiziert, da sie sich nicht zwingend erforderlich aus mathematischen Berechnungen ergibt, sondern sich im Laufe der Geschichte als Konvention herausgebildet hat.

In seinem Ansatz der Grid-Algebra (Hewitt 2007) bietet er keinen neuen Ansatz zur Hinführung zum algebraischen Denken, sondern widmet sich dem didaktischen Problem der Motivation und Hinführung zu algebraischen Notationsregeln, die er als das Willkürlichen beschreibt. Die algebraische Syntax entzieht sich, wie oben beschrieben, der natürlichen Entdeckung auf eigenen Wegen. Somit werden die Lehrenden vor das didaktische Problem gestellt, wie eine Hinführung zu den ‚willkürlichen' Regeln gelingen kann: „For students to learn the arbitrary they need to be informed of these socially agreed names and conventions, whereas students can come to know the *necessary* through their own mathematical activity" (Hewitt 2009, S. 43).

·	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	...
4	4	8	12	...	
5	5	10	...		

Abbildung E.1 Multiplikationstafel

Die Software Grid-Algebra (Hewitt 2007) ist als didaktische Idee einer *möglichen* Einführung der algebraischen Syntax zu verstehen. ‚Grid' als Bezeichnung eines Gitters ist die in englischsprachigen Klassenzimmern übliche Kurzform, die sich mit Multiplikationstafel (Abb. E.1) übersetzen ließe. Die Multiplikationstafel dient als ‚Lernumgebung', in der gewisse ‚Bewegungen' gemacht werden, die damit auch additive Verknüpfungen einschließen.

In der Software zeigt der Bildschirm einen bestimmten *Ausschnitt* einer solchen Multiplikationstafel. Der Ausschnitt kann gezielt ausgewählt und durch eine Scroll-Funktion variiert werden kann. Eine zusätzliche linke Spalte indiziert die gewählten Multiplikationsreihen, die durch das Scrollen ausgewählt wurden. Es besteht die Option, alle Felder (Produkte) ausfüllen zu lassen, alle Felder leer zu setzen oder gezielt nur Felder auszufüllen, die betrachtet werden sollen.

Der Ansatz der Grid-Algebra besteht nun darin, dass von den Lernenden zunächst *eine Zelle* mit der entsprechenden Zahl besetzt wird. Dabei wählen allerdings die Kinder nur, dass die Zahl gezeigt werden soll, indem sie auf die *Zahlenbox* und dann auf ein ausgesuchtes Feld klicken. Die Software führt die Produktberechnung aus und füllt die ausgewählte Zelle mit der passenden Zahl. Nun kann und soll mit dieser Zahl operiert werden, d. h., sie wird in der Computerumgebung *durch Drag und Drop mit der Maus in eine andere Zelle ‚verschoben'*. Der Clou der Software ist dabei, dass nun nicht die neue Zahl in der Zelle erscheint, sondern der entsprechende Term (ohne Ergebniszahl), der diese Handlung in algebraischer Sprache symbolisiert.

Eine Verschiebung nach rechts wird also als Addition, nach links als Subtraktion, nach unten als Multiplikation und nach oben als Division (Bruchschreibweise) wiedergegeben. Je nachdem, in welcher Zeile oder Spalte des Grids, d. h. der Multiplikationstafel, man sich befindet, wird dabei die Handlung entsprechend von der Software verarbeitet und symbolisiert.

Zwei Schritte nach rechts in der Zeile der Vielfachen von 1 ergibt eine Erhöhung um 2 (+ 2), während die gleichen zwei Schritte in der Zeile der Vielfachen von 5 korrekter Weise eine Erhöhung um 10 (+ 10) bedeuten würde und vom System auch entsprechend angezeigt wird.

Wird nun wiederum diese neue Zelle, die jetzt bereits einen Term und nicht mehr nur eine Zahl enthält, weiteren Handlungen unterworfen, so verändert sich der Term fortwährend; immer entsprechend der Handlungen (Abb. E.2).

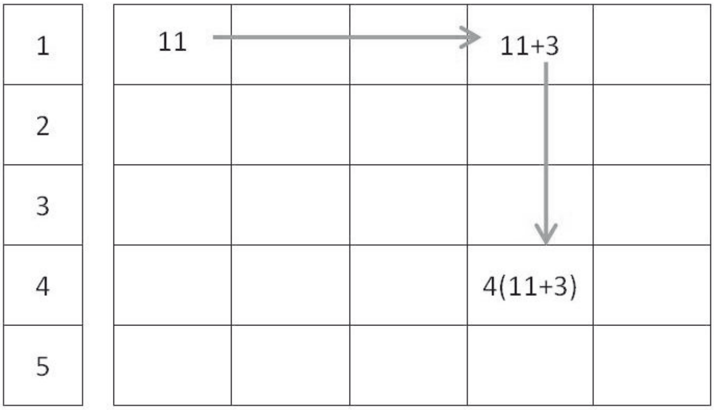

Abbildung E.2 Handlungen als Zahlen-Terme in der Grid-Algebra Umgebung

In den Praxiserprobungen stellt Hewitt (2009) fest, dass die Notationsformen der Addition und Subtraktion für die Lernenden keinerlei Probleme verursachten. Die Idee, statt der Summe oder der Differenz als Zahl, nun einen Term zu betrachten, bot Anlass, den Term als Objekt von Handlungen anzunehmen. Allein die Notation der Division in der Bruchschreibweise war für die Lernenden neu und musste thematisiert werden (vgl. Hewitt 2009, S. 45).

Die Grid-Algebra bietet alle oben dargestellten Ideen auch für Buchstabenvariablen an. Dabei wird im ersten Schritt der Belegung einer Zelle nicht die Zahlenbox, sondern die *Buchstabenbox* gewählt (Abb. E.3).

Alle weiteren Schritte entsprechen exakt den bereits möglichen Handlungen. Die Terme, die nun entstehen, sind folglich nun Terme mit Buchstabenvariablen, d. h., eine Drag-und-drop-Bewegung einer Variablen b z. B. aus der Reihe der Vielfachen von 4 um zwei Schritte nach oben in die Reihe der Vielfachen von 2 führt zur Halbierung des Werts und somit zum Term $\frac{b}{2}$.

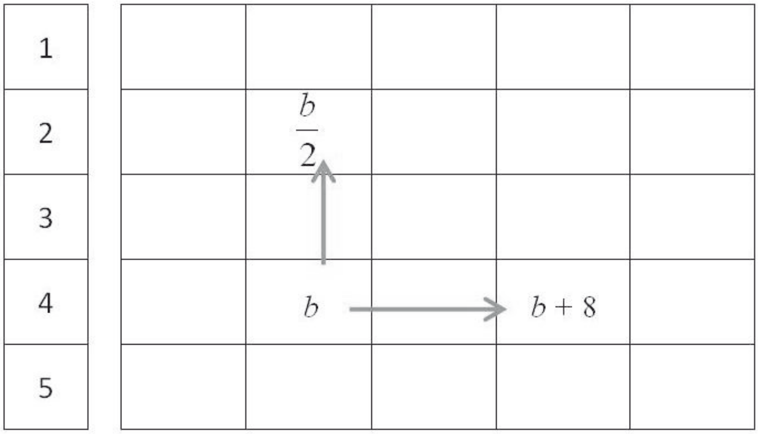

Abbildung E.3 Handlungen als Variablen-Terme in der Grid-Algebra Umgebung

Nachdem etliche Erfahrungen mit der Computer-Lernumgebung gesammelt werden konnten, ist es auch möglich – so berichtet Hewitt (2012) über Erfahrungen mit 9- bis 10-jährigen Kindern –, den Computer zunächst zu verlassen. Ein Term wird also in einer üblichen Unterrichtsdiskussion oder Einzelarbeit daraufhin untersucht, welche Operationshandlungen sich in ihm verbergen und wie diese Bewegung auf der Multiplikationstafel aussehen würden. Dabei ist auch die *Reihenfolge der Schritte* von Bedeutung, die sich in den Termen widerspiegelt. Es besteht in dieser Hinsicht z. B. ein wesentlicher Unterschied zwischen den Termen $3(10 + 4)$ und $3 \cdot 10 + 4$, der durch die Software-Erfahrungen der Lernenden als unterschiedliche Reihenfolge der Bewegungen identifiziert werden kann.

Durch die Erfahrungen mit der Computer-Lernumgebung, so die Forschungsergebnisse dieses Ansatzes, können die Lernenden zunehmend die ansonsten eher willkürlich erscheinenden Regeln der algebraischen Symbolsprache akzeptieren und auch verstehen lernen. „Overall, Year 5 students [9- bis 10-Jährige] were able to gain a success of around 70 % with questions on solving linear equations after only three lessons from a starting point of never having been introduced to letters nor having met formal notation. More significantly, they were confident with reading, writing and working with formal algebraic notation including letters" (Hewitt 2012, S. 156).

Einen weiteren Vorteil des Computereinsatzes sieht Hewitt in der Feedback-Funktion, die nicht mehr durch die Lehrkraft als wissende Instanz gegeben werden muss, sondern neutral durch die Software gegeben wird. Der Abgleich der Interpretationen eines (komplexen) Terms durch das Nachvollziehen der erdachten Bewegungen in der Computerumgebung, bietet ein Feedback durch die Software. „They could observe whether the notation produced through their movements looked the same as that which appeared in the expression they were trying to re-create. This feedback was in one sense neutral as it simply reflected back the notational consequence of the movements taken. It did not make value judgments on whether the movements were correct or not. Yet the feedback enabled students to correct themselves when they went wrong and be confident when they were right" (Hewitt 2012, S. 157).

B Von Größenvergleichen zur algebraischen Symbolsprache – ‚Measure Up'-Algebra

Im Gegensatz zum oben beschriebenen Ansatz beziehen sich die im Folgenden beschriebenen Aktivitäten nicht wie bei Hewitt allein auf den Schritt der Entwicklung einer Symbolsprache, sondern verstehen sich selbst als radikal anderer Gesamtansatz der Förderung algebraischen Denkens vom ersten Schuljahr an (‚direkte' Perspektive vgl. Abschnitt 1.3).

