Anhang

Einführung in die Schlußlehre

1 Die Schlußlehre handelt von Aussagen und Beweisen. Beispiele von *Aussagen* sind etwa: *Die Gleichung* $x^2 + 1 = 0$ *hat keine Lösung* oder *2 ist größer als 3* oder *Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden läuft genau eine Parallele zu dieser Geraden* (Parallelenpostulat in der Formulierung von Proklos).

Wie man sieht, können Aussagen 'wahr', 'falsch' oder 'unbeweisbar' sein. An sich sind sie an keinen Wahrheitsbegriff gebunden. Meist ergibt sich ein Wahrheitsgehalt nur im Zusammenhang mit anderen Aussagen.

Aussagen werden in einer bestimmten Sprache ausgedrückt. In den Begriffsbildungen, die die Logik entworfen hat, erscheinen Aussagen als Sätze formaler Sprachen. Solche Sprachen beruhen auf simplen Wortbildungsregeln und Grammatiken, vermeiden somit die vielen Zweideutigkeiten herkömmlicher 'Idiome', führen aber zu unübersichtlichen immens langen Sätzen.

Da wir uns hier einer herkömmlichen Sprache bedienen, müssen wir auf eine genaue Definition des Aussagenbegriffs verzichten. Unsere Aussagen werden zwar in Sätzen der deutschen Sprache formuliert, können jedoch nicht mit solchen Sätzen identifiziert werden. Denn erstens können verschiedene Sätze dieselbe Aussage liefern; so wird durch *Es existiert keine Zahl* x *so, daß* $x^2 = -1$ dieselbe Aussage formuliert wie in unserem ersten Beispiel. Zweitens sind viele Sätze mehrdeutig, weil Wörter mehrere Bedeutungen haben oder weil Teile der beabsichtigten Aussagen unterdrückt werden, wenn sie als selbstverständlich betrachtet werden; so wird in unserem ersten Beispiel verschwiegen, daß nur reelle Lösungen gefragt sind. Schließlich liefern die meisten Alltagssätze keine Aussagen in unserem Sinne; denn wir wollen nicht versuchen, Sätze wie *Der FC Bayern steckt in einer Krise* in ein logisch kohärentes System von Aussagen einzubinden. Wir beschränken uns hier auf Aussagen über *Terme*, d.h. über mathematische Objekte wie Zahlen, Punkte, Funktionen, Variablen, ...

2 Wenn wir schon auf eine genaue Definition des Aussagenbegriffs verzichten, so wollen wir zumindest einige Konstruktionsregeln angeben:

a) Die *Gleichsetzung*: Terme können immer gleichgesetzt werden. So erhält man etwa die als 'wahr' geltende Aussage *Die Lösungsmenge der Gleichung* $x^2 - 1 = 0$ *ist gleich* $\{-1, 1\}$ und die 'falsche' Aussage '$2 = [0, 1]$'.

b) Die *Zugehörigkeit*: Sätze wie *Der Punkt P liegt auf der Geraden* $\mathcal{G}$, *P gehört zur Geraden* $\mathcal{G}$ oder *P ist ein Element der Geraden* $\mathcal{G}$ liefern dieselbe Aussage, die oft auch formelhaft mit Hilfe des Zugehörigkeitszeichens $\in$ ausgedrückt wird: '$P \in \mathcal{G}$'.

Aus beliebigen Aussagen können neue Aussagen wie folgt gewonnen werden:

c) Zunächst gehört zu jeder Aussage ϕ eine *Negation* $\neg\phi$ dieser Aussage. So ist *Die Gleichung* $x^2 + 1 = 0$ *hat keine Lösung* die Negation von *Die Gleichung* $x^2 + 1 = 0$ *hat eine Lösung*. Die Negation von *2 ist größer als 3* ist *2 ist nicht größer als 3*; sie ist zu unterscheiden von *2 ist kleiner als 3*.

d) Aus je zwei Aussagen ϕ und ψ wird eine Aussage $\phi \to \psi$ (in Worten: *wenn* ϕ *dann* ψ) gewonnen. So erhält man etwa die 'wahre', anscheinend abstruse Aussage *'Wenn 2 größer ist als 3, dann hat die Gleichung* $x^2 + 1 = 0$ *eine Lösung'*.

