

---

## Anhang A: Ergänzungen

---

### A.1 Einführung in die Tensornotation

Zur Herleitung der Bilanzgleichungen verwenden wir die Tensornotation, weil sich dadurch die Gleichungen einfacher und übersichtlicher schreiben lassen. Wir beschränken uns dabei auf kartesische Tensoren. Im Folgenden werden die Grundzüge der kartesischen Tensornotation nur in dem Umfang dargestellt, wie sie für die Herleitung der Bilanzgleichungen benötigt werden; ansonsten sei auf das weiterführende Schriftum verwiesen. Wir beginnen mit einem Beispiel. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{w}$  eines Massenpunktes ist bekanntlich ein Vektor, der durch seine Komponenten  $w_x, w_y, w_z$  in einem kartesischen Koordinatensystem festliegt:

$$\mathbf{w}(w_x, w_y, w_z).$$

Bezeichnet man die Einheitsvektoren in einem kartesischen Koordinatensystem mit  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , so gilt

$$\mathbf{w} = w_x \mathbf{e}_x + w_y \mathbf{e}_y + w_z \mathbf{e}_z.$$

In der Tensorschreibweise ersetzt man die Indizes  $x, y, z$  durch die Indizes 1, 2, 3 und schreibt statt dessen

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 w_i \mathbf{e}_i.$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{w}$  ist vollständig durch seine Komponenten  $w_i, i = 1, 2, 3$ , charakterisiert. In Tensorschreibweise kennzeichnet man nun den Geschwindigkeitsvektor abkürzend durch  $w_i$  mit  $i = 1, 2, 3$ . Entsprechend legt man den Ortsvektor  $\mathbf{x}(x, y, z)$  durch seine Komponenten  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  fest und schreibt in Tensorschreibweise abkürzend  $x_i$  mit  $i = 1, 2, 3$ . Ein Vektor ist demnach durch einen einzigen Index gekennzeichnet.

Man unterscheidet Tensoren verschiedener Stufen. Tensoren nullter Stufe sind Skalare. Sie ändern sich nicht beim Übergang auf ein anderes Koordinatensystem. Skalare sind beispielsweise die Temperatur  $\vartheta$ , der Druck  $p$  und die Dichte  $\varrho$ . Zu ihrer Kennzeichnung ist kein Index erforderlich.

Tensoren erster Stufe sind Vektoren. Sie werden wie oben erläutert durch einen Index gekennzeichnet. Tensoren zweiter Stufe sind durch zwei Indizes gekennzeichnet. Eine solche Größe ist der Spannungstensor. Er hat neun Komponenten  $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21} \dots \tau_{33}$ . Man schreibt abkürzend  $\tau_{ji}$ , wobei  $j$  und  $i$  je für sich die Werte 1, 2, 3 annehmen. Für das Rechnen mit Tensoren machen wir von folgenden Regeln Gebrauch. Wenn ein Index in einem Glied einer Gleichung nur einmal vorkommt, nennt man ihn einen *freien Index*. Er kann durch einen beliebigen anderen Index ersetzt werden. Alle Glieder einer Gleichung müssen in ihren freien Indizes übereinstimmen. Die Relation

$$a_i = c \cdot b_i, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $c$  eine Konstante (Skalar) ist, bedeutet, dass die Vektoren  $a_i$  und  $b_i$  sich nur im Betrag unterscheiden, sie haben die gleiche Richtung. Somit ist

$$a_1 = c b_1; \quad a_2 = c b_2; \quad a_3 = c b_3.$$

Das *Innenprodukt* (Skalarprodukt) zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

lautet in der indizierten Schreibweise

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Da innere Produkte sehr häufig vorkommen, wird folgende „*Summations-Konvention*“ getroffen: *Wenn ein Index in einem Term zweimal erscheint, so soll über diesen Index summiert werden.* Man nennt diesen Index einen *gebundenen Index*. Man kann einen von ihnen nicht durch einen beliebigen anderen Index ersetzen. Das Summationssymbol wird weggelassen. Somit ist

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (\text{A.2})$$

Differentiation führt zu einem Tensor, der um eine Ordnung höher ist. So ist der Gradient eines Skalars  $p$

$$\text{grad } p = \nabla p = \mathbf{e}_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial p}{\partial x_3} \quad (\text{A.3})$$

ein Vektor mit den drei Komponenten  $\partial p / \partial x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , wofür wir in Tensorschreibweise abkürzend nur  $\partial p / \partial x_i$  schreiben. Differenziert man einen Vektor  $w_j$ , so kann man jede der

drei Komponenten  $w_1, w_2, w_3$  nach jeder Ortskoordinate  $x_1, x_2, x_3$  differenzieren. Man erhält den Tensor zweiter Stufe

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \quad (\text{A.4})$$

der aus 9 Komponenten besteht. Auf der anderen Seite ist die Divergenz eines Vektors ein Skalar,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3}. \quad (\text{A.5})$$

Durch Divergenzbildung erhält man somit einen Tensor, der um eine Stufe niedriger ist als der Ausgangstensor. Ein sinnvoller „Operator“ ist das *Kronecker-Delta*  $\delta_{ij}$ , definiert durch

$$\delta_{ij} = 1 \text{ für } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j. \quad (\text{A.6})$$