Der Ansatz ist keineswegs neu, dennoch wird er in verschiedenen Jahrzehnten immer wieder neu ‚entdeckt' und in den Mittelpunkt von Forschungen (Dougherty 2008 oder Gerhard 2011) gestellt. Um diese aktuelleren Forschungen kritisch einordnen zu können, sind ein Blick in die Geschichte der aus Russland stammenden Idee sowie auf bereits vor vielen Jahren gemachte, dezidiert ablehnende Stellungnahmen zum Gesamtansatz wichtig.

Tatsächlich fußt er auf didaktischen Vorschlägen Davidovs aus den späten 1960er und frühen 1970er Jahren. Dabei werden Größen in den Vordergrund der Auseinandersetzung gestellt, die in ihren Beziehungen (Gleichheit, Ungleichheit, Ordnungsrelation) miteinander verglichen werden. Das grundsätzlich neue Vorgehen beschreibt Otte (1976) in seiner kritischen Auseinandersetzung wie folgt:

(1) Arbeit mit realen Objekten, die in Größenparametern verglichen werden.
(2) Beziehung der Größen als Längen repräsentieren (z. B. kleineres Volumen als kurze Strecke und größeres Volumen als längere Strecke).
(3) Darstellung der Größen als Buchstaben $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Diese Vorschläge waren auch maßgeblich für in russischer Sprache erschienene Schulbücher aus den 1990er Jahren. Im Schulbuch des ersten Schuljahres (Davidov et al. 1997) ist festzuhalten, dass die Ziffern und Zahlen erst ab der Seite 82 eingeführt werden und zuvor alle Aktivitäten Größen als Strecken oder Buchstaben und deren Beziehungen thematisieren.

In der Schulbuchaufgabe an Kinder eines ersten Schuljahres (Abb. E.4) werden die Objekte in ikonischer Form sowie die Größen als Längen repräsentiert. In Bezug auf den Durchmesser des Kreises bzw. die Seitenlänge des Quadrats kann Gleichheit festgestellt werden, die durch die Streckenlängen links dargestellt ist. Bezüglich der Größe des Flächeninhalts sind beide Objekte ungleich, wie die Streckenlängen rechts.

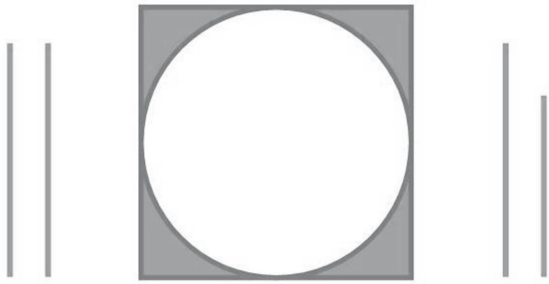

Abbildung E.4 Aufgabe zum Größenvergleich von Quadrat und Kreis in einem Schulbuch für die erste Klasse (in Anlehnung an Davidov et al. 1997, S. 14)

In den Aktivitäten sind Bezüge zu den Teil-Ganzes-Beziehungen (Abschnitt 3.6.1) aufzuzeigen. Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass diese Beziehungen nicht in Zahlen übersetzt werden. Die Teil-Ganzes-Beziehungen stehen in den Unterrichtsprogrammen von Davidov nach Freudenthal (1974, S. 396) sogar im Vordergrund. Die Teile und das Ganze werden wiederum durch Strecken symbolisiert und mit Buchstaben benannt. Konkrete Zahlwerte werden erst sehr spät oder gar nicht genutzt.

Der Ansatz von Davidov wird seit Beginn der 2000er Jahre im Projekt ‚Measure Up' aktuell erprobt und fortgesetzt (vgl. Dougherty und Vanenciano 2007, Dougherty 2008). Dabei folgt Dougherty den oben skizzierten Schritten des Vergleichs von Größen ohne nummerische Interpretationen. Ganz in der russischen Tradition nutzt das Projekt ‚Measure Up' dabei reale Objekte, Diagramme (Strecken) und symbolische Repräsentationen bei Messversuchen, die allen Aktivitäten des Projekts unterliegen: „The combination of physical, diagrammatic, and symbolic representations in a measurement context that underlies all of the mathematics appears, in an early analysis in MU [Measure Up], to have strong influence on children's abilities to deal with more complex mathematics at an earlier stage" (Dougherty 2008, S. 411).

Die Einführung von Buchstabenvariablen ergibt sich für Dougherty aus dem Bedürfnis heraus, sich über die an realen Objekten gemachten Erfahrungen des Vergleichs auszutauschen (Dougherty und Vanenciano 2007, S. 452). Erst zu späteren Zeitpunkten werden auch Erfahrungen zu numerischen Beziehungen (7 = 3 + 4) im Projekt benutzt. Numerische Probleme werden von der Projektleiterin als je spezifische Beispiele angesehen, hingegen die Vergleiche von

Größen als unspezifisch und damit hilfreich, generalisierende Argumente und Denkweisen zu unterstützen. Die Erfahrung mit den allgemeinen Beispielen fördert, so die Annahme, dann die Aktivitäten mit Zahlen: „Beginning with general quantities in an algebra context enhances children's abilities to apply those concepts to specific examples that use numbers" (Dougherty und Slovin 2004, S. 296).

Es kann kritisch hinterfragt werden, ob die Kinder des Projekts selbst bei unspezifischen Angaben von Größen diese auch jeweils unspezifisch in der inneren Vorstellung abbilden. Die Bindung an Längen, Flächen und Volumina etc. könnte durch die Möglichkeit konkreter Realrepräsentationen gerade dazu verführen, an sehr spezifische Größen zu denken. Diese Problematik wird derzeit nicht in den entsprechenden Forschungsprojekten thematisiert.

Auch das Projekt ‚Measure Up' bezieht sich nach eigenen Angaben auf Sfards Überlegungen zum ‚Verdinglichungs-Prozess' in der Algebra (Kapitel 7), die in Phasen der Verinnerlichung, Kondensation und Verdinglichung verläuft (vgl. Dougherty und Slovin 2004). Diese Phasen werden insbesondere zur Analyse von Kinderlösungen genutzt, die unterschiedlich z. B. die Teil-Ganzes-Beziehungen einer Textaufgabe in Streckenzeichnungen wiedergeben.

Eine typische Textaufgabe dieses Ansatzes lautet:

Anna hat *k* Fische und Chris *e* Fische weniger gefangen.
Wie viele Fische hat Chris gefangen?

Nach Dougherty und Slovin (2004, S. 299) würden in der Phase der Verinnerlichung die gezeichneten Strecken nebeneinander stehen und keine Beziehungen aufzeigen. In der Phase der Kondensation werden erste Beziehungen (Strecke k ist länger als Strecke e) genutzt. Schließlich gelingt in der Phase der Verdinglichung eine Kennzeichnung der gesuchten, neuen Strecke (Menge der Fische von Chris).

Im deutschsprachigen Raum widmet sich aktuell Gerhard (2009, 2011) der Erprobung des russischen Ansatzes. Enge Bezüge zum Projekt ‚Measure Up' sind dabei zu erkennen. Jedoch wird nicht mit Schülerinnen und Schülern ab der ersten Klasse in den Praxiserprobungen gearbeitet, sondern mit Lernenden der unteren Sekundarstufe (vgl. Gerhard 2009). Eine der Motivationen von Gerhard liegt in der negativen Korrelation, die zwischen Leistungen in der Arithmetik und effektiven Zugängen zur Algebra bei Lernenden festzustellen ist (vgl. Gerhard 2009, S. 500). Dabei wird nicht beachtet, dass entscheidend ist, welche Art von Leistung in der Arithmetik dieser Beziehung zu Grunde gelegt wird. Sofern gute Leistungen der Arithmetik sich nicht allein auf Rechenfertigkeiten und Rechengeschwindigkeiten in einer Untersuchung oder auch im Unterricht beziehen, sondern auf Zahlensinn und flexible Rechenkompetenzen, die auch Struktursinn implizieren, so kann eine negative Korrelation als fraglich gelten.

Gerhard (2011) räumt ein, dass algebraisches Denken nicht zwingend an die Verwendung von symbolischen Variablen gebunden ist. Dennoch sieht sie „Variablen als eine wichtige Errungenschaft der Mathematik [, die] algebraisches Denken unterstützen und erleichtern können“ (Gerhard 2011, S. 23). Bei der Einführung von Buchstabenvariablen nutzt sie in ihren Untersuchungen Argumente der „Zeit- und Arbeitsersparnis“ und hält fest, dass dies „in der Regel ein überzeugendes Argument“ für die Schülerinnen und Schüler ist und sich „die Symbolsprache hierüber gut motivieren“ lässt (Gerhard 2011, S. 26). Im Wesentlichen geht auch Gerhard davon aus, dass Lernende das Gleichheitszeichen als Rechenimpuls deuten. „Diese Deutung ist so stark, dass sich die Waageregel für die unteren Klassen zunächst wenig eignet. Stattdessen kann auf die additive Elementarumformungsregel […] zurückgegriffen werden“ (Gerhard 2011, S. 30). Diese identifiziert sie in der Teil-Ganzes-Beziehung dreier Größen, die z. B. als Summe oder Differenz verstanden werden können $A = C + B \Leftrightarrow A - B = C$ (vgl. Malle 1993, hier in Abschnitt 3.3, vgl. auch Lösung linearer Gleichungen in Abschnitt 3.4).

Als eine ergänzende Idee kann bei Gerhard erkannt werden, dass die Erfindung geeigneter Buchstaben zur Darstellung von Beziehungen einen eigenen Fokus erhält. Variablennamen selbst erfinden zu lassen und zunächst Nebenbedingungen zuzulassen (Gerhard 2011, S. 28) ist eine überzeugende Idee. Wird in einem Text beispielsweise angenommen, es würden a Kilometer am Samstag und am Sonntag halb so viel zurückgelegt, so wird auch zunächst eine zweite Buchstabenvariable b für die Strecke am Sonntag akzeptiert und dann erkannt, dass die Nebenbedingungen (b + b = a oder 2b = a) zur Darstellung $b = \frac{a}{2}$ führen können.