e) Die Konstruktionen c) und d) können auch kombiniert werden: so erhält man aus ϕ und ψ die Aussagen $\phi \vee \psi = (\neg\phi) \to \psi$ (in Worten: ϕ *oder* ψ) und $\phi \wedge \psi = \neg(\phi \to \neg\psi)$ (in Worten: ϕ *und* ψ).

f) *Existenzaussagen*: Die Aussage *Es existieren reelle Zahlen x und y so, daß* $x^2 + y^2 = 1$ wird oft formelhaft mit Hilfe des Zeichens $\exists$ (*Existenzquantor*) ausgedrückt:

$$\exists x\, \exists y \Big(\big((x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \big) \wedge (x^2 + y^2 = 1) \Big).$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.
Der Ausdruck $\big((x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \big) \wedge (x^2 + y^2 = 1)$ liefert hier keine Aussage, weil x und y unbestimmte *Variablen* sind. Er ist eine *Aussageform*, die verschiedene Aussagen liefert, wenn die Variablen durch Zahlen ersetzt oder wie oben durch Existenzquantoren zu einer Existenzaussage *gebunden* werden.

g) Eine Aussage wie *Für alle reellen x und alle reellen y gilt* $x^2 + y^2 > 0$ ist eine 'doppelt' negierte Existenzaussage:

$$\neg(\exists x)(\exists y) \Big(\neg \big((x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \to (x^2 + y^2 > 0) \big) \Big).$$

In der Praxis kürzt man diese Formel wie folgt mit Hilfe des Zeichens $\forall$ (*Allquantor*) ab:

$$(\forall x)(\forall y) \big((x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \to (x^2 + y^2 > 0) \big)$$

3 Zu jeder Aussagenmenge Γ gehört ihr *logischer Abschluß* $\overline{\Gamma}$, der die Aussagen umfaßt, die von Γ *impliziert* werden. Zur Beschreibung von $\overline{\Gamma}$ listet die Schlußlehre genaue Konstruktionsregeln auf, woraus insbesondere folgt, daß $\overline{\Gamma}$ die Menge Γ (Voraussetzungsregel) sowie den logischen Abschluß $\overline{\Delta}$ jeder Teilmenge Δ von $\overline{\Gamma}$

(Kettenregel) enthält. Von den übrigen Regeln seien hier nur die wichtigsten angeführt. Dabei bedeutet die Notation $\Gamma \vdash \phi$, daß Γ die Aussage ϕ impliziert; analog bedeutet $\Gamma, \psi \vdash \phi$, daß ϕ von der Aussagenmenge impliziert wird, die aus ψ und den Aussagen aus Γ besteht ... :

a) $\Gamma \vdash (t = t)$ für jede Aussagenmenge Γ und jeden 'konstanten' Term t (Gleichheitsregel). Insbesondere wird $t = t$ von der 'leeren' Aussagenmenge $\emptyset$ impliziert.

b) $\psi, \neg\psi \vdash \phi$ für alle Aussagen ϕ und ψ (Widerspruchsregel).

c) Aus $\Gamma, \psi \vdash \phi$ und $\Gamma, \neg\psi \vdash \phi$ folgt $\Gamma \vdash \phi$ (Fallunterscheidungsregel).

d) Aus $\Gamma, \phi \vdash \psi$ folgt $\Gamma \vdash (\phi \to \psi)$ (Implikationsregel).

e) $\phi, (\phi \to \psi) \vdash \psi$ (Modus ponens).

f) Sind $a, b, \dots, c$ konstante Terme und $\phi(x, y, \dots, z)$ eine Aussageform mit den freien Variablen $x, y, \dots, z$, so gilt $\phi(a, b, \dots, c) \vdash (\exists x)(\exists y) \dots (\exists z)\phi(x, y, \dots, z)$ (Substitutionsregel).