Man nennt  $\delta_{ij}$  auch den *Einheitstensor*. Weiter gilt

$$\delta_{ij} b_j = b_i, \quad (\text{A.7})$$

was man durch ausschreiben bestätigt findet, denn es ist

$$\delta_{ij} b_j = \delta_{i1} b_1 + \delta_{i2} b_2 + \delta_{i3} b_3$$

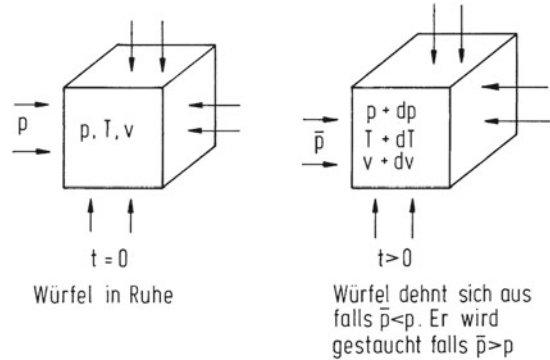
also für  $i = 1$  :  $\delta_{1j} b_j = \delta_{11} b_1 = b_1$ , für  $i = 2$  :  $\delta_{2j} b_j = \delta_{22} b_2 = b_2$  und für  $i = 3$  :  $\delta_{3j} b_j = \delta_{33} b_3 = b_3$ , und somit  $\delta_{ij} b_j = b_i$ .

## A.2 Zusammenhang zwischen mittlerem und thermodynamischem Druck

Definitionsgemäß enthält der mittlere Druck  $\bar{p} = -1/3 \delta_{ji} \tau_{kk}$  nur Normalspannungen. Um einen Zusammenhang zwischen mittlerem und thermodynamischem Druck herzustellen, betrachten wir ein würfelförmiges Fluidelement von der Temperatur  $T$  und dem spezifischen Volumen  $\nu$ , Abb. A.1. Wir nehmen nun an, zur Zeit  $t = 0$  sei der Würfel im Zustand der Ruhe, so dass im Inneren der thermodynamische Druck  $p$  herrscht. Anschließend wird von außen der mittlere Druck  $\bar{p}$  aufgeprägt. Falls  $\bar{p} > p$  ist, wird der Würfel gestaucht, falls  $\bar{p} < p$  ist, wird er sich ausdehnen. Von dem äußeren Druck  $\bar{p}$  wird dabei die Arbeit  $-\bar{p} dV$  verrichtet. Diese ist gleich der an das Gas übergehenden Volumenänderungsarbeit  $-p dV$  und der dissipierten Arbeit. Somit gilt  $dW = -\bar{p} dV = -p dV + dW_{\text{diss}}$  und die dissipierte Arbeit wird

$$dW_{\text{diss}} = -(\bar{p} - p) dV.$$

**Abb. A.1** Zum Zusammenhang zwischen mittlerem und thermodynamischem Druck



Dies ist nach dem zweiten Hauptsatz stets positiv, denn für  $\bar{p} > p$  ist  $dV < 0$  und für  $\bar{p} < p$  ist  $dV > 0$ . Die Volumenzunahme  $dV$  ergibt sich andererseits aus dem Transporttheorem (3.18) wenn man  $Z = V$  und  $z = Z/M = V/M = 1/\rho$  setzt zu

$$\frac{dV}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dV.$$

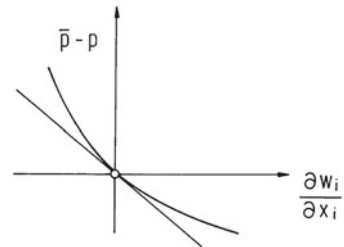
Damit kann man für die dissipierte Arbeit auch schreiben

$$dW_{\text{diss}} = -(\bar{p} - p) \left( \int_{V(t)} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dV \right) dt.$$

Es ist nun anschaulich einleuchtend, dass die Geschwindigkeit  $dV/dt$  der Volumenänderung bzw.  $\partial w_i/\partial x_i$  eine mit  $\bar{p} - p$  monoton fallende Funktion ist, Abb. A.2, denn je größer der äußere Überdruck  $\bar{p} - p$  ist, desto schneller nimmt das Volumen des Würfels ab. Es ist daher naheliegend, für nicht allzu rasche Volumenänderungsgeschwindigkeiten die Kurve in Abb. A.2 durch eine Gerade zu ersetzen:

$$\bar{p} - p = -\zeta \frac{\partial w_i}{\partial x_i}.$$

**Abb. A.2** Dehnung als Funktion des Überdrucks



Der hierdurch definierte Faktor  $\zeta > 0$  ist die *Volumenviskosität* (SI-Einheit kg/s m). Sie muss experimentell oder mit Hilfe der Methoden der statistischen Thermodynamik bestimmt werden, was nur für Stoffe mit einfachen Molekülen möglich ist. Man erkennt, dass mittlerer und thermodynamischer Druck streng genommen nur übereinstimmen, wenn  $\zeta = 0$  oder das Fluid inkompressibel ist,  $\partial w_i / \partial x_i = 0$ .

---

### A.3 Navier-Stokes-Gleichungen eines inkompressiblen Fluids konstanter Viskosität in kartesischen Koordinaten

Massenkraft ist die Fallbeschleunigung  $k_j = \mathbf{g}_j$ .  
 $x_1 = x$ -Richtung:

$$\rho \left( \frac{\partial w_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \right) = \rho g_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_3^2} \right). \quad (\text{A.8})$$

$x_2 = y$ -Richtung:

$$\rho \left( \frac{\partial w_2}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right) = \rho g_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \eta \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_3^2} \right). \quad (\text{A.9})$$

$x_3 = z$ -Richtung:

$$\rho \left( \frac{\partial w_3}{\partial t} + w_1 \frac{\partial w_3}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial w_3}{\partial x_2} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) = \rho g_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \eta \left( \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2} \right). \quad (\text{A.10})$$

