

Anhang.

Vektoranalytische Rechenregeln.

Das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ist

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

ihr vektorielles Produkt, dessen Richtung mit dem Drehsinn $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ eine Rechtsschraube bildet, ist

$$[\mathbf{a} \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \mathbf{a}] = (a_y b_z - a_z b_y, \dots, \dots)$$

mit dem absoluten Betrag:

$$|[\mathbf{a} \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Für Produkte aus drei Vektoren gilt

I. $\mathbf{a}[\mathbf{b} \mathbf{c}] = \mathbf{b}[\mathbf{c} \mathbf{a}] = \mathbf{c}[\mathbf{a} \mathbf{b}]$

II. $[\mathbf{a}[\mathbf{b} \mathbf{c}]] = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{a} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b}$

(der Punkt ist Trennungszeichen).

Für die Differentialoperationen:

III. $\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$

IV. $\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$

V. $\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \dots, \dots \right)$

gilt, falls unter r der von einem festen Bezugspunkte nach dem Orte der Differentialoperation gezogene Fahrstrahl verstanden wird, wie man durch Ausrechnung der drei Komponenten leicht nachprüft,

VI. $\text{rot } r = 0,$

VII. $\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{r}{r^3}, \quad (r = |\mathbf{r}|)$

VIII. $\mathbf{a} \cdot \text{grad } r = a,$

IX. $\text{grad } a^2 = 2 \mathbf{a} \cdot \text{grad } a + 2 [\mathbf{a} \text{ rot } a],$

X. $\text{rot grad } \varphi = 0,$

- XI. $\operatorname{div} \operatorname{rot} a = 0,$
 XII. $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$
 XIII. $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0,$
 XIV. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} a = \operatorname{grad} \operatorname{div} a - \nabla^2 a,$
 XV. $\operatorname{grad} a \cdot b = b \operatorname{div} a + a \operatorname{grad} \cdot b,$
 XVI. $c[\operatorname{grad} a] \cdot b = b \cdot c \operatorname{rot} a + [a c] \operatorname{grad} \cdot b,$
 XVII. $\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + v \operatorname{grad} \cdot a$

(substantielle Änderung = lokale Änderung + stationäre Änderung).

Bedeutet K eine geschlossene ebene Kurve, F die umschlungene Fläche, n den Einheitsvektor der äußeren Normalen der Kurve, ds ein Bogenelement, dr dessen Vektor, df ein Element von F , $d\mathfrak{f} = \epsilon df$ dessen Vektor normal zur Ebene, so daß $d\mathfrak{f}$ mit dem Umlaufssinn von dr eine Rechtsschraube bildet und e den Einheitsvektor senkrecht zur Ebene bedeutet, so gelten die Integralsätze:

- XVIII. $\oint_K dr = 0,$
 XIX. $\oint_K n ds = 0, \quad n ds = [dr e]$
 XX. $\oint_K [rn] ds = 0,$
 XXI. $\int_F \operatorname{div} a df = \oint_K a n ds, \quad (\text{Satz von Gauss})$
 XXII. $\int_F \operatorname{grad} a \cdot b df = \oint_K n a \cdot b ds,$
 XXIII. $\int_F \operatorname{rot} a d\mathfrak{f} = \oint_K a dr, \quad (\text{Satz von Stokes})$
 XXIV. $\int_F d\mathfrak{f}[\operatorname{grad} a] \cdot b = \oint_K dr a \cdot b.$

Die Sätze XXII und XXIV gehen aus XXI und XXIII hervor, sobald man dort a der Reihe nach durch ab_x, ab_y, ab_z ersetzt.

Literaturverzeichnis.

- 1) A. Betz, Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. **5** (1914), S. 253; ferner ebenda **3** (1912), S. 217, u. **4** (1913), S. 1.
- 2) —, Untersuchung einer Joukowskyschen Tragfläche. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. **6** (1915), S. 173.
- 3) H. Blasius, Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **58** (1910), S. 90.
- 4) —, Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **59** (1911), S. 225.
- 5) —, Stromfunktionen für Strömung durch Turbinenschaufeln. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **60** (1912), S. 354.
- 6) O. Blumenthal, Über die Druckverteilung längs Joukowskyscher Tragflächen. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. **4** (1913), S. 126.
- 7) W. Deimler, Zeichnungen zur Kuttaströmung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **60** (1912), S. 373; auch auszugsweise in der Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. **3** (1912), S. 63.
- 8) S. Finsterwalder, Die Aërodynamik als Grundlage der Luftschiffahrt. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. **1** (1910), S. 6.
- 9) L. Föppl, Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder. Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss., math.-phys. Klasse, München, 1913, S. 1.
- 10) O. Föppl, Windkräfte an ebenen und gewölbten Platten. Diss. Aachen 1911; auch Jahrb. der Motorluftschiffstudien-Ges. **4**, 1910/11, S. 51.
- 11) H. Föttinger, Über die physikalischen Grundlagen der Turbinen- und Propellerwirkung. Verh. d. Vers. von Vertr. d. Flugwiss. zu Göttingen 1911, München u. Berlin 1912, S. 37; insbesondere die Diskussionsbemerkungen dazu von L. Prandtl, S. 41.
- 12) R. Grammel, Ein Beitrag zur Theorie des Propellers. Jahrb. der Schiffbau. Gesellschaft 1916, S. 367.
- 13) —, Über ebene Zirkulationsströmungen und die von ihnen erzeugten Kräfte. Jahresber. d. deutschen Math.-Vereinigung **25** (1916), S. 16.
- 14) N. Joukowsky, De la chute dans l'air de corps légers de forme allongée, animés d'un mouvement rotatoire. Bull. de l'institut. aérodyn. de Koutchino, fasc. I, 2. éd., Moscou 1912, S. 51.
- 15) —, Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. **1** (1910), S. 281 und **3** (1912), S. 81.

