Aufgaben zur Selbstüberprüfung:

20. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gleichsetzungsverfahren:

a) I) $2x_1 - x_2 = 5$, II) $3x_1 + x_2 = 1$

b) $3x_1 - 6x_2 = 9$, $2x_1 - 4x_2 = 6$

c) $4x_1 + 2x_2 = 8$, $-6x_1 - 3x_2 = 3$

21. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme mit dem Einsetzungsverfahren:

a) $5x_1 - x_2 = 4$, $-15x_1 + 3x_2 = 3$

b) $-13x_1 + 26x_2 = 39$, $2x_1 - 4x_2 = -6$

c) $-5x_1 + 20x_2 = 25$, $3x_1 - 6x_2 = 15$

22. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme mit dem Additionsverfahren:

a) $-4x_1 + 7x_2 = 5$, $12x_1 - 21x_2 = -15$

b) $2x_1 - 7x_2 = 4$, $3x_1 - 6x_2 = 15$

c) $-4x_1 + 5x_2 = 13$, $24x_1 - 30x_2 = 2$

23. Gesucht sind zwei reelle Zahlen, für die folgendes gilt: Die Summe aus dem Dreifachen der ersten Zahl und der Hälfte der zweiten Zahl beträgt 51. Außerdem ist die Differenz aus der ersten und der zweiten Zahl gleich 10. Wie heißen die beiden Zahlen?

24. Ein bestimmtes Erzeugnis wird nach zwei verschiedenen Technologien hergestellt. Bei Anwendung der ersten und der zweiten Technologie werden jeweils zwei verschiedene Materialien M_1 und M_2 eingesetzt. Wird eine Erzeugniseinheit (EE) nach der ersten Technologie hergestellt, so benötigt man zwei Mengeneinheiten (ME) von Material M_1 und drei Mengeneinheiten (ME) von M_2. Bei Herstellung des Erzeugnisses mit der zweiten Technologie werden zwölf Mengeneinheiten des Materials M_1 pro einer Erzeugniseinheit und sechs ME des Materials M_2 pro einer Erzeugniseinheit verbraucht.

Der Materialvorrat ist begrenzt. Von Material M_1 sind 94 ME und von Material M_2 sind 57 ME vorrätig. Bei der Produktion des Erzeugnisses soll das gesamte Material verbraucht werden.

Wieviele Erzeugniseinheiten können nach der ersten Technologie und wie viele Erzeugniseinheiten können nach der zweiten Technologie produziert werden?

25. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme aus drei Gleichungen mit drei Variablen mit einem schematisierten Verfahren:

a) I) $-4x_1 + 12x_2 + 16x_3 = 4$, II) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$, III) $-6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = -6$

b) I) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20$, II) $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 26$, III) $6x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 52$

c) I) $2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 12$, II) $3x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 18$, II) $-4x_1 - 8x_2 + 16x_3 = -24$

d) I) $5x_1 - 15x_2 + 10x_3 = 1$, II) $-6x_1 + 18x_2 - 12x_3 = 2$, II) $-7x_1 + 21x_2 - 14x_3 = 0$

Lösungen der Aufgaben zur Selbstüberprüfung

1. a) $2x - 7 \neq 0, \quad x \neq \frac{7}{2}$

   b) $-2x + 5 \geq 0, \quad x \leq \frac{5}{2}$

   c) $-3x - 5 > 0, \quad x < -\frac{5}{3}$

2. a) für $x = 2$ falsche Aussage, für $x = -10$ wahre Aussage

   b) für alle $x \in \mathrm{IR}$, $y \in \mathrm{IR}$ wahre Aussage

   c) falsche Aussage für $x \neq 0$

3. $x > -7$ und $x \neq 0$

   $D(S) = (-7, +\infty)$, $D(T) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $D(S \cap T) = (-7, 0) \cup (0, +\infty)$