Insgesamt stellt sich bei diesem Ansatz die Frage, warum numerische Bezeichnungen der Größen so kategorisch ausgeschlossen werden. Diese Kritik äußert auch bereits Zankov, der die Aufgabenvorschläge als ungeeignet bezeichnet, da sie nicht an die mathematischen Vorerfahrungen der Kinder bei Schulbeginn, die mit Zahlen und dem Zählen eng verbunden sind, anknüpfen (nach Otte 1976, S. 485).

Alle Aufgabenstellungen sind eng an Größenvergleiche gebunden. Sie ermöglichen somit einen Zugang zu diesen Textaufgaben (Vergleich), die als relativ anspruchsvoll gerade für jüngere Kinder gelten. Niederschmetternd ist dann jedoch die Kritik Freudenthals, der zwar die Wirkung der Programme und Projekte nicht leugnet, aber dezidiert deutlich macht, dass mit dieser verengten Sicht Algebra oder algebraisches Denken nicht ernsthaft gefördert wird: „What the experiment achieved is showing that algebraization – though of a quite mild persuasion – is a means of improving the performance of pupils in solving this special kind of word problems. But in the course of algebraization these problems become meaningless. Algebra is better applied in full swing and to algebraically meaningful problems" (Freudenthal 1974, S. 412).

Es ist von Bedeutung, an welchen Beispielen Erfahrungen zum algebraischen Denken gemacht werden. Dabei kann der hier gezeigte Ansatz verdeutlichen, dass nicht immer der Weg über viele, konkrete Einzelbeispiele zur Abstraktion und Generalisierung beschritten werden muss, sondern wenige, paradigmatische Beispiele ggf. hilfreicher sind (Freudenthal 1974, S. 412). Es bleibt zudem festzuhalten, dass Erkenntnisse über Eigenschaften von Operationen und algebraische Denkweisen nicht an „albernen" Beispielen (Freudenthal 1974, S. 412), zu deren Bearbeitung diese gar nicht benötigt werden, gefördert werden können.

Anhang

Die Anregungsaufgaben und *Beispiele* der vorangegangenen Kapitel stammen, wie jeweils angegeben, *aus nationalen und internationalen Forschungsprojekten* zum algebraischen Denken.

Auch in die *alltägliche Arbeit* in meinem *eigenen Mathematikunterricht* in verschiedenen Jahrgangsstufen – hier insbesondere in den Jahrgängen 2, 4 und 7 – konnten Begegnungen mit algebraischen Aufgaben integriert werden. Die konkreten Lösungsvorschläge meiner Schülerinnen und Schülern dienen als Beispiele für *mögliche* algebraischen Denk- und Handlungsweisen.

Zudem hatte ich die Chance, sechs Lehrerinnen zu gewinnen, die in ihren eigenen Grundschulklassen unterschiedlicher Einzugsgebiete in Nordrhein-Westfalen über gut zehn Monate hinweg etliche der hier vorgestellten Aufgabenbeispiele konkret unter dem Pilotprojektnamen ‚Kinder auf dem Weg zur Algebra' erprobt haben. Die Ergebnisse dieser *Praxiserprobung* sind jeweils mit einem Verweis auf diesen Anhang als Algebraprojekt gekennzeichnet. Die Grundidee dieser Praxiserprobung wird im Weiteren kurz dargestellt.

In dieser Praxiserprobung war es möglich, die besonderen Denk- und Handlungsweisen von Grundschulkindern bei der *Begegnung mit algebraischen Aufgaben* zu beobachten. Gleichzeitig bot das Projekt die Chance, zu überprüfen, ob es möglich ist, die *Aufgabenvorschläge* in den *alltäglichen Mathematikunterricht* in Grundschulen zu integrieren.

Als Unterrichtsmaterial wurden *Arbeitshefte* für die Kinder mit algebraischen Aufgaben zusammengestellt. In den Anregungen finden sich Aktivitäten z. B. zu den Themen ‚Muster und Terme', ‚Eigenschaften von Rechenoperationen', ‚Gleichungen' oder ‚Zahlenrätsel'.

Es wurden kein ‚Trainingsplan' oder konkret vorgeschriebene Unterrichtssequenzen in den Projektklassen durchgeführt. Lediglich entsprechende *Lehrhinweise*, wie sie aus Lehrerhandbüchern für Unterrichtswerke bekannt sind, wurden den beteiligten Lehrerinnen zur Verfügung gestellt. Aus den Lehrhinweisen konnten Ideen und Vorschläge zur *Durchführung* von Unterrichtsphasen abgeleitet werden; es war aber *grundsätzlich freigestellt*, Aufgaben aus den Arbeitsheften in passende Alltagssituationen des Mathematikunterrichts einzubauen oder in Tages- oder Wochenplänen vorzusehen oder auch unbearbeitet zu lassen. Der

A. S. Steinweg, *Algebra in der Grundschule,*
DOI 10.1007/978-3-8274-2738-0, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

völlig selbstbestimmte Einsatz des Unterrichtsmaterials führte konsequent dazu, dass *nicht alle Aufgabenvorschläge von allen beteiligten Kindern bearbeitet wurden*, sodass sich die Anzahl der auswertbaren Aufgabenbearbeitungen ggf. von der Gesamtzahl der Projektkinder unterscheidet.

Über das gesamte Projekt hinweg haben zwölf Kinder (zwei Kinder je Projektklasse) zusätzlich an Einzelinterviews teilgenommen, um den Vorstellungen und Ideen der Kinder etwas genauer nachzuspüren. Die Interviews waren halbstandardisiert und wurden videografiert und transkribiert. Zur Auswahl der Kinder wurden das Lösungsverhalten bei einem Item des Pretest, die Jahrgangszugehörigkeit und das Geschlecht als Kriterien genutzt.

Obwohl also die Unterrichtserprobung in den Projektklassen ganz unterschiedlich durchgeführt wurde, ist es spannend zu beobachten, ob sich eine *Entwicklung* in den Denk- und Handlungsweisen der beteiligten Kinder nachweisen lässt. Hierfür wurde ein Pretest-Posttest-Design genutzt. Pre- und Posttest waren jeweils in einigem Abstand vor der ersten und nach der letzten Projektstunde terminiert und nutzen dabei jeweils die gleichen Items, die passend zu den vorgeschlagenen Themenfeldern des Projektmaterials generiert worden waren.

Zu Beginn der Erprobung waren drei der beteiligten Projektklassen in der 2. Jahrgangsstufe und die anderen drei in der 3. Jahrgangsstufe. Am Ende des Projekts waren die Klassen demzufolge in der 3. bzw. 4. Jahrgangsstufe.

Insgesamt haben 135 Kinder (65 Jungen, 70 Mädchen) am Pretest und 133 Kinder (66 Jungen, 67 Mädchen) am Posttest des Algebraprojekts teilgenommen. Innerhalb der Projektphase waren 144 Kinder (72 Jungen, 72 Mädchen) an den Angeboten beteiligt. Die Schwankungen ergaben sich durch Veränderungen der Klassenzusammensetzungen durch Zu- und Wegzüge bzw. Zurückstellungen sowie durch Krankheit am Testtag.

Durch die kleine Stichprobe der an der Erprobung beteiligten Kinder und die Beschränkung auf Kinder des zweiten bis vierten Schulbesuchsjahres ist aus den Ergebnissen natürlich keine Aussage darüber ableitbar, wie Kinder im Bereich der Primarstufe *grundsätzlich* auf diese Aufgaben zur Förderung des algebraischen Denkens reagieren.

Die Kinderlösungen ermöglichen einen *ersten Einblick* in die Breite und Vielfalt der individuellen Reaktionen auf die vorgeschlagenen Anregungsaufgaben. Die Ergebnisse der Erprobung erlauben demzufolge nur einen exemplarischen Einblick in *mögliche* Lösungsvorschläge von Kindern und *einzelne individuelle Denk- und Handlungsweisen* der Kinder, die an der Erprobung beteiligt waren.

Laut Winters Annahme entwickelt sich algebraisches Denken „nicht kraft natürlicher Reifung“ (Winter 1982, S. 199). Die Förderung algebraischen Denkens bedarf also Anregungen, die im Unterricht angeboten werden. Die Annahme Winters – die sich vornehmlich auf die Bedeutung des Gleichheitszeichens bezieht – findet sich in den Ergebnissen des Algebraprojekts über verschiedene Themenfelder hinweg bestätigt. Sofern ‚Reifung' eine entscheidende Rolle spielen würde, müssten die Drittklässler bereits vor dem Projekt wesentlich öfter algebraische Reaktionen zeigen als die Zweitklässler. Die Denk- und Handlungsweisen der Zweit- und Drittklässler unterscheiden sich zu Beginn des Projekts jedoch nicht. Demzufolge wurde hier auf eine dezidierte Unterteilung der Darstellung der Daten bezüglich Alterskohorten verzichtet.

Es kann im Trend zudem gezeigt werden, dass algebraisches Denken erlernbar ist. Die Testergebnisse helfen mögliche *Tendenzen* aufzuzeigen, ob und wie sich Unterricht, der nicht gezielt ‚trainiert', sondern schlicht Aktivitäten integriert, die potenziell algebraisch oder ‚prozeptuell' bearbeitet werden können, auf die Vorgehensweisen der Kinder auswirkt. Die Antworten und Lösungen der Kinder in der Erstbegegnung (Pretest) und nach dieser Phase der unterrichtlichen Begegnung mit Aktivitäten und Aufgaben, die algebraisches Denken und Handeln ermöglichen können (Posttest), geben hier erste Hinweise.

Einige Ergebnisse dieses hier kurz umrissenen Projekts ‚Kinder auf dem Weg zur Algebra' aus den Tests, den Arbeitsheften oder den Interviews werden in den vorangegangenen Kapiteln genutzt. Die Angaben werden mit dem Hinweis auf diesen Anhang unter dem Stichwort ‚Algebraprojekt' geführt.