- 16) Th. v. Kármán, Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. math.-phys. Klasse 1911, S. 509; sowie ebenda 1912, S. 547 und zusammen mit H. Rubach, Phys. Zeitschr. 13 (1912), S. 49.
 - 17) H. Rubach, Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaares hinter zylindrischen Körpern. Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Heft 185, Berlin 1916.
 - 18) W. M. Kutta, Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Ill. aëron. Mitteilungen 1902, S. 133.
 - 19) —, Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss., math.-phys. Klasse, München 1910, 2. Abh.
 - 20) —, Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen. Ebenda 1911, S. 65.
 - 21) F. W. Lanchester, Aërodynamik, deutsch von C. u. A. Runge, Leipzig u. Berlin, 1909/11.
 - 22) O. Martienssen, Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes, Berlin 1913.
 - 23) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III. intern. Math.-Kongresses, Heidelberg 1904, Leipzig u. Berlin 1905, S. 484; sowie die sich daran anschließenden Dissertationen von H. Blasius, Göttingen 1907, und E. Boltze, Göttingen 1908, H. Blasius, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56 (1908), S. 1, K. Hiemenz, Dinglers polytechn. Journal 326 (1911), S. 321.
 - 24) —, Ergebnisse und Ziele der Göttinger Modellversuchsanstalt. Verh. d. Vers. von Vertr. d. Flugwiss. zu Göttingen 1911, München u. Berlin 1912, S. 19.
 - 25) —, Flüssigkeitsbewegung. Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. IV, Jena 1913, S. 101.
 - 26) Lord Rayleigh (J. W. Strutt), On the irregular flight of a tennis-ball. Scientific papers, Vol. I, Cambridge 1899, S. 344.
 - 27) H. Reissner, Wissenschaftliche Fortschritte der Flugtechnik. Jahrb. d. Luftfahrt 2, München 1912, S. 343.
 - 28) A. Sonnefeld, Über Flüssigkeitsströmungen um zusammengesetzte zylindrische Schalen und die daraus folgenden Auftriebskräfte. Diss. Jena 1911.
 - 29) E. Trefftz, Graphische Konstruktion Joukowskyscher Tragflächen. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. 4 (1913), S. 130.
 - 30) C. Wieselsberger, Beitrag zur Erklärung des Winkelfluges einiger Zugvögel. Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch. 5 (1914), S. 225.
-

Nachweis der Definitionen.

Abbildung, konforme 50.
Achse, dynamische 32.
—, kinematische 29.
Anblasgeschwindigkeit 60.
Anstellwinkel 59.
Auftrieb, dynamischer 2.
Auftriebsdichte 12.
Auftriebsziffer 119.
Fluggeschwindigkeit 60.
Formwiderstand 112.
Fundamentalreihe der Geschwindigkeit 25.
Funktion, analytische 18.
Geschwindigkeit, komplexe 17.
Geschwindigkeitspotential 6.
Gitter, Gitterachse, -konstante 37.
Grenzschicht 104.
Gütegrad 122.
Jalousie 37.
Kavitation 7.
Konstante, zyklische 13.
Moment der Auftriebsdichte 13.
— — Wirbelung 44.
— — Zirkulation 15.
Normalvektor 6.
Relativströmung 46.
Residuum 26.

Saugkraft 21.
Saugpunkt 7.
—, isolierter 22.
Schwerpunkt der Zirkulation 15.
Seitenverhältnis 63, 118.
Skelett 63.
Spaltungspunkt 54.
Staupunkt 7.
Stirnwiderstand 112.
Strömung, bizirkulatorische 28.
—, ebene 6.
—, quellenfreie 5.
—, stationäre 5.
—, translatorische 28.
—, wirbellose 5.
—, zirkulatorische 28.
—, zyklische 28.
Strömungsfunktion 7.
Stromfunktion 7.
Vektorpotential 6.
Verdickungsparameter 66.
Widerstandsziffer 122.
Wirbelfeld 42.
Wirbelpunkt 22.
Wirbelstärke 29, 44.
Wölbungsverhältnis 73.
Zirkulation 12.