4. Alle Gleichungen haben die Lösungsmenge $L = \{2\}$.

5. a) $L = \{7\}$ b) $L = \{13\}$ c) $L = \{-4\}$ d) $L = \left\{\frac{10}{4}\right\}$ e) $L = \{40\}$ f) $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

6. a) $L = \left\{-\frac{11}{2}\right\}$ b) $L = \left\{\frac{53}{82}\right\}$ c) $L = \{0\}$ d) $L = \{5\}$

7. x_1: Erzeugniseinheiten, die von E_1 produziert werden, gemessen in EE

   x_2: Erzeugniseinheiten, die von E_2 produziert werden, gemessen in EE

   r_1: Rohstoffbedarf pro einer Erzeugniseinheit von E_1, gemessen in ME/EE

   r_2: Rohstoffbedarf pro einer Erzeugniseinheit von E_2, gemessen in ME/EE

   $r_1 * x_1 + r_2 * x_2 = 800$

   $600 + 10 * x_2 = 800, \quad x_2 = 20$

   Von Erzeugnis E_2 müssen 20 EE produziert werden, um das Rohstoffaufkommen voll auszuschöpfen.

8. G/EK = 990 000/900 000 = 99 : 90 = 1,1 : 1.

   Die erzielte Eigenkapitalrentabilität beträgt 1,1.

   Pro 1,– DM eingesetztem Eigenkapital werden 1,10 DM Gewinn erzielt.

9. x_1: Preis der Ware W_1

   x_2: Preis der Ware W_2

   $x_1 : x_2 = 5 : 8, \quad x_1 = (5 : 8) * x_2, \quad x_1 = (5 : 8) * 40, \quad x_1 = 25.$

   Die Ware W_1 kostet 25,– DM.

10. a) $L = \left\{\frac{50}{3}\right\}$ b) $L = \left\{-\frac{8}{9}\right\}$ c) $L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

11. $P : G = p : 100$

    a) $p = (P : G) * 100$, $p = 2{,}5$ (in Prozent)

    b) $P = (p : 100) * G$, $P = 1\,500$

    c) $G = (P : p) * 100$, $G = 100\,000$

12. a) $L = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ b) $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

13. a) $x_1 = 6,\ \ x_2 = -6,\ \ L = \{-6, 6\}$ b) $L = \phi$ c) $L = \{0\}$ d) $L = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$

e) $L = \{-1, 7\}$ f) $L = \{-5, 3\}$ g) $L = \phi$ h) $L = \{-1, 3\}$

14. $n(n+1) = 9\,900,\ \ n^2 + n - 9\,900 = 0,\ \ n_1/n_2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 9\,900} = -\frac{1}{2} \pm \frac{199}{2}$

$n_1 = 99$. Das Produkt der natürlichen Zahl 99 und ihres Nachfolgers beträgt 9 900.

15. a) $x < 6,\ \ L = (-\infty, 6)$ b) $x > -\frac{2}{3},\ \ L = \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ c) $x < 8,\ \ L = (-\infty, 8)$

16. 1. Fall:

$$\begin{aligned} x-1 &> 0 \\ x &> 1 \\ 6 &< -3(x-1) \\ x &< -1, \\ L_1 &= (-\infty, -1) \cap (1, +\infty) \\ L_1 &= \phi \end{aligned}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} x-1 &< 0 \\ x &< 1 \\ 6 &> -3(x-1) \\ x &> -1, \\ L_2 &= (-\infty, 1) \cap (-1, +\infty) \\ L_2 &= (-1, 1) \end{aligned}$$

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = (-1, 1)$

17. x_1 = Anzahl der produzierten Erzeugnisse E_1 in Stück,
x_2 = Anzahl der produzierten Erzeugnisse E_2 in Stück,

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 &\le 45\,000 \\ 20 * 1\,000 + 30x_2 &\le 45\,000 \\ 30x_2 &\le 25\,000 \\ x_2 &\le \frac{24\,990 + 10}{30} \\ x_2 &\le 833 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Probe: $20\,000 + 30\left(833 + \frac{1}{3}\right) \le 45\,000$

$20\,000 + 24\,990 + 10 \le 45\,000$ ist eine wahre Aussage.

