Lösungen der Aufgaben zur Selbstüberprüfung

1. a) $(a_n) = \{(1, -3), (2, -3/2), (3, -1), \ldots, (50, -3/50), \ldots\}$
$(a_n) = \{-3, \quad -3/2, \quad -1, \ldots, \quad -3/50, \ldots\}$
(a_n) ist streng monoton wachsend, denn $-3/n < -3/(n+1)$, das heißt $a_n < a_{n+1}$

b) $(b_n) = \{(1, -3), (2, -6), (3, -9), \ldots, (50, -150), \ldots\}$
$(b_n) = \{-3, \quad -6, \quad -9, \ldots, \quad -150, \ldots\}$
(b_n) ist streng monoton fallend, denn $-3\,n > -3/(n+1)$, das heißt $b_n > b_{n+1}$

c) $(c_n) = \{(1, -3), (2, 3/2), (3, -1), \ldots, (50, 3/50), \ldots\}$
$(c_n) = \{-3, \quad 3/2, \quad -1, \ldots, \quad 3/50, \ldots\}$
(c_n) ist weder monoton wachsend, noch monoton fallend,
denn $(-1)^n \times (-1)^{n+1} \times (3/n)\,(-3/(n+1)) < 0$,
das heißt, $c_n \times c_{n+1} < 0$

2. a) $a_n = 50 + (n-1) \times 8$

b)
$$
\begin{array}{lrl}
a_{10} & = a_1 + 9 \times d = & 20, \text{ so daß } a_1 = -9d + 20 \\
a_{100} & = \underline{a_1 + 99 \times d = 3\,530} & \\
 & 90 \times d = & 3\,510, \text{ so daß } d = 39 \\
 & & \qquad a_1 = -331
\end{array}
$$
$a_n = -331 + (n-1) \times 39$

c) $a_{1\,000} = a_1 + 999 \times 56 = 789$, so daß $a_1 = -55\,155$
$a_n = -55\,155 + (n-1) \times 56$

3. $1 + 2 + \ldots + 897 = 897 \times \dfrac{1+897}{2} = 897 \times 449 = 402\,753$

4. a) $(s_n) : s_n = n \times a_1 + \dfrac{(n-1) \times n}{2} \times d = -50\,n - \dfrac{(n-1)\,n}{2} \times 25$

b) $s_1 = -50, \quad s_3 = -225, \quad s_{100} = -128\,750, \quad s_{231} = -652\,575$

5. Gegeben: G_0 : Neuwert, $G_0 = 999\,999$ DM
n : Nutzungsdauer, $n = 11$ Jahre
k : Nummer des Jahres, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 11$

Gesucht: a_k : Abschreibung pro Jahr am Ende des Jahres k
A_k : Gesamtabschreibung bis einschließlich Ende des Jahres k
G_k : Restbuchwert am Ende des Jahres k

Lösung: Da die Nutzungsdauer $n = 11$ Jahre beträgt, ist der Restbuchwert der Maschine am Ende des 11-ten Jahres Null, $G_{11} = 0$. Pro Jahr wird ein konstanter Betrag abgeschrieben, nämlich $G_0/n = G_0/11$.

$(a_k) : a_k = G_0/11$

$(A_k) : A_k = k \times G_0/11$, wobei $k \leq 11$

$(G_k) : G_k = G_0 - k \times G_0/11$, wobei $n \leq 11$

$a_4 = 90\,909$ DM
$A_4 = 4 \times 999\,999/11 = 363\,636$ DM
$G_4 = 636\,363$ DM

6. Gegeben: G_0 : Neuwert, $G_0 = 29\,070$ DM
n : Nutzungsdauer der Anlage, $n = 18$ Jahre
k : Nummer des Jahres, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 18$

Gesucht: a_k : Abschreibung pro Jahre am Ende des Jahres k
A_k : Gesamtabschreibung bis einschließlich Ende des Jahres k
G_k : Restbuchwert der Anlage am Ende des Jahres k

Lösung:

- Ermittlung der Anzahl der Teilbeträge:
  Da die Nutzungsdauer $n = 18$ Jahre beträgt, wird der Neuwert der Anlage in $n \times (n + 1)/2 = 171$ Teilbeträge zerlegt.
- Berechnung der Größe eines Teilbetrages:

$$T = \frac{G_0}{n \times (n+1)/2} = 29\,070/171 = 170$$

- Berechnung von a_k, A_k und G_k am Ende der Jahre 1, 2, ..., k, ..., n

Ende des Jahres k	a_k	A_k	G_K
1	$18 \times T$	$18 \times T$	$G_0 - 18 \times T$
2	$(18 - 1) \times T$	$(2 \times 18 - 1) \times T$	$G_0 - (2 \times 18 - 1) \times T$
⋮	⋮	⋮	⋮
k	$(18 - (k - 1)) \times T$	$(k \times 18 - \frac{(k-1) \times k}{2}) \times T$	$G_0 - A_K$
⋮	⋮	⋮	⋮

Die jährlichen Abschreibungsbeträge (a_k) bilden eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 18 \times T = 3\,060$ und $d = -T = -170$. Die Folge (A_k) der Gesamtabschreibungen bis zum Ende des Jahres 1, 2, ..., k,... ist die zu (a_k) gehörige arithmetische Reihe.

Ende des Jahres k	a_k	A_k	G_k
0	–	–	29 070
1	3 060	3 060	26 010
2	2 890	5 950	23 120
3	2 720	8 670	20 400
⋮	⋮	⋮	⋮
16	510	28 560	510
17	340	28 900	170
18	170	29 070	0

Beispielrechnung für $k = 16$:

(a_k) : $a_k = 3\,060 - (k - 1) \times 170$, $\qquad a_{16} = 510$

(A_k) : $A_k = k \times 3\,060 - \frac{(k-1) \times k}{2} \times 170$, $\qquad A_{16} = 28\,560$

(G_k) : $G_k = 29\,070 - \left[k \times 3060 - \frac{(k-1) \times k}{2} \times 170\right]$, $\qquad G_{16} = 510$

7. a) $(a_n) : a_n = -15 \times (1/2)^{n-1}$, $a_{10} \approx -0{,}0292968$

b) $a_n = a_1 \times q^{n-1}$, $a_4 = a_1 \times q^3$ und $\qquad a_7 = a_1 \times q^6$

$a_1 = \frac{a_4}{q^3}$, daraus folgt $\quad a_7 = \frac{a_4}{q^3} \times q^6$

$a_7 = a_4 \times q^3$, daraus folgt $\quad q = (a_7/a_4)^{1/3}$

$q = (50\,000/50)^{1/3}$

$q = 10$

$a_1 = a_4/q^3 = 50/10^3 = 0{,}05$

$a_n = 0{,}05 \times 10^{n-1}$ $\quad a_{10} = 50\,000\,000$

c) $a_n = a_1 \times q^{n-1}$, $\quad a_5 = a_1 \times q^4$, $\quad 1\,500 = a_1 \times (1/10)^4$

$a_1 = 500 \times 104 = 5\,000\,000 = 5 \times 10^6$

$a_n = 5 \times 10^6 \times (1/10)^{n-1}$ $\quad a_{10} = 0{,}005$

8.

Anfang des Jahres n	a) **Guthaben** G_n	b) **Zuwachs des Guthabens** Z_n
01	G_1	0
02	$G_1 + p/100\ G_1$	$G_1 \times p/100$
03	$G_2 + p/100\ G_2$	$G_2 \times p/100 = G_1 \times (1 + p/100) \times p/100$
⋮		
n	$G_1 \times (1 + p/100)^{n-1}$	$G_1 \times (1 + p/100)^{n-2} \times p/100$

$(G_n) : G_n = G_1 \times (1 + p/100)^{n-1}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

$(Z_n) : Z_n = G_1 \times (1 + p/100)^{n-2} \times p/100$, $\quad n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

c) $G_8 = G_1 \times (1 + p/100)^7 = 100\,000 \times (1 + 7{,}8/100) = 169\,173{,}11$

Am Ende des siebenten Jahres beziehungsweise zu Beginn des achten Jahres beträgt das Guthaben 169 173,11 DM.

d) $Z_n = G1 \times (1 + p/100)^n - 2 \times p/100$, $n = 2, 3, \ldots$

$Z_{10} = 100\,000 \times (7{,}8/100) \times (1{,}078)^8 = 14\,224{,}75$

Der Zuwachs am Ende des neunten bzw. zu Beginn des zehnten Jahre beträgt 14 224,75 DM.