---

### A.4 Navier-Stokes-Gleichungen eines inkompressiblen Fluids konstanter Viskosität in Zylinderkoordinaten

Massenkraft ist die Fallbeschleunigung  $k_j = \mathbf{g}_j$ .  
 $r$ -Richtung:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial w_r}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta^2}{r} + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} \right) \\ & = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$\theta$ -Richtung:

$$\begin{aligned} & \varrho \left( \frac{\partial w_\theta}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r w_\theta}{r} + w_z \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) \\ &= \varrho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$z$ -Richtung:

$$\begin{aligned} & \varrho \left( \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \\ &= \varrho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

## A.5 Entropiebilanz für Gemische

Die Gibbsche Fundamentalgleichung für Gemische,

$$du = T ds - p dv + \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} d\xi_K$$

oder

$$\varrho \frac{du}{dt} = \varrho T \frac{ds}{dt} - \varrho p \frac{dv}{dt} + \varrho \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \frac{d\xi_K}{dt}, \quad (\text{A.14})$$

lässt sich unter Beachtung von

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

und von (3.25)

$$\varrho \frac{d\xi_K}{dt} = -\frac{\partial j_{K,i}^*}{\partial x_i} + \dot{\Gamma}_K \quad (\text{A.15})$$

umformen in

$$\varrho \frac{du}{dt} = \varrho T \frac{ds}{dt} - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \frac{\partial j_{K,i}^*}{\partial x_i} + \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \dot{\Gamma}_K.$$

Wegen  $\mu_K / \tilde{M}_K = h_K - T s_K$  liefert dies

$$\varrho \frac{du}{dt} = \varrho T \frac{ds}{dt} - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \sum_K h_K \frac{\partial j_{K,i}^*}{\partial x_i} + T \sum_K s_K \frac{\partial j_{K,i}^*}{\partial x_i} + \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \dot{\Gamma}_K.$$

Einsetzen der Energiegleichung (3.81) ergibt unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= \dot{q}_i + \sum_K h_K j_{K,i}^* \\ -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \phi + \sum_K j_{K,i}^* k_{K,i} \\ &= \varrho T \frac{ds}{dt} + \sum_K j_{K,i}^* \frac{\partial h_K}{\partial x_i} + T \sum_K s_K \frac{\partial j_{K,i}^*}{\partial x_i} + \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \dot{\Gamma}_K. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Hierin schreiben wir für

$$T \sum_K s_K \frac{\partial j_{K,i}^*}{\partial x_i} = T \sum_K \frac{\partial (j_{K,i}^* s_K)}{\partial x_i} - T \sum_K j_{K,i}^* \frac{\partial s_K}{\partial x_i}$$

und fassen zusammen:

$$\sum_K j_{K,i}^* \left( \frac{\partial h_K}{\partial x_i} - T \frac{\partial s_K}{\partial x_i} \right) = \sum_K j_{K,i}^* \left( \frac{\partial \mu_K}{\partial x_i} \right)_T \frac{1}{\tilde{M}_K}.$$

Damit lautet (A.16)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \phi + \sum_K j_{K,i}^* k_{K,i} &= \varrho T \frac{ds}{dt} + T \sum_K \frac{\partial (j_{K,i}^* s_K)}{\partial x_i} \\ &\quad + \sum_K j_{K,i}^* \left( \frac{\partial \mu_K}{\partial x_i} \right)_T \frac{1}{\tilde{M}_K} + \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \dot{\Gamma}_K. \end{aligned}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} \varrho \frac{ds}{dt} &= -\frac{\partial (\dot{q}_i/T)}{\partial x_i} - \sum_K \frac{\partial (j_{K,i}^* s_K)}{\partial x_i} - \frac{\dot{q}_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_K j_{K,i}^* \left[ k_{K,i} - \frac{1}{\tilde{M}_K} \left( \frac{\partial \mu_K}{\partial x_i} \right)_T \right] + \frac{\phi}{T} + \frac{1}{T} \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \dot{\Gamma}_K. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit

$$\varrho \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (J_{s,i} - \varrho w_i s) + \dot{\sigma} \quad (\text{A.17})$$

folgt hieraus die Entropieströmung  $J_{s,i}$  (SI-Einheit  $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ )

$$J_{s,i} = \frac{\dot{q}_i}{T} + \sum_K j_{K,i}^* s_K + \varrho w_i s \quad (\text{A.18})$$

und der Entropieerzeugung  $\dot{\sigma}$  (SI-Einheit  $\text{W}/\text{m}^3\text{K}$ )

$$\dot{\sigma} = -\frac{\dot{q}_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{1}{T} \sum_K j_{K,i}^* \left[ k_{K,i} - \frac{1}{\tilde{M}_K} \left( \frac{\partial \mu_K}{\partial x_i} \right)_T \right] + \frac{\phi}{T} + \frac{1}{T} \sum_K \frac{\mu_K}{\tilde{M}_K} \dot{\Gamma}_K. \quad (\text{A.19})$$

Die Entropieströmung beruht auf einem Wärme- und einem Materiestrom, die Entropieerzeugung auf Wärmeströmung in einem Temperaturfeld, Diffusion durch Massenkräfte und Unterschiede im chemischen Potential, mechanische Dissipation und chemischen Reaktionen.

