

VERZEICHNIS DER BEISPIELE

	Seite	
1.1	Bandmatrix	3
1.2	Transponierte Matrix	3
1.3	Symmetrische Matrix	3
1.4	Multiplikation einer Matrix mit einer Konstanten	4
1.5	Addition und Subtraktion von Matrizen	5
1.6	Multiplikation von Matrizen	6
1.7	Falk'sches Schema	7
1.8	Inverse Matrix	7
1.9	Bilinearform	9
1.10	Quadratische Form	10
1.11	Gradient einer Funktion	10
1.12	Differentiation einer quadratischen Form	11
1.13	Integration einer Matrix	12
1.14	Koordinatentransformation des ebenen Zug-Druck-Stabs	15
1.15	Koordinatentransformation des ebenen Balkens	16
1.16	Koordinatentransformation des räumlichen Balkens	18
1.17	Gauß'scher Algorithmus	20
1.18	Gauß'scher Algorithmus	21
1.19	Gauß'scher Algorithmus bei singulärer Matrix	24
1.20	Gauß'scher Algorithmus bei singulärer Matrix	25
1.21	Berechnung der inversen Matrix	27
1.22	Berechnung der inversen Beziehung für die ebenen Verzerrungs-Spannungsgleichungen	27
1.23	L-R-Algorithmus	31
1.24	Cholesky-Verfahren	33
2.1	Hauptnormalspannungen mit ihren Ebenen für den dreidimensionalen Spannungszustand	43
2.2	Hauptnormalspannungen mit ihren Ebenen für den zweidimensionalen Spannungszustand	47

	Seite	
3.1	Dehnung und Verschiebung beim Zug-Druck-Stab	54
3.2	Zugkraft bei gegebener Dehnung	59
3.3	Verzerrungen bei vorgegebenem Verschiebungsfeld	59
3.4	Verschiebung und Dehnung beim Zug-Druck-Stab über die Grundgleichungen	65
3.5	Reine Biegung am Balken	66
3.6	Normal- und Schubspannung am Balken bei Querkraft	71
4.1	Bogenlänge einer Kurve	74
4.2	Kurvenintegral 1. Art	75
4.3	Kurvenintegral 2. Art	77
4.4	Volumenintegral	79
4.5	Oberflächenintegral	80
4.6	Bereichsintegral mit dem Satz von Green	83
4.7	Innere Energie eines Stabes unter Längskraft	87
4.8	Innere Energie eines Balkens durch Biegemoment	87
4.9	Innere Energie eines Balkens durch Torsion	88
4.10	Verschiebung bei Einzellast mit dem Energiesatz	91
4.11	Absenkung über die Einheitslastmethode	93
4.12	1. Satz von Castigliano	96
4.13	Elementsteifigkeitsmatrix für den ebenen Balken mit der direkten Methode	99
5.1	FEM-Beispiel für ein ebenes Balkensystem	112
5.2	Bandbreitenoptimierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	121
5.3	Knotennumerierung einer Netzstruktur	122
5.4	Ersatzlasten am Balken	130
6.1	Variationsproblem der kürzesten Verbindung	132
6.2	Fortsetzung Beispiel 6.1	136
6.3	Euler'sche DGL des Zug-Druck-Stabes über die totale potentielle Energie	137
6.4	Euler'sche DGL für den Biegebalken	138

		Seite
6.5	Quadratischer Ansatz für die Elementsteifigkeitsmatrix des Stabes	158
6.6	Elementsteifigkeitsmatrix des ebenen Balkens über die Minimierung der totalen potentiellen Energie	161
6.7	FEM-Beispiel aus ebenen Scheibendreiecken	169
6.8	Verschiebungsansätze	175
6.9	Verschiebungsansätze	176
6.10	Ersatzlast bei Volumenlast im Stab	184
6.11	Ersatzlast bei Linienlast am Scheibendreieck	185
6.12	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes für den Stab und ebenes Scheibendreieck	187
6.13	Verzerrungen bei Starrkörperbewegung des Scheibendreiecks	188
6.14	Geometrisch isotroper Ansatz für das Scheibendreieck	189

## VERWENDETE FORMELZEICHEN

$\vec{a}, \vec{x}, \vec{F}$	Vektoren
$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$	Vektor $\vec{a}$ in Komponenten als Spaltenvektor
$\vec{a}^T = [a_1, a_2, a_3]$	Vektor $\vec{a}$ transponiert, Zeilenvektor
$\vec{F}, \vec{G}, \vec{p}, \vec{q}$	Kräfte
$\vec{F} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$	Kraft $\vec{F}$ in Komponenten
$\vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$	Momentenvektor
$\vec{s} = \begin{bmatrix} s_x(x,y,z) \\ s_y(x,y,z) \\ s_z(x,y,z) \end{bmatrix}$	allgemeiner Spannungsvektor eines Spannungsfeldes
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Normalspannungen
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Schubspannungen
$\vec{\sigma}^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \tau_{zx}]$	Spannungsvektor der zusammengefaßten Normal- und Schubspannungen
$\phi(x,y)$	zweidimensionale Spannungsfunktion
$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$	Auflagerreaktionskraft im Auflager A
$\vec{d}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$	allgemeiner Verschiebungsvektor eines Verschiebungsfeldes
$\vec{d}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$	Verschiebungsvektor im Knoten i
$\hat{\vec{d}}_i = \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{w}_i \end{bmatrix}$	Verschiebungsvektor im Knoten i in lokalen Koordinaten
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Verzerrungen