9. a) $(a_n) : a_n = 6 \times (1/2)^{n-1}$

b) $(s_n) : s_n = 6 \times \dfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 12 \times (1-(1/2)^n)$

c) $a_{10} \approx 0{,}0117187$ $\quad s_{10} \approx 11{,}988281$

10. a) $G_n = G_0\,(1 - p/100)^n$, (G_n) ist eine streng monoton fallende geometrische Zahlenfolge mit $G_1 = G_0 \times (1 - p/100)$.

b) $A_n = G_0 \times (p/100) \times (1 - p/100)^{n-1}$, (A_n) ist eine streng monoton fallende geometrische Zahlenfolge mit $A_1 = G_0 \times (p/100)$.

c) $G_{10} = G_0 \times (1 - p/100)^{10}$, $G_{10} = 10^6 \times (1 - 20/100)^{10}$

$G_{10} \approx 107\,374{,}10$ DM

Nach zehn Jahren beträgt der Restbuchwert der Anlage ca. 107 374,10 DM.

11. K_0 : Anfangskapital

K_n : Endkapital nach Ablauf von n Jahren

p : Prozentsatz per annum

n : Laufzeit der Zinsfestschreibung

a) $K_n = K_0 \times (1 + p/100)^n$

b) $K_{20} = 45\,678 \text{ DM} \times (1 + 0{,}0375)^{20} = 95\,382{,}61$ DM

Das Endkapital nach Ablauf von 20 Jahren beträgt 95 392,61 DM.

c) $K_n = 3 \times K_0$

$3 \times K_0 = K_0 \times (1 + p/100)^n$

$3 = (1 + p/100)^n$

$\log 3 = n \times \log (1 + p/100)$

$$n = \frac{\log 3}{\log(1 + p/100)} \text{ mit } p = 3{,}75$$

$n = 29{,}84$

Bei einem Zinssatz von 3,75 % p. a. hat sich das Anfangskapital in 30 Jahren mehr als verdreifacht.

d) $K_n = 2 \times K_0$

$2 = (1 + p/100)^n$

$\sqrt[n]{2} = 1 + p/100$

$p = [\sqrt[n]{2} - 1] \times 100$ mit $n = 10$

$p = 7{,}17734$

Bei einem Prozentsatz von 7,18 % p. a. hat sich das Anfangskapital in 10 Jahren mehr als verdoppelt.

12. $K_n = K_0 \times (1 + p/100)^n = K_0 \times q^n, \qquad K_0 = K_n \times 1/q^n$

$$K_0 = 50\,123 \times \frac{1}{1{,}0815^{10}} = 50\,123 \times 0{,}4568091 = 22\,896{,}64$$

Der Barwert des Kapitals vor 10 Jahren betrug 22 896,64 DM.

13. $K_n = K_0 \times (1 + p/100)^n \qquad K_n = 5 \times K_0 \qquad 5 = (1 + p/100)^n$

$$n = \frac{\log 5}{\log (1 + p/100)} = \frac{0{,}69897}{0{,}0334237} = 20{,}9$$

Nach 21 Jahren hat sich das Kapital mehr als verfünffacht.

14. $K_n = K_0 \times (1 + p/100)^n, \qquad K_n = 7 \times K_0, \qquad 7 = (1 + p/100)^n$

$p = (\sqrt[n]{7} - 1) \times 100, \quad p = (\sqrt[20]{7} - 1) \times 100, \quad p = 10{,}2186$

Ein beliebiges Anfangskapital muß zu einem Zinssatz von 10,2186 % p. a. angelegt werden, damit es sich nach Ablauf von 20 Jahren versiebenfacht hat.

15. $$K_n = K_0 \times \left(1 + \frac{p}{m \times 100}\right)^{m \times n} = K_0 \times \left(1 + \frac{p}{1\,200}\right)^{12 \times n}$$

$$K_{20} = 45\,678 \times \left(1 + \frac{8{,}25}{1\,200}\right)^{12 \times 20} = 45\,678 \times 1{,}0856921^{20}$$

$K_{20} = 236\,505{,}34$ DM

16. a) $K_{15} = R \times q^{14} + R \times q^{13} + R \times q^{12} + \ldots + R \times q^3 + R \times q^2 + R \times q^1 + R$

$$K_{15} = R \times \frac{q^{15} - 1}{q - 1} \qquad K_{15} = 15\,000 \times \frac{1{,}06^{15} - 1}{0{,}06}$$

$K_{15} = 349\,139{,}55$ DM

Der Rentenanspruch von Frau Müller beträgt nach Ablauf von 15 Jahren 349 139,55 DM.

b) $K_{15} = K_0 \times (1 + p/100)^{15}$ $\qquad K_0 = \frac{K_{15}}{(1+p/100)^{15}}$

$$K_0 = \frac{349\,139{,}55}{1{,}06^{15}} = 145\,683{,}74$$

Durch eine Einmalzahlung von 145 683,74 DM kann sich Frau Müller einen Rentenanspruch von 349 139,55 DM nach Ablauf von 15 Jahren sichern, wenn ein Zinssatz von 6 % zugrunde gelegt wird.

