Anhang.

25. Aus den Resultaten des II. Kapitels können einige Folgerungen gezogen werden, die in gewisser Hinsicht den Satz von Weierstraß ergänzen.

In dem Weierstraßschen Satze werden die Funktionen φ als voneinander unabhängig vorausgesetzt. Wir wollen hier Systeme voneinander abhängiger Funktionen betrachten, die ein algebraisches Additionstheorem besitzen.

Wir gehen von irgendeiner allgemeinen Lösung

$$(105) \qquad \varphi_\nu\Big(\sum_{\varkappa=1}^{n} c_{1\varkappa} u_\varkappa, \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{2\varkappa} u_\varkappa, \ldots, \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{n\varkappa} u_\varkappa\Big) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

des Additionstheorems

$$(106) \quad \varphi_\nu(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, v_n + v_n) \underset{(\nu = 1, 2, \ldots, n)}{=} S_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n); \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)\}$$

aus. Unter diesen Lösungen sind die Systeme voneinander abhängiger Funktionen als partikuläre Lösungen enthalten, deren Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$ in bezug auf die Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ identisch gleich Null ist. Das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

welche den Wert der fraglichen Funktionaldeterminante für $u_1 = \cdots = u_n = 0$ darstellt, ist eine notwendige Bedingung für die Abhängigkeit der Funktionen.

Wir wollen zeigen, daß diese Bedingung für die Abhängigkeit der Funktionen φ auch hinreichend ist.

Wir nehmen allgemein an, daß alle Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$, ... bis zur $(n-p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, während wenigstens eine Unterdeterminante $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht Null ist. Es ist dann möglich, die Argumente

$$(107) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} u_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

als lineare homogene Funktionen von p unter ihnen darzustellen, wodurch die Funktionen (105) in die Funktionen von p unabhängigen Veränderlichen übergehen, die je $p+1$ genommen miteinander analytisch verbunden sind.

Wir haben daher folgenden, von Painlevé für $n = 2$ bewiesenen[1])

Satz. Die analytisch abhängigen Lösungssysteme des Additionstheorems (106) können nach einer linearen Transformation der Argumente als algebraische Funktionen von Abelschen Funktionen dargestellt werden, wo $n-p$ der Variabeln Null sind. Hier bezeichnet p die Anzahl der unabhängigen Funktionen φ.

1) Vgl. die S. 1 zitierte Abhandlung, S. 52.