## A.6 Zusammenhang zwischen partieller und spezifischer Enthalpie

Ausgeschrieben lautet die Summe mit der Abkürzung  $\delta = \partial/\partial x_i$

$$\sum_{K=1}^N j_{K,i}^* \frac{\partial h_K}{\partial x_i} = j_{1,i}^* \delta h_1 + j_{2,i}^* \delta h_2 + \cdots + j_{N,i}^* \delta h_N.$$

Nun ist  $\sum_{K=1}^N j_{K,i}^* = 0$ , also  $j_{N,i}^* = -j_{1,i}^* - j_{2,i}^* - \cdots - j_{N-1,i}^*$ . Die Summe kann also auch

$$j_{1,i}^* \delta(h_1 - h_N) + j_{2,i}^* \delta(h_2 - h_N) + \cdots + j_{N-1,i}^* \delta(h_{N-1} - h_N)$$

geschrieben werden. Nun zeigt man in der Thermodynamik der Gemische [3.1], Seite 131, dass für die spezifischen partiellen Zustandsgrößen folgender Zusammenhang gilt

$$h_A - h_N = \left( \frac{\partial h}{\partial \xi_A} \right)_{T,p,K \neq A}, \quad A = 1, 2, \dots, N-1.$$

Es gilt damit

$$\sum_{K=1}^N j_{K,i}^* \frac{\partial h_K}{\partial x_i} = \sum_{K=1}^{N-1} j_{K,i}^* \delta \left( \frac{\partial h}{\partial \xi_K} \right)_{T,p,A \neq K} = \sum_{K=1}^{N-1} j_{K,i}^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi_K} \right)_{T,p,A \neq K}.$$

Nun ist andererseits die Enthalpie eines Gemisches gegeben durch

$$h = h(T, p, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1})$$

und daher

$$\left( \frac{\partial h}{\partial \xi_N} \right)_{T,p,\xi_K} = 0.$$

Man kann daher die Summe statt von  $K = 1$  bis  $K = N - 1$  auch von  $K = 1$  bis  $K = N$  laufen lassen, da das letzte Glied mit  $K = N$  null wird.



## A.7 Berechnung der Konstanten $a_n$ des Graetz-Nußelt-Problems (3.245)

Multiplikation von (3.244) mit  $\psi_m(r^+) (1 - r^{+2}) r^+$  und Integration zwischen den Grenzen  $r^+ = 0$  und  $r^+ = 1$  ergibt

$$\int_0^1 \psi_m (1 - r^{+2}) r^+ dr^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \psi_m \psi_n (1 - r^{+2}) r^+ dr^+.$$

Auf der rechten Seite verschwinden alle Integrale, wenn  $m \neq n$  ist, so dass sich (3.245) ergibt. Um zu zeigen, dass dies zutrifft, schreiben wir (3.242) für die Eigenwerte  $\beta_m$  und  $\beta_n$  an:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr^+} (r^+ \psi'_m) &= -\beta_m^2 (1 - r^{+2}) r^+ \psi_m \\ \frac{d}{dr^+} (r^+ \psi'_n) &= -\beta_n^2 (1 - r^{+2}) r^+ \psi_n. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\psi_n$  und der zweiten Gleichung mit  $\psi_m$  ergibt

$$\begin{aligned} \psi_n \frac{d}{dr^+} (r^+ \psi'_m) &= -\beta_m^2 (1 - r^{+2}) r^+ \psi_m \psi_n \\ \psi_m \frac{d}{dr^+} (r^+ \psi'_n) &= -\beta_n^2 (1 - r^{+2}) r^+ \psi_n \psi_m, \end{aligned}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr^+} (r^+ \psi_n \psi'_m) - r^+ \psi'_n \psi'_m &= -\beta_m^2 (1 - r^{+2}) r^+ \psi_m \psi_n \\ \frac{d}{dr^+} (r^+ \psi'_n \psi_m) - r^+ \psi'_n \psi'_m &= -\beta_n^2 (1 - r^{+2}) r^+ \psi_n \psi_m. \end{aligned}$$

Subtraktion beider Gleichungen und Integration zwischen den Grenzen  $r^+ = 0$  und  $r^+ = 1$  ergibt

$$r^+ (\psi_n \psi'_m - \psi'_n \psi_m) \Big|_0^1 = (\beta_n^2 - \beta_m^2) \int_0^1 \psi_m \psi_n (1 - r^{+2}) r^+ dr^+.$$

Wegen  $\psi_m(r^+ = 1) = \psi_n(r^+ = 1) = 0$  und  $\psi'_m(r^+ = 0) = \psi'_n(r^+ = 0) = 0$  verschwindet die linke Seite. Daher muss das Integral auf der rechten Seite ebenfalls verschwinden, wenn  $n \neq m$  ist.

## Anhang B: Stoffwerte

**Tab. B.1** Stoffwerte von Luft beim Druck  $p = 1$  bar

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/Km	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
-200	900,8	1,915	4,883	149,6	2,296	0,867	2,647
-194,36	875,5	1,933	5,233	140,2	1,912	0,828	2,308
-191,54	4,442	1,089	13,87	7,673	13,08	15,86	0,8248
-180	3,838	1,052	11,61	8,803	17,28	21,81	0,7921
-160	3,123	1,027	9,224	10,73	25,62	33,48	0,7653
-140	2,639	1,017	7,712	12,61	35,29	47,01	0,7507
-120	2,287	1,012	6,647	14,43	46,22	62,38	0,7409
-100	2,019	1,009	5,849	16,21	58,34	79,54	0,7335
-80	1,808	1,007	5,226	17,92	71,59	98,41	0,7275
-60	1,637	1,006	4,725	19,60	85,93	118,9	0,7224
-40	1,496	1,006	4,313	21,22	101,3	141,1	0,7181
-20	1,377	1,006	3,968	22,81	117,7	164,7	0,7143
-10	1,325	1,006	3,815	23,59	126,2	177,1	0,7126
0	1,276	1,006	3,674	24,36	135,0	189,8	0,7110
20	1,189	1,006	3,421	25,87	153,2	216,3	0,7081
40	1,112	1,007	3,201	27,35	172,3	244,2	0,7056
80	0,9862	1,010	2,836	30,225	213,0	303,5	0,7018
100	0,9333	1,012	2,683	31,62	234,6	335,0	0,7004
120	0,8858	1,014	2,546	32,99	257,0	367,5	0,6994
140	0,8428	1,016	2,423	34,34	280,1	401,0	0,6986
160	0,8039	1,017	2,310	35,66	304,0	435,4	0,6982
180	0,7684	1,022	2,208	36,96	328,6	470,8	0,6980
200	0,7359	1,025	2,115	38,25	353,9	507,0	0,6981