17. $K_0 \times q^n = R \times q \frac{q^n - 1}{q-1}$. $\qquad R = K_0 \times \frac{q^n (q-1)}{q \times (q^n - 1)}$

$$R = 100\,000 \times \frac{1{,}06^{20}(1{,}06 - 1)}{1{,}06 \times (1{,}06^{20} - 1)} = 100\,000 \times \frac{0{,}1924281}{2{,}3395636}$$

$R = 100\,000 \times 0{,}0822495$ DM $= 8\,224{,}95$ DM

Herr Schubert kann eine jährliche vorschüssige Rente in Höhe von 8 224,95 DM beziehen.

18. $K_0 \times q^n = R \times q \times \frac{q^n - 1}{q-1}$, $\qquad K_0 = R \times \frac{q(q^n - 1)}{q^n (q-1)}$

$$K_0 = 12\,000 \times \frac{1{,}05 \times (1{,}05^{15} - 1)}{1{,}05^{15} \times 0{,}05} = 120\,000 \times 10{,}898641$$

$K_0 = 130\,783{,}69$ DM

19. $K_0 = R \times \frac{q}{q-1}$. $\qquad R = \frac{K_0 (q-1)}{q} = 200\,000 \times \frac{1{,}085 - 1}{1{,}085}$ DM

$R = 15\,668{,}20$ DM

Das Kapital von 200 000 DM wirft eine ewige vorschüssige Rente in Höhe von 15 668,20 DM ab.

20. a) $K_n = R \times \frac{q^n - 1}{q-1}$

$$K_{10} = 100 \times \frac{1{,}0325^{10} - 1}{1{,}0325 - 1} = 100 \times 11{,}596748 = 1\,159{,}67$$

Nach Ablauf von 10 Jahren beträgt sein Sparguthaben 1 159,67 DM.

b) $K_n = R \times \frac{q^n - 1}{q-1}$ $\qquad K_n \times (q-1) = R \times q^n - R$ $\qquad q^n = \frac{K_n \times (q-1) + R}{R}$

$$1{,}0325^n = \frac{3\,500 \times (1{,}0325 - 1) + 100}{100}$$

$1{,}0325^n = 2{,}1375$

$$n = \frac{\log 2{,}1375}{\log 1{,}0325} = 23{,}75$$

Nach 24 Jahren hat der Schüler ein Guthaben von mehr als 3 500 DM.

c) $K_n = R \times \frac{q^n - 1}{q-1}$ $\qquad R = K_n \times \frac{q-1}{q^{10} - 1}$

$$R = 2\,800 \times \frac{1{,}0325 - 1}{1{,}3768943 - 1}\ \text{DM} = 2\,800 \times 0{,}086231\ \text{DM} = 241{,}45\ \text{DM}$$

d) $K_n = R \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $\qquad$ $K_n \times q - K_n = R \times q^n - R$

$$R \times q^n - K_n \times q + K_n - R = 0$$

$$q^n - \frac{K_n}{R} \times q + \frac{K_n}{R} - 1 = 0$$

$$q^2 - \frac{210}{100} \times q + \frac{210}{100} - 1 = 0, \qquad q^2 - 2{,}1 \times q + 1{,}1 = 0$$

$$q_1/q_2 = 1{,}05 +/- \sqrt{1{,}1025 - 1{,}1}$$
$$q_1/q_2 = 1{,}05 +/- 0{,}05$$
$$q_1 = 1{,}1$$
$$q_2 = 1$$

Die Lösung q_2 der quadratischen Gleichung ist keine Lösung des praktischen Problems. Aus $q_1 = 1{,}1$ folgt der Prozentsatz $p = 10\ \%$ p. a. Die Spareinlagen des Schülers müßten mit 10 % p. a. verzinst werden.

21. $K_n = K_0 \times q^n + R \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $\qquad$ $K_7 = 1\,000 \times 1{,}04^7 + (13 + 78) \times \dfrac{1{,}04^7 - 1}{1{,}04 - 1}$

$K_7 = 1\,315{,}93\ \text{DM} + 718{,}74\ \text{DM} = 2\,034{,}68\ \text{DM}$

Nach Ablauf von 7 Jahren ist auf dem Bausparkonto ein Guthaben in Höhe von 2 034,68 DM.