Verschiedene Ergebnisse bzw. Teilergebnisse des Projekts sind auch bereits in anderen Schriften veröffentlicht worden (vgl. z. B. Steinweg 2004, 2005, 2006, 2006a, 2007). Die entsprechenden Literaturhinweise finden sich in den Kapiteln und Abschnitten jeweils bei den konkret zugehörigen Aufgabenstellungen.

Literatur

Affolter, Walter; Amstad, Heinz; Doebeli, Monika; Wieland, Gregor, *Das Zahlenbuch – Mathematik im 5. Schuljahr*, Zug, Klett & Balmer, 1999.

Affolter, Walter; Amstad, Heinz; Doebeli, Monika; Wieland, Gregor, *Das Zahlenbuch – Mathematik im 6. Schuljahr*, Zug, Klett & Balmer, 2000.

Affolter, Walter; Beerli, Guido; Hurschler, Hanspeter; Jaggi, Beat; Jundt, Werner; Krummenacher, Rita; Nydegger, Annegret; Wälti, Beat; Wieland, Gregor, *mathbu.ch 7 – Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I*, Zug und Bern, Klett & Balmer; schulverlag blmv, 2003.

Akinwunmi, Kathrin, *Zum Verallgemeinern mathematischer Muster und zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule*, In: Reinhold Haug und Lars Holzäpfel (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster, WTM, 2011, S. 47–50.

Akinwunmi, Kathrin, *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*, Wiesbaden, Vieweg + Teubner, 2012.

Alten, Heinz-Wilhelm; Naini, Alireza Dajfari; Folkerts, Menso; Schlosser, Hartmut; Schlote, Karl-Heinz; Wußing, Hans, *4000 Jahre Algebra: Geschichte, Kulturen, Menschen*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 2003.

Arcavi, Abraham, *Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics*, In: For the Learning of Mathematics 3 (14), 1994, S. 24–35.

Arcavi, Abraham, *Teaching and Learning Algebra: Past, Present and Future*, In: Robert B. Davis (Hg.), The Journal of Mathematical Behavior, Special Issue: New perspectives on School Algebra: Papers and Discussions of the ICME-7 Algebra Working Group (14), 1995, S. 145–162.

Arzarello, Ferdinando, *The Role of Natural Language in Prealgebraic and Algebraic Thinking*, In: Heinz Steinbring, Maria Bartolini Bussi und Anna Sierpinska (Hg.), Language and Communication in the Mathematics Classroom, Reston, Virginia, NCTM, 1988, S. 249–261.

Baden-Württemberg, Ministerium für Kultus Jugend und Sport, *Bildungsplan Grundschule,* 2004, online verfügbar unter www.bildungsstandards-bw.de.

Banerjee, Rakhi; Subramaniam, K., *Evolution of a teaching approach for beginning algebra*, In: Educational Studies in Mathematics 80 (3), 2012, S. 351–367.

A. S. Steinweg, *Algebra in der Grundschule,*
DOI 10.1007/978-3-8274-2738-0, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Bardy, Peter, *Ergebnisse empirischer Untersuchungen zur Entwicklung funktionalen Denkens im Verlauf der Grundschulzeit*, In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (3/4), 1993, S. 307–330.

Bauersfeld, Heinrich, *‚Language Games' in Mathematics Classroom – Their Function and Their Effects*, In: Paul Cobb (Hg.), The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures, Hillsdale, Hove, Lawrence Erlbaum Associates, 1995, S. 271–291.

Bayern, Staatsministerium für Unterricht und Kultus, *Lehrplan für das Gymnasium in Bayern*, München, 2003, online verfügbar unter http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26414.

Bednarz, Nadine; Janvier, Bernadette, *Emergence and Development of Algebra as a ProblemSolving Tool – Continuities and Discontinuities with Arithmetic*, In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran und Lesley Lee (Hg.), Approaches to Algebra – Perspektives for Research and Teaching, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publisher, 1996a, S. 115–136.

Bednarz, Nadine; Kieran, Carolyn; Lee, Lesley (Hg.), *Approaches to Algebra – Perspektives for Research and Teaching*, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publisher, 1996.

Behr, Merlyn; Stanley Erlwanger; Nichols, Eugene, *How Children View Equality Sentences*, PMDC Technical Report no. 3. Tallahassee, Fla.: Florida State University, 1976. (ERIC Document Reproduction Service no. ED144802).

Bell, Alan W., *Purpose in School Algebra*, In: Robert B. Davis (Hg.), The Journal of Mathematical Behavior, Special Issue: New perspectives on School Algebra: Papers and Discussions of the ICME-7 Algebra Working Group (14), 1995, S. 41–73.

Berlin, Senatsverwaltung für Bildung Jugend und Sport; Brandenburg, Ministerium für Bildung Jugend und Sport, *Rahmenlehrplan Grundschule – Mathematik*, Berlin, 2004, online verfügbar unter http://www.berlin.de/imperia/md/content/sen-bilung/schulorganisation/lehrplaene/gr_ma_1_6.pdf?start&ts=1157974560&file=gr_ma_1_6.pdf.

Berlin, Tatjana, *Algebra erwerben und besitzen Eine binationale empirische Studie in der Jahrgangsstufe 5*, Dissertation Duisburg–Essen, 2010, online verfügbar unter http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-24507/main.pdf.

Berlin, Tatjana; Fischer, Astrid; Hefendehl-Hebeker, Lisa; Melzig, Dagmar, *Vom Rechnen zum Rechenschema – Zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht*, In: Annemarie Fritz und Siegbert Schmidt (Hg.), Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I, Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Weinheim und Basel, Beltz, 2009, S. 270–291.

Bills, Liz, *Shifts in the Meanings of Literal Symbols*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Bd. 2, Utrecht Netherlands, 2001, S. 161–168.

Bills, Liz; Ainley, Janet; Wilson, Kirsty, *Modes of Algebraic Communication: Moving from Spreadsheets to Standard Notation*, In: For the Learning of Mathematics 26 (1), 2006, S. 41–46.

Bills, Liz; Ainley, Janet; Wilson, Kirsty, *Particular and General in Early Symbolic Manipulation*, In: N. A. Paterman, Barbara J. Dougherty und J. Ziliox (Hg.), Proceedings of the Twenty Seventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXVII, Bd. 2, Honolulu, 2003, S. 105–112.

Blanton, Maria L.; Kaput, James J., *Building District Capacity for Teacher Development in Algebraic Reasoning*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 361–388.

Blanton, Maria; Kaput, James J., *Algebrafying the Elementary Mathematics Experience,* Part 2: Transforming Practice on a District-Wide Scale, In: H. Chick, K. Stacey und J. Vincent (Hg.), Proceedings of the 12th ICMI (International Group of Mathematical Instruction) Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Melbourne, Australia, University of Melbourne, 2001, S. 87–95.

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer, *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*, Münster, New York, München, Berlin, Waxmann, 2010a.

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer, *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primärstufenlehrkräfte für die im internationalen Vergleich.*, Münster, New York, München, Berlin, Waxmann, 2010.

Böttinger, Claudia; Söbbeke, Elke, *Growing Patterns as Examples for Developing a New View onto Algebra and Arithmetic*, In: Viviane Durand-Guerrier, Sophie Soury-Lavergne und Ferdinando Arzarello (Hg.), Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 6, Lyon France, 2009, S. 649–658, online verfügbar unter http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/,

Brandl, Alois; Hartmann, Klaus, *Mathematik Buch 6 – Ausgabe B*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Bayerischer Schulbuch Verlag, 2005.

Cajori, Florian, *A History of Mathematical Notations,* Volume1: Notations in Elementary Mathematics, La salle Illinois, The Open Court Publishing Company, 1928.

Carraher, David W.; Schliemann, Analucia D.; Schwartz, Judah L., *Early Algebra Is Not the Same as Algebra Eraly*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 235–272.

Carraher, David; Earnest, Darrell, *Guess my Rule Revisited*, In: N. A. Paterman, Barbara J. Dougherty und J. Ziliox (Hg.), Proceedings of the Twenty Seventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXVII, Bd. 2, Honolulu, 2003, S. 173–180

Carraher, David; Schliemann, Analucia D.; Brizuela, Barbara M., *Can Young Students Operate On Unknown?*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Bd. 1, Utrecht Netherlands, 2001, S. 130–140, online verfügbar: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2001/youngStudents.pdf, zuletzt geprüft am 23.09.2012.

Carraher, David; Schliemann, Analucia D.; Brizuela, Barbara M., *Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions*, In: Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME-NA XXII, Tucson, Arizona US, 2000, S. 1–26, online verfügbar unter http://www.west.asu.edu/cmw/pme/pages/tableofcontents.html,

Cerulli, Michele; Mariotti, Maria Alessandra, *Arithmetic and Algebra, Continuity or Cognitive Break? The Case of Francesca*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Bd. 2, Utrecht Netherlands, 2001, S. 225–232.

Chalouh, Louise; Herscovics, Nicolas, *Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way*, In: Arthur F. Coxford und Albert P. Shulte (Hg.), The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook, 2. Aufl., Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, 1988, S. 33–42.

Charbonneau, Louis, *From Euclid to Descatres: Algebra and its Relation to Geometry*, In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran und Lesley Lee (Hg.), Approaches to Algebra – Perspectives for Research and Teaching, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publisher, 1996, S. 15–37.

Chick, H.; Harris, Kiri, *Grade 5/6 Teachers' Perceptions of Algebra in the Primary School Curriculum*, In: Jeong-Ho Woo, Hee-Chan Lew, Kyo-Sik Park Park und Dong-Yeop Seo (Hg.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXXI, Vol. 2, Seoul, 2007, S. 121–128.

Conway, John H.; Guy, Richard K., *Zahlenzauber: Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen*, Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 1997.

Cooper, Tom J.; Warren, Elizabeth, *The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise*, In: ZDM Mathematics Education 40 (1), 2008, S. 23–37.