(Fortsetzung)

**Tab. B.1** (Fortsetzung)

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/Km	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
300	0,6075	1,045	1,745	44,42	490,7	699,5	0,7061
400	0,5172	1,067	1,486	50,24	643,5	908,9	0,7081
500	0,4503	1,093	1,293	55,80	811,2	1134	0,7154
600	0,3988	1,115	1,145	61,14	993,0	1375	0,7224
700	0,3578	1,136	1,027	66,31	1188	1631	0,7284
800	0,3245	1,154	0,9317	71,35	1397	1905	0,7333
900	0,2968	1,171	0,8523	76,27	1618	2195	0,7370
1000	0,2735	1,185	0,7853	81,10	1851	2503	0,7396

**Tab. B.2** Stoffwerte von Wasser beim Druck  $p = 1$  bar

Wasser flüssig							
$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kgK	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/Km	$\nu$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
0	999,84	4,219	-0,0677	562,0	1,792	0,1332	13,45
5	999,97	4,205	0,0163	572,3	1,518	0,1361	11,15
10	999,70	4,195	0,0881	582,0	1,306	0,1388	9,414
15	999,10	4,189	0,1509	591,0	1,139	0,1412	8,063
20	998,21	4,181	0,2068	598,5	1,003	0,1433	7,003
25	997,05	4,182	0,2569	607,5	0,893	0,1457	6,127
30	995,65	4,180	0,3029	615,0	0,801	0,1478	5,419
35	994,04	4,179	0,3453	622,0	0,723	0,1497	4,831
40	992,22	4,179	0,3849	628,6	0,658	0,1516	4,339
45	990,22	4,179	0,4222	634,8	0,602	0,1534	3,922
50	988,05	4,180	0,4574	640,5	0,553	0,1551	3,566
55	985,71	4,181	0,4910	645,8	0,511	0,1567	3,260
60	983,21	4,183	0,5231	650,8	0,474	0,1582	2,995
65	980,57	4,185	0,5541	655,4	0,441	0,1597	2,764
70	977,78	4,188	0,5841	659,6	0,413	0,1611	2,562
75	974,86	4,192	0,6132	663,5	0,387	0,1624	2,384
80	971,80	4,196	0,6417	667,0	0,364	0,1636	2,227

(Fortsetzung)

**Tab. B.2** (Fortsetzung)

Wasser flüssig							
$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kgK	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/Km	$\nu$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
85	968,62	4,200	0,6695	670,2	0,344	0,1647	2,087
90	965,32	4,205	0,6970	673,0	0,325	0,1658	1,963
95	961,89	4,211	0,7241	675,5	0,309	0,1668	1,852
99,606 <sup>a</sup>	958,64	4,216	0,7489	677,6	0,295	0,1676	1,759

<sup>a</sup>Sättigungszustand

Wasser gasförmig (Wasserdampf)							
$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kgK	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/Km	$\nu$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
100	0,5897	2,077	2,899	25,08	20,81	20,48	1,016
150	0,5164	1,985	2,452	28,86	27,47	28,16	0,9755
200	0,4603	1,975	2,159	33,28	35,14	36,60	0,9601
250	0,4156	1,989	1,938	38,17	43,84	46,17	0,9495
300	0,3790	2,012	1,761	43,42	53,54	56,94	0,9403
350	0,3483	2,040	1,615	48,97	64,23	68,92	0,9319
400	0,3223	2,070	1,493	54,76	75,86	82,09	0,9242
450	0,2999	2,102	1,388	60,77	88,43	96,42	0,9171
500	0,2805	2,134	1,297	66,98	101,9	111,9	0,9106
600	0,2483	2,203	1,147	79,90	131,4	146,1	0,8993
700	0,2227	2,273	1,029	93,38	164,1	184,4	0,8898
800	0,2019	2,343	0,9327	107,3	199,9	226,8	0,8815
900	0,1847	2,412	0,8530	121,7	238,6	273,1	0,8739
1000	0,1702	2,478	0,7858	136,3	280,1	323,2	0,8665

**Tab. B.3** Stoffwerte von Wasser im Sättigungszustand vom Tripelpunkt bis zum kritischen Punkt

$\vartheta$ °C	$p$ bar	$\rho'$	$\rho''$	$c'_p$	$c''_p$	$\beta'$	$\beta''$	$\Delta h_v$ kJ/kg
		kg/m <sup>3</sup>		kJ/kgK		10 <sup>-3</sup> /K		
0,01	0,006117	999,78	0,004855	4,229	1,868	-0,08044	3,672	2500,5
10	0,012281	999,69	0,009404	4,188	1,882	0,08720	3,548	2476,9
20	0,023388	998,19	0,01731	4,183	1,882	0,2089	3,435	2453,3
30	0,042455	995,61	0,03040	4,183	1,892	0,3050	3,332	2429,7
40	0,073814	992,17	0,05121	4,182	1,904	0,3859	3,240	2405,9

