

Anhang

Die physikalische Bedeutung der vektoriellen Differentialoperatoren¹

In der Vektorrechnung unterscheidet man grundsätzlich zwei Arten von Zahlengrößen, nämlich Skalare und Vektoren. Skalare sind einfache Zahlengrößen, wie z. B. Temperatur und Konzentration. Vektoren hingegen sind Größen, denen über ihren Betrag hinaus noch eine räumliche Richtung zugeordnet ist, wie z. B. Geschwindigkeit und Kraft. Hat nun irgendeine physikalische Größe in jedem Punkt des Raumes einen wohldefinierten Wert, so wird dadurch ein Feld dieser Größe erklärt. Ist diese Größe ein Skalar, so spricht man von einem skalaren Feld (z. B. das Temperaturfeld um einen erwärmten Körper), ist diese Größe jedoch ein Vektor, so erhält man ein Vektorfeld (z. B. das Geschwindigkeitsfeld in einer Flüssigkeitsströmung). Natürlich kann man jede Größe, gleich ob in einem Skalar- oder Vektorfeld, nach den Lagekoordinaten differenzieren. Es läßt sich nun zeigen, daß mit jeder solchen Differentialoperation ein bestimmter physikalischer Sinn verbunden werden kann, der unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist. Im folgenden soll die physikalische Bedeutung der beiden für den Verfahrenstechniker wichtigsten Differentialoperationen, nämlich des Gradienten und der Divergenz, betrachtet werden. Weiters soll ein kurzer Überblick über die in diesem Buch verwendeten kombinierten Differentialoperatoren gegeben werden.

Vorerst muß jedoch zur besseren Handhabung der Differentialoperationen noch ein Operator eingeführt werden, der im kartesischen Koordinatensystem folgende Form hat:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Der Operator ∇ heißt „Nabla“, er ist kein Vektor im geometrischen Sinn, da ihm keine Größe zugeordnet ist, kann jedoch formal als Vektor behandelt werden² [2].

Der Gradient

Der Gradient ist das Produkt einer skalaren Größe Φ mit dem „Vektor“ ∇ :

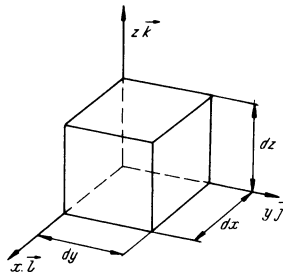
$$\nabla \cdot \Phi = \text{grad } \Phi$$

¹ Vergleiche EUKEN-JAKOB, Der Chemie-Ingenieur, Leipzig: Akadem. Verlagsges.m.b.H. 1933

² Vergleiche H. MARENAU, G. M. MURPHY, Die Mathematik für Physik und Chemie, 1, Frankfurt a. M.-Zürich: Verlag Harri Deutsch 1965.

Der Ausdruck $\text{grad } \Phi$ stellt einen Vektor dar, da nach den Gesetzen der Vektorrechnung das Produkt eines Vektors mit einem Skalar wieder einen Vektor ergibt. Der Vektor $\text{grad } \Phi$ steht normal auf Flächen, für die gilt $\Phi = \text{const.}$, und gibt Richtung und Stärke des maximalen Anstieges von Φ in einem bestimmten Punkt des Raumes an.

Tabelle I. Darstellung der Vektoroperatoren im kartesischen Koordinatensystem



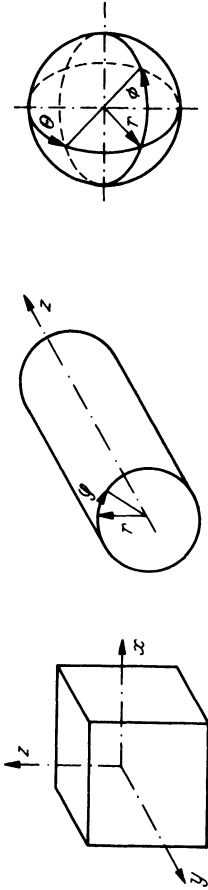
Koordinaten	x	y	z
Einheitsvektoren	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
Nabla	$\mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$	$+$	$\mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$
Grad ϕ	$\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$+$	$\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}$
ds	$\mathbf{i} \cdot dx$	$+$	$\mathbf{j} \cdot dy + \mathbf{k} \cdot dz$
$ds \cdot \text{Grad } \phi$	$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$	$+$	$\frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$
$\text{div } \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}$	$+$	$\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
$\text{div Grad } \phi$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$	$+$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