Cuevas, Gilbert J.; Yeatts, Karol, *Navigating through Algebra in Grades 3-5*, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

Davidov, W. W.; Gorbow, S. F.; Midulina, G. G.; Saweiwewa, O. W., *Mathematika – 1 Klass*, Moskau, Miros-Argus, 1997.

Davis, Gary; Tall, David; Thomas, Michael, *What is the object of encapsulation of a process*, In: Proceedings of MERGA, vol. 2, New Zealand (vol. 2), 1997, S. 132–139.

Department of Education UK, *Mathematics: Attainment target level descriptions,* 2011, online verfügbar unter:

http://www.education.gov.uk/schools/teachingandlearning/curriculum/primary/b00199044/mathematics/attainment.

Der Postillon, *Wert von x ein für alle Mal auf 5 festgesetzt,* 2012, online verfügbar unter http://www.der-postillon.com/2012/08/mathemuffel-erleichtert-wert-von-x-ein.html#more.

Devlin, Keith, *Mathematics – The Science of Patterns,* The Search for Order in Life, Mind, and the Universe, 2. Aufl., New York, Scientific American Library, 1997.

Donaldson, Margaret, *Wie Kinder denken*, Bern, Stuttgart, Wien, Huber, 1982.

Dougherty, Barbara J., *Measure Up: A Quantitative View of Early Algebra*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 389–412.

Dougherty, Barbara J.; Slovin, Hannah, *Generalized Diagrams as a Tool for Young Children's Problem Solving*, In: Marit Johnsen Hoines und Anne Berit Fuglestad (Hg.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXVIII, Bd. 2, Bergen, Norway, 2004, S. 295–302.

Dougherty, Barbara J.; Vanenciano, Linda C. H., *Measure Up for Understanding*, In: Teaching Children Mathematics 13 (9), 2007, S. 452–456.

Dreyfus, Tommy, *Advanced Mathematical Thinking Processes*, In: David Tall (Hg.), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer, 1991, S. 25–41.

Falkner, Karen P.; Levi, Linda; Carpenter, Thomas P., *Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra*, In: Teaching Children Mathematics 6 (4), 1999, S. 232–236.

Feynman, Richard P., *What is Science?*, In: D. K. Nachtigall (Hg.), Internalizing Physics – Making Physics Part of One's Life, Eleven Essays of Nobel Laureates, Paris, United Nations Educational, Science, and Cultural Organization, 1995, S. 99–112.

Franke, Marianne, *Mathematik in den unteren Klassen - mit oder ohne Variablen?,* Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 18 (9), 1990, S. 398–410.

Franke, Megan Loef; Carpenter, Thomas P.; Battey, Dan, *Content Matters: Algebraic Reasoning in Teachers Professional Development*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 333–359.

Freudenthal, Hans, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Boston, Lancaster, D. Reidel Publishing Company, Kluwer, 1983.

Freudenthal, Hans, *Soviet Research on Teaching Algebra at the Lower Grades of the Elementary School*, In: Educational Studies in Mathematics 5 (4), 1974, S. 391–412.

Freudenthal, Hans, *What is Algebra and What has it been in History?*, In: Archive for History of Exact Science 16 (3), 1977, S. 189–200.

Fricke, Arnold, *Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget*, In: Westermanns Pädagogische Beiträge (3), 1959, S. 99–114.

Fricke, Arnold; Besuden, Heinrich, *Mathematik in der Grundschule 1*, Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1972.

Friel, Susan; Rachlin, Sid; Doyle, Dot, *Navigating through Algbera in Grades 6-8*, Unter Mitarbeit von Claire Nygard, David Pugalee und Mark Ellis, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

Führer, Lutz, *„Funktionales Denken“: Bewegtes fassen – das Gefasste bewegen*, In: mathematik lehren 11, 1985, S. 12–13.

Gerhard, Sandra, *Ein handlungsorientierter Zugang zur algebraischen Symbolsprache - geeignet für Klasse 1 – 6*, In: Der Mathematikunterricht 57 (2), 2011, S. 23–33.

Gerhard, Sandra, *Problem Solving without Numbers - an Early Approach to Algebra*, In: Viviane Durand-Guerrier, Sophie Soury-Lavergne und Ferdinando Arzarello (Hg.), Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 6, Lyon France, 2009, S. 499–508, online verfügbar unter http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/

Gierlinger, Wolfgang, *Zahlenzauber 2 – Mathematik für die Grundschule in Bayern*, München, Oldenbourg, 2001.

Gierlinger, Wolfgang, *Zahlenzauber 4 – Mathematik für die Grundschule in Bayern*, München, Oldenbourg, 2006.

Ginsburg, Herbert P., *Children's Arithmetic – How They Learn It and How You Teach It*, 2nd Edition, Austin, Texas, pro-ed, 1989.

Hamburg, Behörde für Schule und Berufsbildung, *Bildungsplan Grundschule - Mathematik*, Hamburg, 2011, online verfügbar unter: http://www.hamburg.de/contentblob/2481796/data/mathematik-gs.pdf.

Herscovics, Nicolas; Linchevski, Liora, *A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra*, In: Educational Studies in Mathematics 27 (1), 1994, S. 59–78.

Hewitt, Dave, *Grid Algebra*, Derby, Association of Teachers of Mathematics (ATM), 2007.

Hewitt, Dave, *The role of attention in the learning of formal algebraic notation: the case of a mixed ability Year 5 using the software Grid Algebra*, In: M. Joubert (Hg.), Proceedings of the

British Society for Research into Learning Mathematics, BSRLM (29-3), 2009, S. 43–48, Online verfügbar unter http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip29-3/BSRLM-IP-29-3-08.pdf.

Hewitt, Dave, *Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable?*, In: Educational Studies in Mathematics 81 (2), 2012, S. 139–159.

Hoch, Maureen; Dreyfus, Tommy, *Nicht nur umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren – Ansätze zur Entwicklung algebraischen Struktursinns*, In: Praxis der Mathematik in der Schule 52 (33), 2010, S. 25–29.

Hrzán, Joachim; Sefien, Emad, *Gleichungen mit x in der Grundschule?! – Teil I*, In: MNU Primar 1 (1), 2009, S. 16–20.

Hunter, Jodie, *What Do Primary School Students Think The Equal Sign Means?*, In: Jeong-Ho Woo, Hee-Chan Lew, Kyo-Sik Park Park und Dong-Yeop Seo (Hg.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXXI, Vol. 1, Seoul, 2007, S. 228.

Irwin, Kathryn C.; Britt, Murray S., *The Alegbraic Nature of Student's Numercical Manipulation in the New Zealand Numeracy Project*, In: Educational Studies in Mathematics 58 (2), 2005, S. 169–188.

Kaput, James J., *What is Algebra? What is Algebraic Reasoning?*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 5–17.

Keller, Karl-Heinz; Pfaff, Peter; Bornemann, Wolfgang, *Das Mathebuch 3*, Offenburg, Mildenberger, 2006.

Kieran, Carolyn, *Concepts Associated with the Equality Symbol*, In: Educational Studies in Mathematics 12 (3), 1981, S. 317–326.

Kieran, Carolyn, *Research on the Learning and Teaching of Algebra*, In: Angel Guitérrez und Paolo Boero (Hg.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education, Sense Publishers, 2006, S. 11–49.

Kieran, Carolyn; Boileau, André; Garancon, Maurice, *Introducing Algebra by means of a Technology-Supported, Functional Approach*, In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran und Lesley Lee (Hg.), Approaches to Algebra – Perspectives for Research and Teaching, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publisher, 1996, S. 257–293.

KMK Kultusministerkonferenz, *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Primarstufe,* Beschluss vom 15.10.2004, München, Neuwied, Luchterhand, Wolter Kluwers Deutschland, 2005.

Knuth, Eric J.; Stephens, Ana C.; McNeil, Nicole M.; Alibali, Martha W., *Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations*, In: Journal for Research in Mathematics Education 37 (4), 2006, S. 297–312.

Kolbinger, Karl-Heinz; Kriegelstein, Wolfram; Ernst, Günter; Kistella, Anneliese; Leininger, Paul; Wallrabenstein, Hartmut, *Nussknacker – Unser Rechenbuch für Klasse 1,* Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2001.

Kolbinger, Karl-Heinz; Kriegelstein, Wolfram; Ernst, Günter; Kistella, Anneliese; Leininger, Paul; Wallrabenstein, Hartmut, *Nussknacker – Unser Rechenbuch für Klasse 2,* Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2001.

Kopp, Margit, *Algebra mit Zahlenmauern*, In: mathematik lehren (105), 2001, S. 16–19.

Krauthausen, Günter, *Die ‚Kraft der Fünf' und das denkende Rechnen – Zu Bedeutung tragfähiger Vorstellungsbilder im mathematischen Anfangsunterricht*, In: Gerhard N. Müller und Erich Christian Wittmann (Hg.), Mit Kindern rechnen, Frankfurt am Main, Grundschulverband e.V., 1995, S. 87–108.

Krauthausen, Günter, *Für die stärkere Betonung des halbschriftlichen Rechnens*, In: Grundschule (5), 1995a, S. 14–18.

Krauthausen, Günter, *Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat*, In: Werner Weiser und Bernd Wollring (Hg.), Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe, Festschrift für Siegbert Schmidt, Hamburg, Kovac, 2001, S. 99–113.

Krauthausen, Günter, *Zahlenmauern im 2. Schuljahr – ein substantielles Übungsformat*, In: Grundschulunterricht (10), 1995b, S. 5–9.

Kromer, Günther, *Schwierigkeiten von Schülern mit der Algebra*, Dissertation, Freiburg, 1996.

Küchemann, Dietmar, *Algebra*, In: K. M. Hart, M. L. Brown, Dietmar E. Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock und M. McCartney (Hg.), Children's Understanding of Mathematics – 11-16, London, John Murray, 1981, S. 102–119.

Küchemann, Dietmar, *Children's Understanding of numerical Variables*, In: Mathematics in School 7 (4), 1978, S. 23–26.

Küchemann, Dietmar, *Object Lessons in Algebra?*, In: MT – Mathematics Teaching (98), 1982, S. 47–51.