(Fortsetzung)

Tab.B.3 (Fortsetzung)

$\vartheta$	$p$	$\rho'$	$\rho''$	$c'_p$	$c''_p$	$\beta'$	$\beta''$	$\Delta h_v$	
°C	bar	kg/m <sup>3</sup>		kJ/kgK		10 <sup>-3</sup> /K		kJ/kg	
50	0,12344	987,99	0,08308	4,182	1,919	0,4572	3,156	2381,9	
60	0,19932	983,16	0,13030	4,183	1,937	0,5222	3,083	2357,6	
70	0,31176	977,75	0,19823	4,187	1,958	0,5827	3,018	2333,1	
80	0,47373	971,79	0,29336	4,194	1,983	0,6403	2,964	2308,1	
90	0,70117	965,33	0,42343	4,204	2,011	0,6958	2,919	2282,7	
100	1,0132	958,39	0,59750	4,217	2,044	0,7501	2,884	2256,7	
110	1,4324	951,00	0,82601	4,232	2,082	0,8038	2,860	2229,9	
120	1,9848	943,16	1,1208	4,249	2,126	0,8576	2,846	2202,4	
130	2,7002	934,88	1,4954	4,267	2,176	0,9123	2,844	2174,0	
140	3,6119	926,18	1,9647	4,288	2,233	0,9683	2,855	2144,6	
150	4,7572	917,06	2,5454	4,312	2,299	1,026	2,878	2114,1	
160	6,1766	907,50	3,2564	4,339	2,374	1,087	2,916	2082,3	
170	7,9147	897,51	4,1181	4,369	2,460	1,152	2,969	2049,2	
180	10,019	887,06	5,1539	4,403	2,558	1,221	3,039	2014,5	
190	12,542	876,15	6,3896	4,443	2,670	1,296	3,128	1978,2	
200	15,536	864,74	7,8542	4,489	2,797	1,377	3,238	1940,1	
250	39,736	799,07	19,956	4,857	3,772	1,955	4,245	1715,4	
300	85,838	712,41	46,154	5,746	5,981	3,273	7,010	1404,7	
350	165,21	574,69	113,48	10,13	16,11	10,37	22,12	893,03	
373,946	220,64	322,00	322,00	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	
$\vartheta$	$\lambda'$	$\lambda''$	$\nu'$	$\nu''$	$a'$	$a''$	$Pr'$	$Pr''$	$\sigma$
°C	10 <sup>-3</sup> W/Km		10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s		10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s		—		10 <sup>-3</sup> N/m
0,01	561,0	17,07	1,792	1898,0	0,1327	1883,0	13,51	1,008	75,65
10	580,0	17,62	1,307	1006,0	0,1385	999,8	9,434	1,006	74,22
20	598,4	18,23	1,004	562,0	0,1433	559,6	7,005	1,004	72,74
30	615,4	18,89	0,8012	329,3	0,1478	328,3	5,422	1,003	71,20
40	630,5	19,60	0,6584	201,3	0,1519	200,9	4,333	1,002	69,60
50	643,5	20,36	0,5537	127,8	0,1558	127,7	3,555	1,001	67,95
60	654,3	21,18	0,4746	83,91	0,1591	83,92	2,983	1,000	66,24
70	663,1	22,07	0,4132	56,80	0,1620	56,85	2,551	0,9992	64,49
80	670,0	23,01	0,3648	39,51	0,1644	39,56	2,219	0,9989	62,68
90	675,3	24,02	0,3258	28,17	0,1664	28,20	1,958	0,9989	60,82

(Fortsetzung)

**Tab. B.3** (Fortsetzung)

$\vartheta$	$\lambda'$	$\lambda''$	$\nu'$	$\nu'''$	$a'$	$a''$	$Pr'$	$Pr''$	$\sigma$
°C	$10^{-3} \text{W/Km}$		$10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$		$10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$		—		$10^{-3} \text{N/m}$
100	679,1	25,09	0,2941	20,53	0,1680	20,55	1,750	0,9994	58,92
110	681,7	26,24	0,2680	15,27	0,1694	15,26	1,582	1,001	56,97
120	683,2	27,46	0,2462	11,56	0,1705	11,53	1,444	1,003	54,97
130	683,7	28,76	0,2278	8,894	0,1714	8,840	1,329	1,006	52,94
140	683,3	30,14	0,2123	6,946	0,1720	6,869	1,234	1,011	50,86
150	682,1	31,59	0,1991	5,496	0,1725	5,399	1,154	1,018	48,75
160	680,0	33,12	0,1877	4,402	0,1727	4,285	1,087	1,027	46,60
170	677,1	34,74	0,1779	3,565	0,1727	3,430	1,030	1,039	44,41
180	673,4	36,44	0,1693	2,915	0,1724	2,764	0,9822	1,055	42,20
190	668,8	38,23	0,1619	2,405	0,1718	2,241	0,9423	1,073	39,95
200	663,4	40,10	0,1554	2,001	0,1709	0,825	0,9093	1,096	37,68
250	621,4	51,23	0,1329	0,8766	0,1601	0,6804	0,8299	1,288	26,05
300	547,7	69,49	0,1207	0,4257	0,1338	0,2517	0,9018	1,691	14,37
350	447,6	134,6	0,1146	0,2098	0,07692	0,07365	1,490	2,849	3,675
373,946	141,9	141,9	0,1341	0,1341	0	0	$\infty$	$\infty$	0