$\vec{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots, \gamma_{zx}]$	Verzerrungsvektor der zusammengefaßten Verzerrungen
A , B , S usw.	Matrizen
D	Hooke'sche Matrix
S	Spannungsmatrix
$A^{-1}$	Kehrmatrix der Matrix A
$A^T$	zur Matrix A transponierte Matrix
B	Differentialoperatormatrix der Verzerrungen
H	Nachgiebigkeits- oder Flexibilitätsmatrix
$K_e$	Elementsteifigkeitsmatrix (ES-Matrix) im globalen Koordinatensystem
$\hat{K}_e$	Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen Koordinatensystem
$K_{ges}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix (GS-Matrix)
$\vec{G}$	Kräftegruppe an mehreren oder allen Knoten eines Bauteils
$\vec{w}$	Verschiebungen mehrerer oder aller Knoten eines Bauteils
$\vec{w}_e$	Verschiebungen der Knoten eines Elements
E	Elastizitätsmodul
$\nu$	Querkontraktion
G	Gleitmodul
I	Trägheitsmoment
U	innere Energie
W	Potential der äußeren Kräfte
$\Pi$	totale potentielle Energie
$N_i(x,y,z)$	Formfunktionen des Verschiebungsansatzes für ein Element
N	Matrix der Formfunktionen
h	Scheibendicke bei ebenen Elementen

$dx$	Differential
$ds$	Bogenelement
$\frac{\partial u}{\partial x}$	partielle Ableitung
$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$	Gradient der Funktion $y = f(\vec{x})$
$\delta u$	Variation der Größe $u$ (virtuelle Verschiebung)
$\delta I$	1. Variation des Funktionals $I$
$\delta^2 I$	2. Variation des Funktionals $I$
$\delta \Pi$	Variation der totalen potentiellen Energie
$n$	Anzahl der Knoten einer Struktur
$f$	Anzahl Freiheitsgrade pro Knoten
$s$	Anzahl der Elemente einer Struktur
$k$	Anzahl Knoten pro Element
$G$	zweidimensionales Gebiet
$C$	Randkurve eines Gebietes
$O$	Oberflächengebiet
$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$	Einheitsnormalenvektor einer Oberfläche $O$
$V$	Volumenintegrationsgebiet
$R_a$	Rand (Oberflächengebiet) mit Sollverschiebungen (Auflager)
$R_b$	Rand (Oberflächengebiet) mit äußeren Lasten
$\vec{R}(x,y,z)$	Vektor der Potenzen eines Verschiebungsansatzes
$\vec{\alpha}$	Vektor der Koeffizienten eines Verschiebungsansatzes

## LITERATUR

- Cheung, Y.K., Yeo, M.F.: A practical introduction to Finite Element Analysis, Pitman 1979
- Dankert, J.: Numerische Methoden der Mechanik, Springer 1977
- Eschenauer, H., Schnell, W.: Elastizitätstheorie I, Bibliographisches Institut 1981
- Gallagher, R.H.: Finite-Element-Analysis, Springer 1976
- Hahn, H.G.: Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre, Akademische Verlagsgesellschaft 1975
- Huston, R.L., Passerello, C.E.: Finite Element Methods. An Introduction, Marcel Dekker 1984
- Lawo, M., Thierauf, G.: Stabtragwerke. Matrizermethoden der Statik und Dynamik. Teil I: Statik, Vieweg 1980
- Lehmann, T.: Elemente der Mechanik I: Einführung, Elemente der Mechanik II: Elastostatik, Vieweg 1984, 1975
- Link, M.: Finite Elemente in der Statik und Dynamik, Teubner Stuttgart 1984
- Marsal, D.: Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen, Bibliographisches Institut 1976
- Pestel, E., Wittenburg, J.: Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre, Bibliographisches Institut 1981
- Reckling, K.-A.: Mechanik II. Festigkeitslehre, Vieweg 1974
- Robinson, J.: Understanding Finite Element Stress Analysis, Robinson and Associates 1981
- Schwarz, H.-R.: Methode der finiten Elemente, Teubner Stuttgart 1984
- Schwarz, H.-R.: FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente, Teubner Stuttgart 1981
- Segerlind, L.J.: Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Sons 1976
- Szilard, R.: Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik. Band 1: Stabwerke, Wilhelm Ernst & Sohn 1982

- Törnig, W.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Band 1 und 2, Springer 1979
- Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press 1975