Bildet man das skalare Produkt des Vektors $\text{grad } \Phi$ mit einem raumfesten Vektor ds oder, mit anderen Worten, berechnet man die Projektion des Vektors $\text{grad } \Phi$ auf den Vektor ds , so erhält man einen Skalar. Diese Größe beschreibt die Veränderung der skalaren Größe Φ , wenn man von einem bestimmten Punkt des Raumes aus in die Richtung von ds schreitet. Die formelmäßige Erfassung dieses Vorganges lautet

$$ds \cdot \text{grad } \Phi$$

ihre rechnerische Ausführung kann der Tabelle I entnommen werden.

Tabelle II. Darstellung der Vektoroperatoren in verschiedenen Koordinatensystemen



	Kartesische Koordinaten	Zylindrische Koordinaten	Sphärische Koordinaten
Gradient $\nabla\phi$	$\mathbf{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}$	$\mathbf{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}$	$\mathbf{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\phi}$
Divergenz ∇A	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Laplace $\nabla^2\phi$	$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}$

Die Divergenz

Die Divergenz ist das skalare Produkt des ∇ -Operators mit einem Vektor \mathbf{A} .

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}$$

Der Ausdruck $\operatorname{div} \mathbf{A}$ stellt eine skalare Größe dar. Die physikalische Bedeutung dieser Größe kann als der Vektorfluß aus der Volumseinheit erklärt werden. Ist \mathbf{A} z. B. die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsströmung und c_i die Konzentration einer bestimmten Teilchenart i in dieser Flüssigkeit, so ist $\operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot c_i)$ die Molzahl an i , die aus der Volumseinheit mehr entnommen als zugeführt wird (vergleiche dazu Kap. 4).

Kombinierte Differentialoperatoren

Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, die besprochenen Differentialoperationen hintereinander auszuführen. Als erstes Beispiel der dadurch gewonnenen kombinierten Differentialoperatoren soll die Aufeinanderfolge von Gradient und Divergenz behandelt werden:

$$\Delta = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi)$$

Δ wird als Laplace-Operator bezeichnet. Da der Operator Δ einen Skalar darstellt, nämlich das skalare Produkt

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla$$

ist seine Anwendung auch auf Vektoren möglich.

In diesem Zusammenhang sei darauf verwiesen, daß die oben erwähnte Operation $\operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot c)$, worin \mathbf{A} einen Vektor (z. B. die Geschwindigkeit) und c einen Skalar (z. B. die Konzentration) darstellt, auch in der Form

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot c) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} c + c \cdot \operatorname{div} \mathbf{A}$$

geschrieben werden kann. Die Ableitung dieser Form kann leicht aus der Tabelle I entnommen werden.

Tabelle II gibt die Darstellung der wichtigsten Vektoroperatoren in verschiedenen Koordinatensystemen wieder.