Langhorst, Petra; Ehlert, Antje; Fritz, Annemarie, *Das Teil-Teil-Ganze-Konzept*, In: MNU Primar 3 (1), 2011, S. 10–17.

Linchevski, Liora, *Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra*, In: Robert B. Davis (Hg.), The Journal of Mathematical Behavior, Special Issue: New perspectives on School Algebra: Papers and Discussions of the ICME-7 Algebra Working Group (14), 1995, S. 113–120.

Linchevski, Liora, *Operating on the Unknowns: What does it really mean?*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Bd. 1, Utrecht Netherlands, 2001, S. 141–144.

Linchevski, Liora; Herscovics, Nicolas, *Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations*, In: Educational Studies in Mathematics 30 (1), 1996, S. 39–65.

Linchevski, Liora; Livneh, Drora, *Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts*, In: Educational Studies in Mathematics 40 (2), 1999, S. 173–196.

Livneh, Drora; Linchevski, Liora, *Algebrification of Arithmetic: Developing Algebraic Structure Sense in the Context of Arithmetic*, In: Jeong-Ho Woo, Hee-Chan Lew, Kyo-Sik Park Park und Dong-Yeop Seo (Hg.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXXI, Vol. 3, Seoul, 2007, S. 217–224.

MacGregor, Mollie, *How Students Interpret Equations: Intuition Versus Taught Procedures*, In: Heinz Steinbring, Maria Bartolini Bussi und Anna Sierpinska (Hg.), Language and Communication in the Mathematics Classroom, Reston, Virginia, NCTM, 1998, S. 262–270.

Malara, Nicolina A.; Iaderosa, Rosa, *The Interweaving of Arithmetic and Algbera: Some Questions about Syntactic and Structural Aspects and their Teaching and Learning*, In: Inge Schwank (Hg.), Proceedings of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 1, II, Osnabrück, 1999, S. 159–171.

Malara, Nicolina A.; Navarra, Giancarlo, *ArAl Project – Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*, Bologna, Pitagora Editrice, 2003.

Malisani, Elsa; Spagnolo, Filippo, *From Arithmetical Thought to Algebraic Thought: The Role of the „Variable"*, In: Educational Studies in Mathematics (71), 2009, S. 19–41.

Malle, Günther, *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, Braunschweig, Wiesbaden, Vieweg, 1993.

Marxer, Michael, *Arithmetisches Modellieren – Vorerfahrungen zu Variablen und Termen ermöglichen*, In: mathematik lehren (171), 2012, S. 49–54.

Mason, John, *Expressing Generality and Roots of Algebra*, In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran und Lesley Lee (Hg.), Approaches to Algebra – Perspectives for Research and Teaching, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publisher, 1996, S. 65–86.

Mason, John, *Making Use of Children's Power to Produce Algebraic Thinking*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 57–94.

Meißner, Hartwig, *Schülerstrategien bei einem Taschenrechnerspiel*, In: Journal für Mathematikdidaktik 8 (1/2), 1987, S. 105–128.

Mills, Steve; Koll, Hilary, *Understanding Maths: Number Patterns and Early Algebra – Key Stage 2*, Huddersfield, UK, Schoenfield & Sims, 2005.

NCTM (National Council of Teacher of mathematics), *Maths Standards and Expectations,* Algebra, 2000, online verfügbar unter: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=312.

Niedersachsen, Kultusministerium, *Kerncurriculum für die Grundschule - Schuljahrgänge 1-4 - Mathematik,* 2006, online verfügbar unter: http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gs_mathe_nib.pdf.

Nordrhein-Westfalen, Ministerium für Schule und Weiterbildung, *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen,* 2008, Online verfügbar unter http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/grundschule/grs_faecher.pdf.

Oehl, Wilhelm, Palzkill, Leonard, *Welt der Zahl – 2. Schuljahr*, Hannover, Schroedel, 1972.

Otte, M., *Die Didaktischen Systeme von V. V. Davidov / D. B. Elkonin einerseits und L. V. Zankov andererseits,* Skizze einer kritischen Auseinandersetzung, In: Educational Studies in Mathematics 6 (4), 1976, S. 475–497.

Padberg, Friedhelm, *Einführung in die Mathematik I: Arithmetik*, Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 2002.

Padberg, Friedhelm, *Zahlentheorie und Arithmetik*, 2. Aufl., Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 1999.

Padberg, Friedhelm; Benz, Christiane, *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*, 4. Aufl., Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

Padberg, Friedhelm; Heckmann, Kirsten, *Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I*, Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 2012.

Padberg, Friedhelm; Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen, *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*, 2. Aufl., Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

Radatz, Hendrik; Schipper, Wilhelm; Dröge, Rotraut; Ebeling, Astrid, *Handbuch für den Mathematikunterricht – 2. Schuljahr*, Hannover, Schroedel, 1998.

Radford, Luis, *Signs and Meanings in Student's Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis*, In: Educational Studies in Mathematics 42 (3), 2000, S. 237–268.

Radford, Luis, *The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective*, In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran und Lesley Lee (Hg.), Approaches to Algebra – Perspectives for Research and Teaching, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publisher, 1996, S. 39–53.

Resnick, Lauren B., *A Developmental Theory of Number Understanding*, In: Herbert P. Ginsburg (Hg.), The Development of Mathematical Thinking, New York, Academic Press, 1983, S. 109–151.

Rinkens, Hans-Dieter; Hönisch, Kurt, *Welt der Zahl 1 – Bayern*, Hannover, Schroedel, 2001.

Rinkens, Hans-Dieter; Hönisch, Kurt, *Welt der Zahl 2 – Bayern*, Hannover, Schroedel, 2001.

Rinkens, Hans-Dieter; Hönisch, Kurt, *Welt der Zahl 3 – Bayern*, Hannover, Schroedel, 2002.

Rinkens, Hans-Dieter; Wynands, Alexander; Amann, Alois; Franke, Karl Heinz; Graefe, Gerhard, *Mathe aktiv – 5. Schuljahr*, 2. Aufl., Braunschweig, Schroedel, 2006.

Rojano, Teresa, *Developing Algebraic Aspects of Problem Solving with Spreadsheet Environments*, In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran und Lesley Lee (Hg.), Approaches to Algebra – Perspectives for Research and Teaching, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publisher, 1996, S. 137–145.

Rottmann, Thomas, *Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte" und „das Doppelte" – Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*, Hildesheim, Franzbecker, 2006.

Rüede, Christian, *Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen*, In: Journal für Mathematikdidaktik 33 (1), 2012, S. 113–141.

Sachsen-Anhalt, Kultusministerium, *Fachlehrplan Grundschule - Mathematik,* 2007, online verfügbar unter:

http://www.bildung-lsa.de/pool/RRL_Lehrplaene/Entwuerfe/lpgsmathe.pdf.

Sáenz-Ludlow, Adalira; Walgamuth, Catherine, *Third Graders' Interpretations of Equality and the Equal Symbol*, In: Educational Studies in Mathematics 35 (2), 1998, S. 153–187.

Sautoy, Marcus du, *Die Musik der Primzahlen*, München, C. H. Beck, 2004.

Sawyer, W. W., *Vision in Elementary Mathematics*, Harmondsworth, Penguin Books, 1964.

Schacht, Florian, *Mathematische Begriffsbildung zwischen Impliziten und Explizitem,* Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff, Wiesbaden, Vieweg + Teubner, 2012.

Scherer, Petra, *‚Unschaffbar' – Unlösbare Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*, In: Grundschulunterricht 54 (2), 2007, S. 20–23.

Scherer, Petra; Steinbring, Heinz, *Zahlen geschickt addieren – Summenformeln*, In: Gerhard N. Müller, Heinz Steinbring und Erich Christian Wittmann (Hg.), Arithmetik als Prozess, Seelze, Kallmeyer, 2004, S. 55–69 und 237–254.

Schifter, Deborah; Monk, Stephen; Russel, Susan J.; Bastable; Virginia, *Early Algebra: What Does Understanding the Laws of Arithmetic Mean in the Elementary Grades?*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 413–447.

Schipper, Wilhelm, *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*, Braunschweig, Schroedel, 2009.

Schliemann, Analucia D.; Carraher, David W.; Brizuela, Barbara M., *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum and Associates, 2007.

Schliemann, Analucia D.; Carraher, David W.; Brizuela, Barbara M., *When Tables become Function Tables*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Bd. 4, Utrecht Netherlands, 2001, S. 145–152.

Schliemann, Analucia D.; Carraher, David; Brizuela, Barbara M., *Bringing out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*, New York, London, Routledge, 2010.

Schliemann, Analucia D.; Carraher, David; Brizuela, Barbara M.; Earnest, Darrell; Goodrow, Anne; Lara-Roth, Susanna; Peled, Irit, *Algebra in Elementary School*, In: N. A. Paterman, Barbara J. Dougherty und J. Ziliox (Hg.), Proceedings of the Twenty Seventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXVII, Bd. 4, Honolulu, 2003, S. 127–134.

Schliemann, Analucia D.; Goodrow, Anne Lara; Roth, Susanna, *Functions and Graphs in Third Grade – Symposium Paper, Research Presession*, NCTM (National Council of Teacher of Mathematics), 2001a, online verfügbar unter: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2001/functionsGraphs.pdf

Schoenfeld, Alan H., *Early Algebra as Mathematical Sense Making*, In: James J. Kaput, David W. Carraher und Maria L. Blanton (Hg.), Algebra in the Early Grades, New York, London, Lawrence Erlbaum Associates, 2008, S. 479–510.

Schütte, Marcus, *Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule*, Münster, New York, München, Berlin, Waxmann, 2009.

Schütte, Sybille, *Die Matheprofis 1 – Ein Mathematikbuch für das 1. Schuljahr: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2004.

Schütte, Sybille, *Die Matheprofis 2 – Ein Mathematikbuch für das 2. Schuljahr: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2004.

Schütte, Sybille, *Die Matheprofis 3 – Ein Mathematikbuch für die Grundschule: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2005.