**Tab. B.4** Stoffwerte von Ammoniak beim Druck  $p = 1 \text{ bar}$ 

$\vartheta$	$\rho$	$c_p$	$\beta$	$\lambda$	$\nu$	$a$	$Pr$
°C	$\text{kg/m}^3$	$\text{kJ/kg K}$	$10^{-3}/\text{K}$	$10^{-3} \text{W/Km}$	$10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$	$10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$	—
-70	724,7	4,245	1,500	792,2	6,557	2,575	2,546
-60	713,6	4,303	1,587	757,1	5,485	2,466	2,225
-50	702,1	4,360	1,673	722,4	4,685	2,360	1,985
-40	690,2	4,414	1,760	688,1	4,076	2,259	1,804
-30,59	682,3	4,447	1,817	666,6	3,758	2,197	1,711
-30,59	0,8787	2,295	4,725	20,95	91,57	103,9	0,8811
-30	0,8641	2,273	4,610	21,12	94,49	107,6	0,8786
-20	0,8263	2,226	4,331	21,64	102,9	117,6	0,8746
-10	0,7923	2,196	4,097	22,24	111,6	127,8	0,8735
0	0,7612	2,178	3,897	22,91	120,8	138,2	0,8738
10	0,7328	2,168	3,722	23,67	130,3	149,0	0,8746

(Fortsetzung)

**Tab. B.4** (Fortsetzung)

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
20	0,7066	2,164	3,567	24,49	140,3	160,2	0,8755
30	0,6823	2,164	3,428	25,39	150,6	171,9	0,8760
40	0,6597	2,169	3,301	26,36	161,4	184,2	0,8760
50	0,6387	2,176	3,186	27,39	172,6	197,1	0,8755
60	0,6190	2,185	3,079	28,48	184,1	210,6	0,8744
70	0,6005	2,196	2,981	29,64	196,1	224,7	0,8727
80	0,5832	2,209	2,889	30,85	208,5	239,5	0,8706
90	0,5668	2,223	2,804	32,12	221,3	254,9	0,8682
100	0,5513	2,238	2,724	33,44	234,5	271,0	0,8654
110	0,5367	2,254	2,648	34,81	248,1	287,7	0,8624
120	0,5229	2,271	2,578	36,22	262,1	305,0	0,8593
130	0,5098	2,289	2,511	37,68	276,5	322,9	0,8562
140	0,4973	2,307	2,447	39,17	291,3	341,4	0,8530
150	0,4854	2,326	2,387	40,69	306,4	360,5	0,8500
200	0,4337	2,426	2,128	48,69	387,9	462,9	0,8380
250	0,3920	2,533	1,921	56,92	478,4	573,2	0,8347
300	0,3577	2,645	1,751	64,77	577,8	684,7	0,8439

**Tab. B.5** Stoffwerte von Kohlendioxid beim Druck  $p = 1$  bar

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
-50	2,403	0,7825	4,682	11,10	46,69	59,05	0,7907
-40	2,296	0,7903	4,453	11,77	51,05	64,85	0,7873
-30	2,198	0,7988	4,248	12,45	55,60	70,92	0,7839
-20	2,109	0,8078	4,063	13,17	60,32	77,28	0,7805
-10	2,027	0,8172	3,896	13,90	65,21	83,94	0,7769
0	1,951	0,8267	3,742	14,66	70,28	90,89	0,7732
10	1,880	0,8363	3,601	15,43	75,51	98,13	0,7695
20	1,815	0,8459	3,471	16,22	80,92	105,7	0,7659
30	1,754	0,8555	3,351	17,03	86,49	113,5	0,7623
40	1,697	0,8650	3,239	17,84	92,22	121,5	0,7589

(Fortsetzung)

**Tab. B.5** (Fortsetzung)

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
50	1,644	0,8744	3,134	18,67	98,12	129,8	0,7557
60	1,594	0,8837	3,037	19,50	104,2	138,4	0,7526
70	1,547	0,8929	2,945	20,34	110,4	147,2	0,7498
80	1,503	0,9018	2,859	21,18	116,8	156,3	0,7471
90	1,461	0,9107	2,778	22,03	123,3	165,5	0,7447
100	1,422	0,9193	2,702	22,87	129,9	175,0	0,7425
120	1,349	0,9361	2,561	24,57	143,7	194,6	0,7386
140	1,283	0,9523	2,435	26,27	158,1	215,0	0,7353
160	1,224	0,9678	2,321	27,96	173,0	236,1	0,7327
180	1,169	0,9827	2,217	29,64	188,4	257,9	0,7306
200	1,120	0,9971	2,122	31,31	204,4	280,5	0,7289
300	0,9238	1,061	1,749	39,47	291,8	402,6	0,7248
400	0,7864	1,114	1,488	47,26	390,6	539,4	0,7242
500	0,6846	1,159	1,294	54,70	499,5	689,7	0,7242
600	0,6061	1,196	1,146	61,84	617,7	853,2	0,7239
700	0,5438	1,227	1,028	68,69	744,3	1030	0,7229
800	0,4931	1,253	0,9320	75,30	878,9	1219	0,7212
900	0,4511	1,275	0,8525	81,69	1021	1420	0,7189

**Tab. B.6** Stoffwerte von Stickstoff beim Druck  $p = 1$  bar

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
-210	867,4	2,000	4,727	176,1	2,489	1,015	2,451
-200	825,0	2,024	5,339	155,7	1,929	0,9327	2,068
-190	4,195	1,102	13,32	8,061	13,04	17,44	0,7477
-180	3,707	1,080	11,53	9,108	16,73	22,74	0,7355
-160	3,019	1,061	9,200	11,13	25,19	34,75	0,7248
-120	2,212	1,048	6,643	14,86	46,06	64,11	0,7185
-100	1,953	1,045	5,847	16,59	58,30	81,27	0,7174