4 Durch Zusammensetzung ergeben sich aus 3 weitere Konstruktionsregeln:

a) Aus $\Gamma \vdash (\phi \to \psi)$ folgt $\Gamma, \phi \vdash \psi$ (Umkehrung der Implikationsregel):
Denn aus $\phi, (\phi \to \psi) \vdash \psi$ (Modus ponens) folgt $\Gamma, \phi, (\phi \to \psi) \vdash \psi$ sowie $\Gamma, \phi \vdash \psi$, weil $\phi \to \psi$ zu $\overline{\Gamma}$ gehört (Kettenregel).

b) $(\phi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \neg\phi)$ (1. Kontrapositionsregel):
Denn aus $\phi, (\phi \to \psi) \vdash \psi$ (Modus ponens) folgt $\phi, (\phi \to \psi), \neg\psi \vdash \psi$.
Mit $\phi, (\phi \to \psi), \neg\psi \vdash \neg\psi$ folgt $\phi, (\phi \to \psi), \neg\psi \vdash \neg\phi$ (Widerspruchsregel).
Aus $\phi, (\phi \to \psi), \neg\psi \vdash \neg\phi$ und $\neg\phi, (\phi \to \psi), \neg\psi \vdash \neg\phi$ folgen schließlich
$(\phi \to \psi), \neg\psi \vdash \neg\phi$ (Fallunterscheidung)
und das gewünschte $(\phi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \neg\phi)$ (Implikationsregel).
Ähnlich beweist man die Regeln
$(\phi \to \neg\psi) \vdash (\psi \to \neg\phi)$ (2. Kontrapositionsregel),
$(\neg\phi \to \psi) \vdash (\neg\psi \to \phi)$ (3. Kontrapositionsregel),
$(\neg\phi \to \neg\psi) \vdash (\psi \to \phi)$ (4. Kontrapositionsregel).
Zum Beweis der 4. Regel etwa ersetze man ϕ, $\neg\phi$, ψ und $\neg\psi$ beziehungsweise durch $\neg\phi$, ϕ, $\neg\psi$ und ψ im Beweis der 1. Regel.
Natürlich fallen die Kontrapositionsregeln 2–4 mit der ersten zusammen, wenn die zugrunde liegende Sprache so beschaffen ist, daß eine doppelte Negation $\neg\neg\phi$ stets mit ϕ übereinstimmt. Dies mag so sein in der Alltagssprache, wenn wir die doppelte Negation *Es stimmt nicht, daß die Gleichung* $x^2 + 1 = 0$ *keine Lösung hat* als reine Umformulierung der Aussage *Die Gleichung* $x^2 + 1 = 0$ *hat eine Lösung* auffassen. Jedoch unterscheidet man ϕ von $\neg\neg\phi$ in den üblichen formalen Sprachen der Logik. In diesen ist $\neg\neg\phi$ nur 'äquivalent' zu ϕ im Sinn der Implikation:

c) $\phi \vdash \neg\neg\phi$ und $\neg\neg\phi \vdash \phi$ (Regeln der doppelten Negation):
Denn aus $\neg\phi \vdash \neg\phi$ (Voraussetzungsregel) folgt
$\emptyset \vdash (\neg\phi \to \neg\phi) \vdash (\phi \to \neg\neg\phi)$ (Implikations- und 2. Kontrapositionsregel).

Aus $\emptyset \vdash (\phi \to \neg\neg\phi)$ (Kettenregel) folgt dann $\phi \vdash \neg\neg\phi$ (Umkehrung der Implikationsregel).

d1) $\psi \vdash (\phi \to \psi)$:
Aus $\psi, \phi \vdash \psi$ (Voraussetzungsregel) folgt nämlich $\psi \vdash (\phi \to \psi)$ (Implikationsregel).

d2) $\neg\phi \vdash (\phi \to \psi)$:
Gemäß Kettenregel folgt dies aus $\neg\phi \vdash (\neg\psi \to \neg\phi)$ und $(\neg\psi \to \neg\phi) \vdash (\phi \to \psi)$ (4. Kontrapositionsregel)

d3) $\phi, \neg\psi \vdash \neg(\phi \to \psi)$:
Denn aus $\phi, (\phi \to \psi) \vdash \psi$ (Modus ponens) folgt $\phi \vdash \big((\phi \to \psi) \to \psi\big)$ (Implikationsregel) sowie $\phi \vdash \big(\neg\psi \to \neg(\phi \to \psi)\big)$ (1. Kontrapositions- und Kettenregel). Die Umkehrung der Implikationsregel liefert nun die gewünschte Behauptung.