Sachverzeichnis

- Absorption
 - selektive 211
- Ähnlichkeitstheorie 120, 175, 195
- Aktivitätskoeffizient 230
- Analogie
 - allgemeine 180, 198
 - dreifach strenge 185
 - erweiterte 180, 185, 187, 194, 200
 - mathematische 179
 - physikalische 179
 - strenge 180, 194
- Analogie
 - der Austauscheffekte 179
 - des Impuls- und Wärmeaustausches nach Reynolds 180
 - des Impuls- und Wärmeaustausches nach Prandtl 189
 - des Wärme- und Stoffaustausches nach Lewis 184
 - nach Colburn 191
- Anergiebilanz 97
- Anströmlänge 251
 - charakteristische 252
- Äquivalenzreaktionsgeschwindigkeit 70
- Äquivalenzreaktionsstrom 71
- Arbeitsweise
 - diskontinuierliche 14
 - halbkontinuierliche 14, 17
 - kontinuierliche 14, 15
- Assoziationsfaktor 230
- Aufladung 38, 67
- Ausdehnungskoeffizient
 - kubischer 147
- Austauscheffekte 36, 179
- Austauschfläche 41
- Austauschgröße 36
- Austauschkoeffizient 182, 183
 - effektiver 66
 - molekularer 182
 - turbulenter 65, 182, 185, 205
- Austauschstrom 40
 - effektiver 47
 - turbulenter 184
- Austauschstromdichte 40, 41, 42, 50
- Bedingungen 24, 31
 - aus den Bilanzen 25
 - aus den Gleichgewichten 25
 - aus den Identitäten 25
 - konstruktionsbedingte 25
- Bilanz
 - auf Basis der partiellen Molmenge 89
 - auf Basis der partiellen Masse 91
 - auf Basis der Gesamtmasse 92
 - auf Basis der Gesamtmolmenge 93
 - für Verfahren mit Rücklaufführung 109
 - für Verfahren mit Umlaufführung 110
 - kinetische 108
 - stöchiometrische 108
- Bilanzgebiet 81
- Bilanzgleichung 36, 79
 - differentielle 80, 87
 - integrale 80, 103
- Bilanzgleichung
 - für geschlossenes System 80
 - für offenes System 80
- Bilanzgrenzen 81
- Blasenregime 21
- Bodenkolonne 19
- Boltzmann-Konstante 223, 228
- Brinkmann-Zahl 195
- Colburnsche j -Faktoren
 - des Stoffaustausches 191
 - des Wärmeaustausches 191
- Damköhler-Zahl 158
 - erster Art 158, 354
 - zweiter Art 352, 354
 - dritter Art 159
 - vierter Art 354
- Diffusion 38, 51, 184, 203, 206

- Diffusion, allgemeine 90, 199
 - äquimolare 90, 199, 206, 207
 - einseitige 90, 199, 207, 210
 - instationäre 218
 - nichtäquimolare zweiseitige 216
 - Taylor 205
- Diffusionshemmung 352, 360
- Diffusionskoeffizient 169, 205, 208, 219, 221, 224, 312
 - in Feststoffen 230
 - von Flüssigkeiten 228
 - von Gasen 225
 - Druckabhängigkeit des 226
 - Temperaturabhängigkeit des 225
- Diffusionsstrom 52
- Diffusionsstromdichte 210, 277
- Dimensionsanalyse 123, 140
- Dispersionskoeffizient
 - axialer 205
 - radialer 205
- Dispersionsmodell 205, 268
- Dissipation 195
- Divergenz 372

- Eigendiffusionskoeffizient 228
- Einlaufkennzahl 309
- Energie
 - innere 93
 - kinetische 93
 - potentielle 93
- Energieaustausch 36
- Energiebilanz
 - differentielle 93
 - integrale 111
- Energieerhaltungssatz 79
- Energiestrom
 - konvektiver 63
- Energietransport
 - konvektiver 62
 - molekularer 54
- Energieumwandlung 73
- Entladung 38, 67
- Enthalpie 73, 95
 - partielle molare 74
 - Reaktionsenthalpie 74
- Ergiebigkeit 88
 - allgemeine 44
 - der Austauschströme 44
 - flächenbezogene 44
 - volumsbezogene 44
- Ergänzungsgrößen 130, 140
- Euler-Zahl 158
 - zweite 160
- Exergiebilanz 97
- Exponentenmethode 141

- Fallfilmkolonne 266, 297
- Fanningscher Faktor des Strömungswiderstandes 183
- Fehlerfunktion 236
- Feldgleichung 104
- Feuchtigkeit
 - relative 314
- Fickscher Ansatz 51
 - 1. Ficksches Gesetz 207, 208, 273, 351
 - 2. Ficksches Gesetz 91, 219, 276
- Fickscher Diffusionsstrom 51
- Film-Penetrationsmodell
 - kombiniertes 271
- Filmregime 21
- Filmströmung 297
- Flüssigkeitskennzahl 311
- Fourier-Zahl 128
- Freiheitsgrad 22, 27, 29, 32, 170
- Froude-Zahl 168
- Füllkörper-Absorptionskolonne 121, 155, 166, 170

- Galilei-Zahl 168, 172, 174
- Gegenstrombetrieb 19
- Geometrie-Zahl 139, 168, 174
- Geschwindigkeitsprofil 80
- Gleichgewichtsstufe 19
- Gleichstrombetrieb 19
- Grenzfläche 42
- Grenzflächenspannungsgradient 291
- Grenzschicht 38
- Grundeinheiten 23
- Grundoperationen 1, 3, 11
 - biologische 3, 4, 5
 - chemische 3, 4, 5
 - physikalische 3, 4, 5
- Grundvorgänge 3