Schwätzer, Ulrich, *Zahlentreppen – Grundschüler erkunden ein arithmetisch substantielles Problemfeld*, In: Die Grundschulzeitschrift. Mit Kindern Schule machen 14 (133), 2000, S. 14–17.

Selter, Christoph, *Folgen – bereits in der Grundschule!*, In: mathematik lehren (96), 1999, S. 10–14.

Selter, Christoph; Schwätzer, Ulrich, *Summen von Reihenfolgezahlen – Vorgehensweisen von Viertkläßlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung*, In: Journal für Mathematikdidaktik 19 (2/3), 1998, S. 123–148.

Sfard, Anna, *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*, In: Educational Studies in Mathematics 22 (1), 1991, S. 1–36.

Sfard, Anna, *The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives*, In: Robert B. Davis (Hg.), The Journal of Mathematical Behavior, Special Issue: New perspectives on School Algebra: Papers and Discussions of the ICME-7 Algebra Working Group (14), 1995, S. 15–39.

Sfard, Anna; Linchevski, Liora, *The Gains and the Pitfalls of Reification- The Case of Algebra*, In: Educational Studies in Mathematics 26 (2/3), 1994, S. 191–228.

Shulman, Lee S., *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*, In: Educational Researcher 15 (2), 1986, S. 4–14.

Siebel, Franziska, *„Und das ist dann halt bei allen Zahlen so.“ Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen.*, In: Anke Lindmeier und Stefan Ufer (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster, WTM, 2010, S. 799–802.

Söbbeke, Elke, *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*, Hildesheim, Franzbecker, 2005.

Specht, Birte Julia, *Variablenverständnis und Variablen verstehen,* Empirische Untersuchung zum Einfluss sprachlicher Formulierungen in der Primar- und Sekundarstufe, Hildesheim, Franzbecker, 2009.

Spiegel, Hartmut, *Vom Nutzen des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule*, In: Peter Bender (Hg.), Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter, Berlin, Cornelsen, 1988, S. 177–189.

Steinbring, Heinz, *Die künstlichen Objekte der Mathematikdidaktik und ihr theoretischer Charakter*, In: Christoph Selter und Erich Christian Wittmann (Hg.), Mathematikdidaktik als design science, Festschrift für Erich Christian Wittmann, 1. Aufl., Leipzig, Klett-Grundschulverl., 1999, S. 226–233.

Steinbring, Heinz, *Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung*, In: Journal für Mathematikdidaktik 2000 (1), 21, S. 28–49.

Steinbring, Heinz, *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*, Berlin, New York, Springer, 2005.

Steinweg, Anna Susanne, *…sich ein Bild machen – Terme und figurierte Zahlen*, In: mathematik lehren (136), 2006a, S. 14–17.

Steinweg, Anna Susanne, *Arithmetik ist mehr als Ausrechnen*, In: Grundschulunterricht (7/8), 2005, S. 15–17.

Steinweg, Anna Susanne, *Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt – Zur Attraktivität von Zahlen und Mustern*, In: Silke Ruwisch und Andrea Peter-Koop (Hg.), Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule, Offenburg, Mildenberger, 2003, S. 56–74.

Steinweg, Anna Susanne, *Ich glaub, da hab ich was – Deutungen zu funktionalen Beziehungen durch Grundschulkinder*, In: Werner Peschek (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Franzbecker, 2002a, S. 483 - 486

Steinweg, Anna Susanne, *Kinder deuten geometrische Strukturen und Gleichungen - Ich sehe was, was du auch sehen kannst*, In: Elisabeth Rathgeb-Schnierer und Udo Roos (Hg.), Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht, Festschrift für S. Schütte, München, Oldenbourg, 2006, S. 71–86.

Steinweg, Anna Susanne, *Mathematikunterricht einmal „ohne" Rechnen – Kinder bewerten und beschreiben ausgerechnete Aufgaben*, In: Die Grundschulzeitschrift. Mit Kindern Schule machen 20 (191), 2006b, S. 22–27.

Steinweg, Anna Susanne, *Mit Zahlen spielen*, Kinder entdecken Zahlenmuster, In: Die Grundschulzeitschrift. Mit Kindern Schule machen 14 (133), 2000a, S. 6–10.

Steinweg, Anna Susanne, *Stein für Stein - Zahlen als Figuren*, In: Die Grundschulzeitschrift. Mit Kindern Schule machen 19 (187), 2005a, S. 48–54.

Steinweg, Anna Susanne, *Vier Ziffern – viele Aufgaben: Anregendes Spielen mit Zahlen und Zahlbeziehungen* In: Grundschulunterricht Heft 2, 2007, S. 4-6

Steinweg, Anna Susanne, *Vom Reiz des Ausrechnen-Wollens oder Warum 25 + 4 auch 54 sein kann* …, In: Aiso Heinze und Sebastian Kuntze (Hg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim, Franzbecker, 2004, S. 573–576.

Steinweg, Anna Susanne, *Wie heißt die Partnerzahl? Ein Übungsformat für alle Schuljahre*, In: Die Grundschulzeitschrift. Mit Kindern Schule machen 14 (133), 2000, S. 18–20.

Steinweg, Anna Susanne, *Zahlen in Beziehungen – Muster erkennen, nutzen, erklären und erfinden*, In: Dagmar Bönig und Petra Scherer (Hg.), Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern, Frankfurt am Main, Grundschulverband e.V., 2004a, S. 232–242.

Steinweg, Anna Susanne, *Zu Bedeutung und Möglichkeiten von Aufgaben zu figurierten Zahlen – eine Analyse von Deutungen durch Grundschulkinder*, In: Journal für Mathematikdidaktik 23 (2), 2002, S. 129–151.

Steinweg, Anna Susanne, *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*, Münster, Lit, 2001.

Steinweg, Anna Susanne; Klein, Julia, *Mathematikunterricht über das 1 + 1 hinaus – Förderung der Kreativität in der Grundschule*, In: mathematik lehren (106), 2001, S. 9–13.

Stern, Elsbeth, *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*, Lengerich, Pabst, 1998.

Sulzer, James S., *The Function Box and Fourth Graders: Squares, Cubes, and Circles*, In: Teaching Children Mathematics 4 (8), 1998, S. 442–447.

Sutherland, Rosamund, *Providing a Computer Based Framework for Algebraic Thinking*, In: Educational Studies in Mathematics 20 (3), 1989, S. 317–344.

Tall, David; Gray, Eddie; Ali, Maselan Bin; Crowley, Lillie; DeMarois, Phil; McGowen, Mercedes; Pitta, Demetra; Pinto, Marcia; Thomas, Michael; Yusof, Yudariah, *Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking*, In: Canadian Journal of Science, Mathematics & Technology Education 1 (1), 2001, S. 81–104.

Thomas, Michael; Tall, David, *The Long-Term Cognitive Development of Symbolic Algebra*, In: H. Chick, K. Stacey und J. Vincent (Hg.), Proceedings of the 12th ICMI (International Group of Mathematical Instruction) Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Bd. 2, Melbourne, Australia, University of Melbourne, 2001, S. 590–597.

Thüringen, Ministerium für Bildung Wissenschaft und Kultur, *Lehrplan für die Grundschule und für die Förderschule mit dem Bildungsgang Grundschule – Mathematik,* 2010, online verfügbar unter:

http://www.schulportal-thueringen.de/web/guest/media/detail?tspi=1262.

Trigueros, Maria; Ursini, Sonia, *Does the Understanding of Variable Evolve Through Schooling?*, In: O. Zaslavsky (Hg.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXIII, Bd. 4, Haifa Israel, 1999, S. 273–280.

Ursini, Sonia; Trigueros, Maria, *A Model for the Use of Variable in Elementary Algebra*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Utrecht Netherlands, 2001, S. 327–334.

Usiskin, Zalman, *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables*, In: Arthur F. Coxford und Albert P. Shulte (Hg.), The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook, 2. Aufl., Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, 1988; S. 8–19.

Usiskin, Zalman, *Doing Algebra in Grades K-4*, In: Barbara Moses (Hg.), Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from Nctm's School-Based Journals and Other Publications, NCTM (National Council of Teacher of Mathematics), 1999, S. 5–6.

van Amerom, Barbara A., *Focusing on Informal Strategies when Linking Arithmetic to Early Algebra*, In: Educational Studies in Mathematics 54 (1), 2003, S. 63–75.

van Amerom, Barbara A., *Reinvention of Early Algebra – Developmental Research on the Transition from Arithmetic to Algebra*, Utrecht, CD-ß Press, Center for Science and Mathematics Education, 2002.

van den Heuvel-Panhuizen, Marja, *Assessment and Realistic Mathematics Education*, Utrecht Netherlands, CD-ß Press, Center for Science and Mathematics Education, 1996.

van den Heuvel-Panhuizen, Marja, *Nicht nur die Antworten zählen,* Wege zu einer veränderten Testkultur, In: Die Grundschulzeitschrift. Mit Kindern Schule machen 21 (207), 2007, S. 10–13.

Voigt, Jörg, *Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern*, In: Jens-Holger Lorenz (Hg.), Mathematik und Anschauung, Köln, Aulis, 1993, S. 147–166.

Vollrath, Hans-Joachim, *Funktionales Denken*, In: Journal für Mathematikdidaktik 10 (1), 1989, S. 3–37.

Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen, *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*, 2. Aufl., Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 2012.

Vollrath, Hans-Joachim; Weigand, Hans-Georg, *Algebra in der Sekundarstufe*, 3. Aufl., Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 2007.

Voßmeier, Julia, *Schriftliche Standortbestimmungen im Arithmetikunterricht: Eine Untersuchung am Beispiel inhaltsbezogener Kompetenzen*, Wiesbaden, Vieweg + Teubner, 2012.

Walther, Gerd; van den Heuvel-Panhuizen, Marja; Granzer, Dietlinde; Köller, Olaf (Hg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*, Berlin, Cornelsen Scriptor, 2007.

Warren, Elizabeth, *Algebraic understanding and the importance of operation sense*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Bd. 4, Utrecht Netherlands, 2001, S. 399–406.