e1) $\phi, \psi \vdash \phi \wedge \psi$ (Konjunktionsregel):
Denn aus $\phi, (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\psi$ (Modus ponens) folgt $\phi \vdash \big((\phi \to \neg\psi) \to \neg\psi\big)$ (Implikationsregel). Wegen der 2. Kontrapositions- und der Kettenregel gilt dann auch $\phi \vdash \big(\psi \to \neg(\phi \to \neg\psi)\big)$. Die Umkehrung der Implikationsregel liefert nun die gewünschte Behauptung.

e2) $(\phi \wedge \psi \vdash \phi)$:
Denn aus $\neg\phi \vdash (\phi \to \neg\psi)$ (d2) folgt $\emptyset \vdash \big(\neg\phi \to (\phi \to \neg\psi)\big) \vdash \big(\neg(\phi \to \neg\psi) \to \phi\big)$ (3. Kontrapositionsregel) und $\neg(\phi \to \neg\psi) \vdash \phi$ (Umkehrung der Implikationsregel).

e3) $(\phi \wedge \psi \vdash \psi)$:
Denn aus $\neg\psi \vdash (\phi \to \neg\psi)$ (d1) folgt $\emptyset \vdash \big(\neg\psi \to (\phi \to \neg\psi)\big) \vdash \big(\neg(\phi \to \neg\psi) \to \psi\big)$ (3. Kontrapositionsregel) und $\neg(\phi \to \neg\psi) \vdash \psi$ (Umkehrung der Implikationsregel).

f1) $\psi \vdash (\phi \vee \psi) \vdash (\psi \vee \phi)$ (Disjunktionsregel):
Nach Definition gilt nämlich $(\phi \vee \psi) = (\neg\phi \to \psi)$. Die erste Implikation folgt also aus d1), die zweite aus der 3. Kontrapositionsregel.

f2) $(\phi \vee \psi), \neg\phi \vdash \psi$ (Modus ponens).

5 Die Konstruktionsregeln des logischen Abschlusses liefern eine Reihe von Aussagen α so, daß $\emptyset \vdash \alpha$. Aus $\phi \vdash \phi$ und der Implikationsregel erhält man etwa $\emptyset \vdash (\phi \to \phi)$ für jede Aussage ϕ. Insbesondere gilt die Implikation *'Tertium non datur'*: $\emptyset \vdash (\psi \vee \neg\psi) = (\neg\psi \to \neg\psi)$.

Aussagen, die von der leeren Aussagenmenge impliziert werden, kann man als *absolut wahr* bezeichnen. Weitere Beispiele absolut wahrer Aussagen sind: $t = t$, $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$, $(\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)$, $\phi \to \neg\neg\phi$, $(\psi \wedge \neg\psi) \to \phi, \ldots$

Da den Mathematiker aber nach mehr dürstet als nur nach Absolutem, stellt er in der Regel seinen Schlüssen Aussagen Γ voran, die er seiner Erfahrung entnimmt und *Axiome* nennt. Beispiele solcher Axiome sind etwa das Parallelenpostulat im euklidischen Aufbau der Geometrie oder das *Extensionalitätsaxiom* der

Mengenlehre (Mengen x und y sind genau dann gleich, wenn jedes z aus x zu y gehört und jedes z aus y zu x):

$$\forall x \, \forall y \Big(\forall z \big((z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x) \big) \to x = y \Big).$$

Das Ziel des Mathematikers ist die Ergründung des logischen Abschlusses $\overline{\Gamma}$ der vorangestellten Aussagenmenge. Wir wollen hier annehmen, daß seine Axiome unser Vertrauen verdienen, daß Γ also keinen Widerspruch der Form $(\neg\phi \wedge \phi) = \neg(\neg\phi \to \phi)$ impliziert. Dementsprechend nennen wir eine Aussage ϕ *wahr*, wenn sie zu $\overline{\Gamma}$ gehört; wir nennen sie *falsch*, wenn $\neg\phi$ wahr ist.