- Hadamard-Rybczynski-Korrekturfaktor 323
- Hatta-Zahl 364
- Henry-Konstante 257
- heterogenes System 81

- Identitäten 25
- Impuls 36, 40, 43
- Impulsaustausch 36, 167, 174
- Impulsbilanz

- differentielle 98
- Impulsstrom
 - konvektiver 63
- Impulsstromdichte 56
- Impulstransport
 - konvektiver 63
 - molekularer 55
- Impulsübergangskoeffizient 39, 182
- Impulsumwandlung 76
- Impulsumwandlungsergiebigkeit 77
- Invarianz 123, 174

- Komplex 124, 128
- Komponentenreaktionsgeschwindigkeit 70
- Komponentenreaktionsstrom 71
- Kompressibilitätsfaktor 226
- Konduktion 37, 46
- Konvektion 37, 46, 59, 203
- Konzentration 39, 84
 - fiktive 262
 - Massenkonzentration 40
 - partielle Massenkonzentration 40
 - volumsbezogene 39
- Konzentrationsgefälle
 - treibendes 185, 263
- Konzentrationsgradient 49, 203
- Konzentrationsprofil 16, 80, 161
- Kreuzstrombetrieb 19

- Laplace-Operator 372
- Leitgröße 130, 140, 144
- Leitstrom 47, 51, 161
 - molekularer 183
- Leitung 37, 46
- Loschmidt-Konstante 220, 228

- Makro-Bewegung 37
- Marangoni-Effekt 291
- Masse
 - partielle 51
- Massenbeladung 84
- Massenbruch 82, 83
- Massenkonzentration 82
- Massenstrom
 - konvektiver 63
- Massenverhältnis 82
- Matrizen-Methode 144
- Mikro-Bewegung 37
- Modellgesetz 127, 166
- Modellversuch 120, 166
- Molekularbewegung
 - thermische 38
- Molbeladung 84
- Molenbruch 82, 83
- Molkonzentration 82
- Molmenge
 - partielle 50, 89
- Molverhältnis 82

- Nabla-Operator 369
- Nernstsches Verteilungsgesetz 258
- Nettostrom 49
- Nettotransportstrom 106
- Newtonsches Fluid 57, 99
- Nußeltsche Zahl 139, 150

- Oberflächenerneuerungsfaktor 281
- Oberflächenerneuerungsmodell 271
- Oszillation 333

- Parallelströmung 56
- Partialdruck-Funktion 199
- Partialdruckgradient 208
- Peclet-Zahl 138, 156, 158
- Penetrationsmodell 271
- Penetrationstheorie 274
- Pfropfenströmung
 - ideale 16
- Phase
 - disperse 81
 - kontinuierliche 81
- Phasen
 - Kontakt der einzelnen 18
 - Verteilungsform der 18
- Phasenführung 18
- Phasengrenze 81
- Phasengrenzfläche 38, 185
- Porosität 155
- Prandtl-Zahl 186

- Quelle 39, 67

- Randgängigkeit 170
- Rayleigh-Zahl 152
- Reaktion
 - heterogene 347, 349
 - homogene 347
- Reaktionsgeschwindigkeit 348
- Reaktionsgeschwindigkeitsfaktor 348, 349
- Reaktionsgeschwindigkeitsgleichung 348
- Reaktionshemmung 353, 360
- Reaktionsordnung 348
- Reaktionsstromdichte 351
- Reaktionswärme 73

- Reaktionswärme, differentielle 75, 95
- Reaktionswärmestrom 75
- Regime-Konzept 172
- Reynolds-Zahl 122, 139, 145, 157, 300, 324
 - kritische 243, 302
- Rieselrohr 197
- Rohrreibungszahl 183, 190
- Rollzelle 293
- Rücklaufführung 109
- Rücklaufstrom 14
- Rührkessel
 - idealer 16
 - kontinuierlicher 16