Warren, Elizabeth, *The Concept of a Variable, Gauging Students' Understanding*, In: O. Zaslavsky (Hg.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXIII, Bd. 4, Haifa Israel, 1999, S. 313–320.

Warren, Elizabeth, *Visualisation and the development of early understanding in algebra*, In: Tadao Nakahara und Masataka Koyama (Hg.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXIV, Bd. 4, Hiroshima, Japan, 2000, S. 273–280.

Warren, Elizabeth; Cooper, Tom J., *Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking*, In: Educational Studies in Mathematics 67 (2), 2008, S. 171–185.

Wieland, Gregor, *Terme bauen – Impulse für mehr Anschaulichkeit in der elementaren Algebra*, In: mathematik lehren (136), 2006, S. 22 und 39–43.

Willoughby, Stephen S., *Functions from Kindergarten through Sixth Grade*, In: Teaching Children Mathematics 3 (6), 1997, S. 314–318.

Winter, Heinrich, *Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe*, In: mathematica didactica 5 (4), 1982, S. 185–211.

Winter, Heinrich, *Die Summenformel für Quadratzahlen*, In: mathematik lehren (105), 2001, S. 60–64.

Wittmann, Erich Christian, *Drawing form the Richness of Elementary Mathematics in Designing Substantial Learning Environments*, In: Marja van den Heuvel-Panhuizen (Hg.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME XXV, Bd. 1, Utrecht Netherlands, 2001, S. 193–197.

Wittmann, Erich Christian, *Mathematik als Wissenschaft von Mustern – von Anfang an,* Kurzfassung des Impulsreferats im Rahmen der Auftakt- und ersten Fortbildungsveranstaltung des BLK-Programms SINUS Transfer Grundschule, 30.9. – 02.10.2004, Verwaltungsakademie Bordesholm, online verfügbar unter http://www.sinus-grundschule.de/fileadmin/Materialien/Kurzf_SINUS-Ref.pdf.

Wittmann, Erich Christian, *Natural Numbers and Groupings*, In: Educational Studies in Mathematics 6 (1), 1975, S. 53–75.

Wittmann, Erich Christian, *Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik*, In: mathematik lehren (11), 1985, S. 7–11.

Wittmann, Erich Christian, *Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus*, In: Grundschulunterricht 43 (6), 1996, S. 3–7.

Wittmann, Erich Christian, *Über das ‚rechnende Zählen' zum ‚denkenden Rechnen'*, In: Die Grundschulzeitschrift. Mit Kindern Schule machen 25 (248/249), 2011, S. 52–55.

Wittmann, Erich Christian, *Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule?*, In: Monika Baum und Hans Wielpütz (Hg.), Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch, Seelze, Kallmeyer, 2003, S. 18–48.

Wittmann, Erich Christian, *Wider die Flut der ‚bunten Hunde' und der ‚grauen Päckchen': Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens*, In: Erich Christian Wittmann und Gerhard N. Müller (Hg.), Handbuch produktiver Rechenübungen - Band 1, Stuttgart, Düsseldorf, Ernst Klett Schulbuchverlag, 1990, S. 152–166.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 1. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2006.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 2. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2006a.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 3. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2007a.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 4. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2007b.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Handbuch produktiver Rechenübungen – Band 1,* Vom Einspluseins zum Einmalseins, Stuttgart, Düsseldorf, Ernst Klett Schulbuchverlag, 1990.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Handbuch produktiver Rechenübungen – Band 2,* Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig, Ernst Klett Schulbuchverlag, 1992.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept*, In: Gerd Walther, Marja van den Heuvel-Panhuizen, Dietlinde Granzer und Olaf Köller (Hg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret, Berlin, Cornelsen Scriptor, 2007, S. 42–65.

Wittmann, Erich Christian; Müller, Gerhard N., *Wann ist ein Beweis ein Beweis?*, In: Peter Bender (Hg.), Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter, Berlin, Cornelsen, 1988, S. 237–257.

Wynands, Alexander; Amann, Alois; Franke, Karl Heinz; Graefe, Gerhard, *Mathe aktiv – 6. Schuljahr*, Braunschweig, Schroedel, 2005.

Yackel, Erna, *A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades*, In: Teaching Children Mathematics 3 (6), 1997, S. 276–280.

Zankov, Leonid Vladimirovic, *Didaktik und Leben*, Hannover, Schroedel, 1973.

Zazkis, Rina; Liljedahl, Peter, *Generalization of Patterns: The Tension between Algebraic Thinking and Algebraic Notation*, In: Educational Studies in Mathematics 49 (3), 2002, S. 379–402

.

Bildnachweis

2.1 Kolbinger, K. et al., *Nussknacker – Unser Rechenbuch für Klasse 1,* Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2001, S. 100

2.10 Affolter, W. et al., *mathbu.ch 7 – Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I*, Zug und Bern, Klett & Balmer; schulverlag blmv, 2003, S. 23

2.11 Schütte, S., *Die Matheprofis 2 – Ein Mathematikbuch für das 2. Schuljahr: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2004, S. 25 / © Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München 2001

2.12 Wittmann, E.; Müller, G., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 4. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2007, S. 14

2.17 Wittmann, E.; Müller, G., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 2. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2006, S. 52

2.24 Rinkens, H. et al., *Mathe aktiv – 5. Schuljahr*, 2. Aufl., Braunschweig, Schroedel, 2006, S. 78 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

3.6 Schütte, S., *Die Matheprofis 1 – Ein Mathematikbuch für das 1. Schuljahr: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2004, S. 14 / © Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München 2004

3.11 Rinkens, H. et al., *Mathe aktiv – 5. Schuljahr*, 2. Aufl., Braunschweig, Schroedel, 2006, S. 84 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

3.12 Kolbinger, K. et al., *Nussknacker – Unser Rechenbuch für Klasse 1,* Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2001, S. 105

3.13 Kolbinger, K. et al., *Nussknacker – Unser Rechenbuch für Klasse 2,* Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2001, S. 109

3.15 Rinkens, H. et al., *Mathe aktiv – 5. Schuljahr*, 2. Aufl., Braunschweig, Schroedel, 2006, S. 84 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

3.16 Wynands, A. et al., *Mathe aktiv – 6. Schuljahr*, Braunschweig, Schroedel, 2005, S. 112 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

A. S. Steinweg, *Algebra in der Grundschule,*
DOI 10.1007/978-3-8274-2738-0, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

3.20 Brandl, A.; Hartmann, K., *Mathematik Buch 6 – Ausgabe B*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Bayerischer Schulbuch Verlag, 2005, S. 134 / © Bayerischer Schulbuchverlag GmbH, München 2005

3.21 Schütte, S., *Die Matheprofis 3 – Ein Mathematikbuch für die Grundschule: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2005, S. 33 / © Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München 2005

3.24 Affolter, W. et al., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 6. Schuljahr*, Zug, Klett & Balmer, 2010, S. 16

3.36 Schütte, S., *Die Matheprofis 2 – Ein Mathematikbuch für das 2. Schuljahr: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2004, S. 96 / © Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München 2004

4.1 Rinkens, H.; Hönisch, K., *Welt der Zahl 1 – Bayern*, Hannover, Schroedel, 2001, S. 65 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

4.7 Kolbinger, K. et al., *Nussknacker – Unser Rechenbuch für Klasse 2,* Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2001, S. 56

4.13 Wittmann, E.; Müller, G., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 2. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2006, S. 45

4.15 Kolbinger, K. et al., *Nussknacker – Unser Rechenbuch für Klasse 1,* Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2001, S. 17

4.16 Rinkens, H.; Hönisch, K., *Welt der Zahl 2 – Bayern*, Hannover, Schroedel, 2001, S. 91 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

4.17 Schütte, S., *Die Matheprofis 2 – Ein Mathematikbuch für das 2. Schuljahr: Ausgabe D*, München, Düsseldorf, Stuttgart, Oldenbourg, 2004, S. 68

4.18 Radatz, H. et al., *Handbuch für den Mathematikunterricht – 2. Schuljahr*, Hannover, Schroedel, 1998, S. A25 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

4.30 Wittmann, E.; Müller, G., *Handbuch produktiver Rechenübungen – Band 2,* Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig, Ernst Klett Schulbuchverlag, 1992, S. 69

4.36 Gierlinger, W., *Zahlenzauber 4 – Mathematik für die Grundschule in Bayern*, München, Oldenbourg, 2006, S. 15 / © Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München 2003

4.40 Wittmann, E.; Müller, G., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 2. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2006, S. 113

5.1 Gierlinger, W., *Zahlenzauber 2 – Mathematik für die Grundschule in Bayern*, München, Oldenbourg, 2001, S. 97 / © Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München 2004

5.13 Wittmann, E.; Müller, G., *Handbuch produktiver Rechenübungen – Band 2,* Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig, Ernst Klett Schulbuchverlag, 1992, S. 83

5.18 Rinkens, H.; Hönisch, K., *Welt der Zahl 3 – Bayern*, Hannover, Schroedel, 2002, S. 105 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

5.19 Oehl, W.; Palzkill, L., *Welt der Zahl – 2. Schuljahr*, Hannover, Schroedel, 1972, S. 46 / Copyright: Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig www.schroedel.de

5.20 Keller, K.-H.; Pfaff, P.; Bornemann, W., *Das Mathebuch 3*, Offenburg, Mildenberger, 2006, S. 28

6.2 Affolter, W. et al., *mathbu.ch 7 – Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I*, Zug und Bern, Klett & Balmer; schulverlag blmv, 2003, S. 33

6.3 Wittmann, E.; Müller, G., *Das Zahlenbuch – Mathematik im 3. Schuljahr,* Ausgabe Bayern, Leipzig, Ernst Klett Grundschulverlag, 2007, S. 101

Alle anderen Abbildungen sind in Projekten entstanden bzw. von der Autorin erstellt.

Index

A. S. Steinweg, *Algebra in der Grundschule,*
DOI 10.1007/978-3-8274-2738-0, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

P

R

S

T

U

V

W

Z