Von Erzeugnis E_2 können höchstens 833 Stück produziert werden. Es sind noch zehn Mengeneinheiten des Rohstoffes zur weiteren Verwendung vorhanden.

18. Durch äquivalente Umformungen entsteht das Ungleichungssystem:

I': $x > 6$

II': $x < -3$

Die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen sind:

$L(I') = \{x \in IR : 6 < x\} = (6, +\infty)$

$L(II') = \{x \in IR : x < -3\} = (-\infty, -3)$

Durch Veranschaulichung auf einer Zahlengeraden erkennt man, daß es keine reellen Zahlen gibt, die gleichzeitig Lösung von Ungleichung I' und von Ungleichung II' sein können. Die Durchschnittsmenge $L(I') \cap L(II')$ ist somit die leere Menge: $L = \phi$.

19. Gegeben: t_1 = Maschinenzeit von M_1 für die Produktion einer EE
$t_1 = 2\ h/EE$
t_2 = Maschinenzeit von M_2 für die Produktion einer EE
$t_2 = 3\ h/EE$
T_1 = gesamte Maschinenzeit von M_1
$T_1 = 10\ h$
T_2 = gesamte Maschinenzeit von M_2
$T_2 = 12\ h$

Gesucht: x = Anzahl der Erzeugniseinheiten, die maximal produziert werden können

Lösungsansatz:

I) $t_1 * x \leq T_1$	I) $2 * x \leq 10$	I') $x \leq 5$	L(I') $= [0, 5]$
II) $t_2 * x \leq T_2$	II) $3 * x \leq 12$	II') $x \leq 4$	L(II') $= [0, 4]$

Bei der Ermittlung der Lösungsmengen der Ungleichungen ist zu beachten, daß die Anzahl der Erzeugniseinheiten stets nicht negativ ist, das heißt $x \geq 0$.

Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems ist die Durchschnittsmenge der Lösungsmengen beider Ungleichungen:

$L = L(I') \cap L(II') = [0, 4]$.

Anwortsatz:

Es können höchstens vier Erzeugniseinheiten produziert werden. Da $2 * 4 + 2 = 10$ und $3 * 4 + 0 = 12$, ist Maschine M_1 nicht voll ausgelastet bei der Produktion des Erzeugnisses. M_1 hat eine freie Kapazität von 2 h.

20. a) I) $x_2 = 2x_1 - 5$ $\qquad$ $2x_1 - 5 = -3x_1 + 1$
II) $x_2 = -3x_1 + 1$ $\qquad$ $5x_1 = 6$
$$x_1 = \frac{6}{5}, \quad x_2 = -\frac{13}{5}$$
$$L = \left\{\left(\frac{6}{5}, -\frac{13}{5}\right)\right\}$$

b) I) $x_1 = 2x_2 + 3$ $\qquad$ $2x_2 + 3 = 2x_2 + 3$
II) $x_1 = 2x_2 + 3$ $\qquad$ $0 = 0$ wahre Aussage
$L = \{(x_1, x_2) : x_2 \in IR \text{ und } x_1 = 2x_2 + 3\}$

c) I) $x_2 = -2x_1 + 4$ $\qquad$ $-2x_1 + 4 = -2x_1 - 1$
II) $x_2 = -2x_1 - 1$ $\qquad$ $4 = -1$ falsche Aussage
$L = \phi$