22. a) R: Annuität $\qquad$ $R = (0{,}0825 + 0{,}03) \times 250\,000\ \text{DM}$
$R = 28\,125\ \text{DM}$

b) $K_n = K_0 \times q^n - R \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

c)

Ende Jahr	**Restdarlehen K_n**	**Annuität R**	**Zinsen Z_n**	**Tilgung T_n**
00	250 000			
01	242 500	28 125	20 625	7 500
02	234 381,25	28 125	20 006,25	8 118,75
03	225 592,70	28 125	19 336,45	8 788,55
04	216 079,10	28 125	18 611,40	9 513,60
05	205 780,63	28 125	17 826,53	10 298,47

23. K_0 : Kreditbetrag, $K_0 = 24\,000$ DM
n : Anzahl der Monate
R : Monatsrate, $R = 1\,000$ DM
Z : Zinsrate pro Monat, $Z = \dfrac{0{,}5}{100} \times K_0 = 120$ DM

a) $Z_n = Z + (n - 1) \times Z = 120\ \text{DM} + (n - 1) \times 120\ \text{DM}$

b) $K_n = K_0 - R_n = K_0 - n \times R$

c) In vierundzwanzig Monaten betragen die insgesamt zu zahlenden Zinsen $Z_{24} = 24 \times 120$ DM = 2 880 DM.
Der durchschnittlich in Anspruch genommene Kreditbetrag beträgt:

$$K_d = \frac{K_0 + K_{23}}{2} = \frac{K_0 + (K_0 - 23 \times R)}{2} = \frac{24\,000 + 1\,000}{2} = 12\,500 \text{ DM}$$

Wenn für einen durchschnittlichen Kreditbetrag von 12 500 DM Zinsen in Höhe von 2 880 DM gezahlt werden, dann werden für einen Kreditbetrag von 100 DM Zinsen in Höhe von 23,04 % gezahlt. Der effektive Zinssatz für dieses Darlehen beträgt 23,04 %.

24.

Ende Jahr	Abzinsungs-faktor	Ausgaben Zeitwert	Ausgaben Barwert	Einnahmen Zeitwert	Einnahmen Barwert
00	1	150 000	150 000	–	–
01	0,9302325	10 000	9 302,32	45 000	41 860,46
02	0,8653326	10 000	8 653,33	45 000	38 939,97
03	0,8049604	10 000	8 049,60	45 000	36 223,22
04	0,7488005	10 000	7 488,00	45 000	33 696,02
05	0,6965584	10 000	6 965,58	45 000	31 345,13
Summe		200 000	190 458,83	225 000	182 064,80

Aus finanzmathematischer Sicht ist die Investition nicht wirtschaftlich.

25.

Ende Jahr	Zeitwerte Erlöse	Diskontierungsfaktoren 4 %	Diskontierungsfaktoren 5 %	Barwerte der Erlöse 4 %	Barwerte der Erlöse 5 %
00	– 130 000	1	1	– 130 000	– 130 000
01	30 000	0,9615	0,9524	28 845	28 572
02	30 000	0,9246	0,9070	27 738	27 210
03	30 000	0,889	0,8638	26 670	25 914
04	30 000	0,8548	0,8227	25 644	24 681
05	30 000	0,8219	0,7835	24 657	23 505
Summe	20 000			3 554	– 118

Der interne Zinsfluß liegt zwischen 4 % p. a. und 5 % p. a.

$$r_{int} = 5 - (-118) \times \frac{4 - 5}{3\,554 - (-118)} = 5 - \frac{1}{3\,672}$$

$$r_{int} = 4{,}9679$$

Der interne Zinsfuß liegt etwa bei 4,9679 % p. a.

Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

Literaturverzeichnis

Lehrbücher, die zur Vertiefung sehr zu empfehlen sind

Bühlmann, Niklaus; Einführung in die Finanzmathematik, UTB für Wissenschaft, Uni Taschenbücher, 1992

Bussman, Karl-Ferdinand; Kaufmännisches Rechnen und Finanzmathematik, Stuttgart, 1980

Caprano Eugen; Finanzmathematik, München, 1992

Holland, Heinrich; Mathemathik im Betrieb: praxisbezogene Einführung mit Beispielen, Wiesbaden, 1993

Stichwortverzeichnis