## SACHVERZEICHNIS

- Airy'sche Spannungsfunktion 70  
Auflagerbedingungen 64,123,141,145
- Balkensystem, FEM-Beispiel 112ff.  
Balkenberechnung, elementare 65-68 , 71-73  
Bilinearform 9  
Bogenlänge 73
- Castigliano, 1. Satz von 96  
-, 2. Satz von 98  
Cholesky-Verfahren 31ff.
- Dehnungen 53  
Differentialgleichungen der Verschiebungen 69  
Differentialoperatormatrix der Verzerrungen 54  
Doppelintegral 78  
Dreifachintegral 78
- Elementsteifigkeitsmatrix,  
- Balken 100,110,111,112  
- Scheibendreieck 168-169  
- Stab 103,104,154  
Energie, innere 86,87  
- des Balkens 87-88  
Energie, totale potentielle 148  
- des Balkens 162  
- des Scheibendreiecks 167  
- des Stabes 153,160  
- der Stabstruktur 157  
Energiesatz der linearen Elastizitätstheorie 90,91  
Ersatzlasten, 183  
- Balken 126ff.  
- Scheibendreieck 184-185  
- Stab 183-184  
Euler'sche Differentialgleichung, 136,140  
- des ebenen Spannungszustand 143-144

Falk'sches Schema 7  
 Flexibilitätsmatrix 98  
 Formfunktionen,  
 - allgemein 178  
 - des Balkens 161-162  
 - des Scheibendreiecks 164  
 - des Stabes 152  
 Freiheitsgrade eines Knotens 117,174  
  
 Gauß'scher Algorithmus 19ff.  
 Gauß'scher Integralsatz 83,84  
 Gesamtsteifigkeitsbeziehung, 120,121  
 - Lösungsschema 124ff.  
 Gleichgewichtsbedingungen 62,64,118  
 Gleichungssysteme in der FEM 33  
 Gleitungen 53  
 globales Koordinatensystem 13  
 Gradient einer Funktion 10  
 Gradient einer quadratischen Form 11  
 Green'scher Integralsatz 82  
 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie 64,68  
  
 Hauptnormalspannungen 41ff.  
 Hooke'sches Gesetz 58  
  
 Integralsätze 80ff.  
 Isotropie, geometrische 188-189  
  
 kinematische Gleichungen 54  
 Knotennumerierung einer Struktur 121  
 Knotenzahldifferenz einer Struktur 122  
 konformer Verschiebungsansatz 187  
 konstanter Verzerrungszustand 188  
 Koordinatentransformation,  
 - zweidimensional 13ff.  
 - dreidimensional 17ff.  
 Kurvenintegral 1. Art 74

Kurvenintegral 2. Art 75

Linksdreiecksmatrix 28

lokales Koordinatensystem 13

LR-Algorithmus 28 ff.

Matrix 1

- Band- 2

- Diagonal- 2

- Einheits- 2

- inverse 7

- Berechnung der inversen Matrix 26 ff.

- Integration einer Matrix 12

- positiv definite 9

- reguläre 7

- singuläre 7

- symmetrische 3

- transponierte 3

Matrizenaddition 4

Matrizenmultiplikation 5 ff.

Maxwell, Satz von 95

Nachgiebigkeitsmatrix 98

Normalenvektor 37,64,89

Normalspannung 36

Oberflächenintegral 80

Oberflächennormalenvektor 64

Prinzip der virtuellen Verschiebungen 147-148

Prinzip vom Minimum der totalen potentiellen Energie 148,149

quadratische Form 9

Randbedingungen,

- geometrische 145

- natürliche 145

- Realisierung der äußeren Kräfte 123,126

- Realisierung der Auflagerbedingungen 123,124

Rechtsdreiecksmatrix 19,28

reduziertes Gleichungssystem 108,124

reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix 108  
 Richtungscosinus 37,89  
  
 Scheibendreieck, Beispiel einer Struktur 169 ff.  
 Schubspannung 36  
 Skalarprodukt 5  
 Spannung, Definition der 34  
 Spannungsfunktion 70  
 Spannungsmatrix 40  
 Stabwerk, Beispiel einer Struktur 101 ff.  
 Starrkörperbewegung 188  
 Steifigkeitsbeziehung 98  
 Steifigkeitsmatrix 98  
 stetiger Verschiebungsansatz 187  
 Stoffgesetze (Hooke'sches Gesetz) 58  
 Struktur der Gesamtsteifigkeitsmatrix 121 ff.  
  
 Taylorentwicklung  
 - einer Veränderlichen 48  
 - von mehreren Veränderlichen 49  
 Transformationsmatrix 14,16,17,18,104  
  
 Untermatrizen einer Elementsteifigkeitsmatrix 117 ff.  
 - Platzierung in die Gesamtsteifigkeitsmatrix 120 ff.  
  
 Variation  
 - einer Funktion 133  
 - eines Funktionals 133,136  
 Variationsmethoden 132 ff.  
 Variationsprinzip der linearen Elastizitätstheorie 148  
 Verschiebungsansatz  
 - allgemein 175  
 - Balken 161  
 - Scheibendreieck 163,189  
 - Stab 151-152 , 158-159  
 Verzerrungen (Dehnung , Gleitung) 52 ff.  
 Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen 54  
 vollständiger Verschiebungsansatz 189  
 virtuelle Verschiebungen 147  
 Volumenkräfte 64