21. a) I) $x_2 = 5x_1 - 4$
II) $-15x_1 + 3(5x_1 - 4) = 3$
II) $-12 = 3$ falsche Aussage $\quad L = \phi$

b) II) $x_1 = 2x_2 - 3$
I) $-13(2x_2 - 3) + 26x_2 = 39$
I) $39 = 39$ wahre Aussage
$L = \{(x_1, x_2) : x_2 \in IR \text{ und } x_1 = 2x_2 - 3\}$

c) II) $x_1 = 2x_2 + 5$

$$\begin{aligned} &\text{I)} & -5(2x_2+5)+20x_2 &= 25 \\ &\text{I)} & 10x_2 &= 50 \\ &\text{I)} & x_2 &= 5 \\ &\text{II)} & x_1 &= 15 \qquad L = \{(15, 5)\} \end{aligned}$$

22. a) Die erste Gleichung wird mit 3 multipliziert und zur zweiten Gleichung addiert. Es entsteht die wahre Aussage $0 = 0$. $L = \left\{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathrm{IR} \text{ und } x_2 = \frac{4}{7} * x_1 + \frac{5}{7}\right\}$.

b) Die erste Gleichung wird mit (–3) und die zweite Gleichung wird mit (2) multipliziert. Dann werden beide Gleichungen addiert.

$$\begin{aligned} &\text{I)} & -6x_1 + 21x_2 &= -12 & \qquad 9x_2 &= 18 \\ &\text{II)} & 6x_1 - 12x_2 &= 30 & x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Die Lösung für x_2 wird in eine Gleichung eingesetzt, zum Beispiel

$2x_1 - 14 = 4$, das heißt $x_1 = 9$

$L = \{(9, 2)\}$

c) Multiplikation der ersten Gleichung mit 6 und Addition beider Gleichungen.

$0 = 80$ falsche Aussage, $L = \phi$.

23. x_1: erste reelle Zahl

x_2: zweite reelle Zahl

$$\begin{aligned} &\text{I)} & 3x_1 + \frac{1}{2} * x_2 &= 51 \\ &\text{II)} & x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}$$

Anwendung des Additionsverfahrens, indem die zweite Gleichung mit (– 3) multipliziert wird und zur ersten Gleichung addiert wird.

$\frac{7}{2} * x_2 = 21$, das heißt $x_2 = 6$

$x_1 = 16$ $\qquad L = \{(16, 6)\}$

Die erste Zahle heißt 16 und die zweite Zahl 6.

24. Gegeben:

m_{11}: Materialeinsatzkoeffizient von Material M_1 bei Anwendung der ersten Technologie,

$m_{11} =$ 2 ME/EE

m_{12}: Materialeinsatzkoeffizient von Material M_1 bei Anwendung der zweiten Technologie,

$m_{12} =$ 12 ME/EE

m_{21}: Materialeinsatzkoeffizient von Material M_2 bei Anwendung der Technologie 1,

$m_{21} =$ 3 ME/EE

m_{22}: Materialeinsatzkoeffizient von Material M_2 bei Anwendung der Technologie 2,

$m_{22} =$ 6 ME/EE

V_1: Materialvorrat von M_1,

$V_1 =$ 94 ME

V_2: Materialvorrat von M_2,

$V_2 =$ 57 ME

Gesucht:

x_1: Erzeugnisse, die nach Technologie 1 hergestellt werden (gemessen in Erzeugniseinheiten)

x_2: Erzeugnisse, die nach Technologie 2 hergestellt werden (gemessen in Erzeugniseinheiten)

Aufstellung des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & m_{11} * x_1 + m_{12} * x_2 = V_1 \\ \text{II)} & m_{21} * x_1 + m_{22} * x_2 = V_2 \\ \hline \text{I)} & 2 * x_1 + 12 * x_2 = 94 \\ \text{II)} & 3 * x_1 + 6 * x_2 = 57, \\ \hline & -4 * x_1 = -20 \\ & x_1 = 5 \\ & x_2 = 7 \end{array}$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit (– 2) und Addition der Gleichungen

$L = \{(5, 7)\}$

Um das gesamte Material zu verbrauchen, müssen nach der ersten Technologie fünf Erzeugniseinheiten und nach der zweiten Technologie sieben Erzeugniseinheiten produziert werden.