- Schmidt-Zahl 122, 163, 186
- Sedimentationsgeschwindigkeit 194
- Senke 39, 67
- Selbstdiffusion 53, 92
- Shell-Texaco-Druckverfahren 115
- Sherwood-Zahl 122, 163, 238, 241, 311, 338, 358, 359, 366
 - bei Gegenstromführung 313
 - bei Gleichstromführung 313
 - für laminare Flüssigkeitsfilme 308
- Signifikanz-Kriterium 146
- Signifikanz-Methode 140, 145
- Simplex 123, 124, 131
- Spannungstensor 98
- Speichereffekt 37, 67, 80
- Speicher-Ergiebigkeit 45, 67
- Speicherstrom 41
- Stanton-Zahl 158, 163
- stationäre Betriebsweise 15
- Stefansches Gesetz 213
- Stoffaustausch 36, 167, 174
 - durch Grenzflächen 255
 - in einphasigen Systemen 203
 - und chemische Reaktion 346
- Stoffaustauschkoeffizient
 - turbulenter 90
- Stoffaustauschkonzept 19
- Stoffbilanz
 - differentielle 89
 - für Verfahren ohne chemische Reaktion 107
 - für Systeme mit chemischer Reaktion 108
- Stoffbilanzgleichung
 - integrale 106
- Stoffdurchgangskoeffizient 261
- Stoffstrom
 - konvektiver 63, 162
- Stoffstromdichte 52, 161, 207, 238
- Stofftransport
 - konduktiver 38
 - konvektiver 61
 - molekularer 50
- Stoffübergang
 - am Flüssigkeitsfilm 297
 - an Blasen und Tropfen 317
 - an festen Grenzflächen 234
 - an Kugelpartikeln 196, 245
- Stoffübergangskoeffizient 39, 121, 155, 167, 169, 174, 185, 198, 238, 261, 266, 307, 337
 - Korrekturfaktor des 290
 - technischer 312
- Stoffübergangswiderstand 256
- Stoffumwandlung 69
- Stokessches Gesetz 323
- Stoßintegral 222
- Strömungsrohr
 - ideales 16

- Temperaturprofil 80, 94
- Temperaturleitzahl 55, 128
- Totzeit 15, 17
- Transport
 - konduktiver 88
 - konvektiver 59, 88
 - turbulenter 64, 88
- Transportdichte 40
 - molekulare 42
- Transporteffekt 37, 46, 80
- Transport-Ergiebigkeit 45, 57
 - allgemeine konvektive 61
- Transport-Koeffizient 220
 - allgemeiner molekularer 50
- Transportstrom 41, 43, 46
 - konduktiver 47
 - konvektiver 63
- Transportstromdichte 46, 53
 - konvektive 42
 - molekulare 50
 - turbulente 42
- Trennstufenkonzept 19
- Tropfendurchmesser
 - kritischer 335
- Tropfenregime 21
- Tropfensäule 266
- Turbulenz 38, 46, 197
- Turbulenzballen 38, 64, 67

- Übergangseffekt 37, 38
- Übergangskoeffizient 42
- Übergangstrom 41, 71

- Übergangsstromdichte 42
 - Umwandlungseffekt 37, 39, 69, 80
 - Umwandlungsergiebigkeit 46, 69
 - Umwandlungsstrom 41

 - Variable
 - extensive 23
 - intensive 23
 - konstruktionsbedingte 23
 - Verdrängungsarbeit 75
 - Verdrängungsstrom 52
 - konvektiver 212
 - Verfahren 2
 - Verfahrensstufe 13
 - Verteilungsform 21
 - Versuchsplanung 9, 10
 - Verweilzeit 19, 275
 - Viskosität
 - dynamische 56, 228

 - Wärmeaustausch 174
 - Wärmekonzentration 54
 - Wärmeleitfähigkeit 54
 - Wärmestrom 55
 - Wärmestromdichte 54
 - Wärmeübergangskoeffizient 39, 139, 147, 182, 185, 194
 - Wärmetransport 54, 94
 - Wirbeldiffusionsmodell 312

 - Zähigkeit
 - dynamische 145
 - kinematische 57, 169
 - Zustandsgröße
 - intensive 14
 - Zustandsvariable 24
 - Zwei-Film-Modell 271
-

Computergesteuerter Fotosatz und Umbruch: Dipl.-Ing. Schwarz' Erben KG, A-3910 Zwettl, NÖ. –
Reproduktion und Offsetdruck: Novographic, Ing. Wolfgang Schmid, A-1230 Wien.