Eine Aussage der Form $\phi \vee \psi$ ist wahr, wenn eine der Aussagen ϕ, ψ wahr ist (Disjunktionsregel). Sie ist falsch, wenn ϕ und ψ falsch sind (4f2). Sie kann aber durchaus wahr sein, ohne daß eine der Aussagen ϕ, $\neg\phi$, ψ, $\neg\psi$ zu $\overline{\Gamma}$ gehört. So ist die Aussage $\psi \vee \neg\psi$ absolut wahr. Daraus folgt im allgemeinen aber nicht, daß ψ wahr ist oder falsch. Es kann durchaus sein, daß ψ nicht *entscheidbar* ist, d.h. daß weder ψ noch $\neg\psi$ von Γ impliziert werden.

Beschränken wir uns auf *entscheidbare* Aussagen, so erhalten wir eine *Wahrheitsfunktion*, die jeder entscheidbaren Aussage einen der beiden Werte w (= wahr) oder f (= falsch) zuordnet. Die folgende 'Wahrheitstafel' liefert den Wahrheitswert von Zusammensetzungen entscheidbarer Aussagen. Die Entscheidbarkeit dieser Zusammensetzungen folgt leicht aus 3 und 4. Ist ϕ etwa wahr und ψ falsch, so sind $\neg\phi$, $\phi \to \psi$, $\phi \wedge \psi$ falsch und $\phi \vee \psi$ wahr.

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \to \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge \psi$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	f
f	f	w	w	f	f

6 Für eine präzisere Besprechung der Schlußlehre müssen wir auf die Expertenliteratur verweisen, etwa auf [EFT96]. Die dort erläuterten Grammatiken formaler Sprachen sind durchaus simpel. Wir gehen hier aber nicht näher darauf ein, weil wir unsere Sätze in der 'Alltagssprache' formulieren. Diese ist dem Leser geläufig und erlaubt viele Abkürzungen nach geeigneter Einarbeitung. Sie unterscheidet auch nicht scharf zwischen Syntax und Semantik. Für sie ist eine *Menge* noch eine *Zusammenfassung von Gegenständen der Sachwelt oder des Denkens*. Sie wird nicht zu einem reinen Buchstaben degradiert, der in Zeichenzusammensetzungen wie $x \in M$ auftaucht und jeglichen Sinnes entleert wurde. In formalen Sprachen wird die Interpretation dem Leser überlassen, in der Alltagssprache wird sie in der Regel mitgeliefert.

Literaturverzeichnis

[Art93] M. Artin. *Algebra.* Birkhäuser, Basel, 1993.

[Ded32] R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Gesammelte mathematische Werke, Band 3. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1932.

[Dug66] J. Dugundji. *Topology.* Allyn & Bacon, Boston, 1966.

[Ebb77] H.-D. Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre.* Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1977.

[EFT96] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.

[FP85] U. Friedrichsdorf, A. Prestel. *Mengenlehre für den Mathematiker.* Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1985.

[Gab96] P. Gabriel. *Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra.* Birkhäuser, Basel, 1996.

[Hal69] P. Halmos. *Naive Mengenlehre.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1969.

[Hil23] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* Anhang VI: Über den Zahlbegriff. Teubner, Leipzig, 1923.

[IK66] E. Isaacson, H.B. Keller. *Analysis of Numerical Methods.* Wiley, New York, 1966.

[Koe83] M. Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* Springer Verlag, Berlin, 1983.

[Lan30] E. Landau. *Grundlagen der Analysis* (4. Auflage, Chelsea, New York 1965). Leipzig, 1930.

[Ost45] A. Ostrowski. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I–III.* Birkhäuser, Basel, 1945–1954.

[Wal82] R. Walter. *Einführung in die lineare Algebra.* Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1982.

[Wal85] R. Walter. *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985.

[WS79] H. Werner, R. Schaback. *Praktische Mathematik II.* Springer Verlag, Berlin, 1979.

Index