25. a)

x_1	x_2	x_3	b	$-\uparrow$	
−4	12	16	4	*	
2	3	1	7	−2	Tableau 1
−6	−9	12	−6	6	
1	−3	−4	−1	3	
0	9	9	9	*	Tableau 2
0	−27	−12	−12	27	
1	0	−1	2	1	
0	1	1	1	−1	Tableau 3
0	0	15	15	*	
1	0	0	3		
0	1	0	0		Tableau 4
0	0	1	1		

$L = \{(3, 0, 1)\}$

b)

x_1	x_2	x_3	b	$-\uparrow$	
2	3	4	20	*	
3	4	5	26	−3	Tableau 1
6	8	10	52	−6	
1	$\frac{3}{2}$	2	10	$-\frac{3}{2}$	
0	$-\frac{1}{2}$	−1	−4	*	Tableau 2
0	−1	−2	−8	1	
1	0	−1	−2		
0	1	2	8		Tableau 3
0	0	0	0	wahre Aussage	

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$L = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 \in \mathbb{R} \text{ und } x_1 = x_3 - 2 \text{ und } x_2 = -2x_3 + 8\}$

c)

x_1	x_2	x_3	b	$-\uparrow$	
2	4	−8	12	*	
3	6	−12	18	−3	Tableau 1
−4	−8	16	−24	4	
1	2	−4	6		
0	0	0	0	wahre	Tableau 2
0	0	0	0	Aussagen	

$x_1 \; +2x_2 - 4x_3 = 6$

$L = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \in \mathbb{R} \text{ und } x_3 \in \mathbb{R} \text{ und } x_1 = -2x_2 + 4x_3 + 6\}$

d)

x_1	x_2	x_3	b	$-\uparrow$	
5	−15	10	1	*	
−6	18	−12	2	6	Tableau 1
−7	21	−14	0	7	
1	−3	2	$\frac{1}{5}$		
0	0	0	$\frac{16}{5}$		Tableau 2
0	0	0	$\frac{7}{5}$	falsche Aussagen	

$L = \phi$

Stichwortverzeichnis

A
Additionsverfahren 56
Algorithmus 61
Aussageform 40
Außenglied 19

B
Betrag, absoluter 23
Betragsgleichung, lineare 23

E
Eigenkapitalrentabilität 19
Einsetzungsverfahren 54
Ergänzung, quadratische 30

G
Gebilde, mathematisches 2
Gleichsetzungsverfahren 52
Gleichsetzungssystem, homogenes 58
- inhomogenes 59
Gleichung, Aufstellen einer 14
- äquivalente 5
- dritten Grades 34
- ersten Grades 7
- gemischt-quadratische 25
- kubische 34, 35
- lineare 7
- quadratische 25
- rein kubische 35
- rein quadratische 25
- zweiten Grades 25
Gleichungssystem, homogenes 58
- inhomogenes 59, 61
Glied, absolutes 7, 25
- lineares 7, 25
- quadratisches 25
Grundwert 22

H
Hinterglied 18, 19

I
Innenglied 19

K
Kanonische Form 68
Koeffizientenmatrix 65
- erweiterte 65

L
Lösungsformel 32
Lösungsmenge 4

M
Minuend 8

N
Näherungsverfahren 34

P
Potenz, erste 7
Proportion 19
Prozentsatz 22
Prozentwert 22

Q
Quotient 18

R
Rohstoffeinsatzkoeffizient 51

S
Satz von Vieta 32
Subtrahend 8

T
Term 1
Textgleichung 14
Tripel, geordnete 68

U
Umformung, äquivalente 5, 40
Umkehroperation 8
Ungleichung 40
- äquivalente 40
- Definitionsbereich der 40
- lineare 40 ff.
- Lösung einer 40
Ungleichungssystem, lineares 45
- Lösungsmenge 45

V
Verhältnis 17, 18
Verhältnisgleichung 17, 19
Vorderglied 18, 19

W
Wurzel 31