(Fortsetzung)



**Tab. B.6** (Fortsetzung)

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
-90	1,845	1,045	5,518	17,43	64,83	90,42	0,7170
-80	1,749	1,044	5,224	18,24	71,63	99,95	0,7167
-70	1,662	1,043	4,961	19,04	78,70	109,8	0,7165
-60	1,583	1,043	4,724	19,83	86,01	120,1	0,7163
-50	1,512	1,042	4,508	20,59	93,58	130,7	0,7162
-40	1,447	1,042	4,312	21,35	101,4	141,6	0,7161
-30	1,387	1,042	4,132	22,09	109,4	152,8	0,7160
-20	1,332	1,042	3,967	22,81	117,7	164,4	0,7159
-10	1,281	1,042	3,814	23,53	126,2	176,3	0,7158
0	1,234	1,041	3,673	24,23	134,9	188,5	0,7158
10	1,190	1,041	3,542	24,92	143,9	201,0	0,7158
20	1,150	1,041	3,420	25,60	153,1	213,8	0,7157
30	1,112	1,041	3,307	26,27	162,4	226,9	0,7157
40	1,076	1,041	3,200	26,93	172,0	240,3	0,7157
50	1,043	1,042	3,101	27,59	181,8	254,0	0,7158
60	1,011	1,042	3,007	28,23	191,8	268,0	0,7158
70	0,9818	1,042	2,919	28,87	202,0	282,2	0,7158
80	0,9539	1,042	2,836	29,50	212,4	296,7	0,7159
90	0,9276	1,043	2,757	30,13	223,0	311,5	0,7160
100	0,9027	1,043	2,683	30,75	233,8	326,5	0,7160
120	0,8568	1,044	2,546	31,97	255,9	357,3	0,7163
140	0,8153	1,046	2,422	33,18	278,8	389,1	0,7165
160	0,7776	1,048	2,310	34,37	302,4	421,9	0,7169
180	0,7433	1,050	2,208	35,55	326,8	455,6	0,7173
200	0,7118	1,053	2,114	36,72	351,8	490,2	0,7177
300	0,5876	1,070	1,745	42,47	487,1	675,8	0,7208
400	0,5003	1,092	1,485	48,12	638,4	881,0	0,7247
500	0,4356	1,116	0,8522	53,68	804,8	1104	0,7288
600	0,3857	1,140	1,145	59,13	985,6	1345	0,7327
700	0,3461	1,162	1,027	64,45	1180	1603	0,7363
800	0,3139	1,182	0,9316	69,63	1388	1887	0,7394

**Tab. B.7** Stoffwerte von Sauerstoff beim Druck  $p = 1$  bar

$\vartheta$ °C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
-210	1268	1,676	3,53	0,190	3,93	0,892	4,41
-200	1222	1,678	3,78	0,175	2,70	0,854	3,16
-190	1175	1,685	4,08	0,161	2,02	0,813	2,48
-180	4,254	0,9473	11,7	0,0843	16,9	20,9	0,81
-160	3,458	0,9305	9,26	0,0103	25,2	32,1	0,78
-140	2,921	0,9237	7,74	0,0122	34,9	45,3	0,77
-120	2,530	0,9191	6,66	0,0141	45,8	60,5	0,76
-100	2,233	0,9164	5,86	0,0159	58,0	77,6	0,75
-90	2,110	0,9155	5,53	0,0168	64,6	86,8	0,74
-80	1,999	0,9149	5,23	0,0176	71,4	96,5	0,74
-70	1,900	0,9145	4,97	0,0185	78,4	106z	0,74
-60	1,810	0,9143	4,73	0,0194	85,9	117	0,74
-50	1,728	0,9142	4,51	0,0200	93,6	128	0,73
-40	1,654	0,9144	4,32	0,0210	102	139	0,73
-30	1,585	0,9147	4,14	0,0219	110	151	0,73
-20	1,522	0,9152	3,97	0,0227	118	163	0,72
-10	1,464	0,9158	3,82	0,0235	127	176	0,72
0	1,410	0,9167	3,67	0,0244	136	188	0,72
10	1,360	0,9177	3,54	0,0252	145	202	0,72
20	1,314	0,9189	3,42	0,0260	154	215	0,72
25	1,292	0,9196	3,36	0,0263	159	222	0,72

**Tab. B.8** Stoffwerte von gasförmigem Helium beim Druck  $p = 1$  bar

$T$ K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
4	129,9	4,396	152,6	18,62	0,2562	0,3262	0,785
4,2163	125,0	5,243	204,6	18,64	0,2534	0,2845	0,891
4,2163	16,53	9,015	616,3	9,005	0,7505	0,6042	1,24
5	11,78	6,735	326,3	10,22	1,1789	1,288	0,916
6	9,028	6,011	222,2	11,74	1,750	2,163	0,809
8	6,344	5,575	143,6	14,49	3,049	4,097	0,744
10	4,949	5,426	108,4	16,89	4,563	6,290	0,725

(Fortsetzung)

**Tab. B.8** (Fortsetzung)

$T$ K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ kJ/kg K	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> /K	$\lambda$ 10 <sup>-3</sup> W/K m	$\nu$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$a$ 10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	$Pr$ —
20	2,408	5,250	50,64	26,20	14,87	20,72	0,718
40	1,200	5,206	25,00	40,44	46,17	64,72	0,713
60	0,8006	5,198	16,64	52,55	88,89	126,3	0,704
80	0,6007	5,196	12,48	63,52	141,6	203,5	0,696
100	0,4807	5,194	9,986	73,71	203,4	295,2	0,689
120	0,4007	5,194	8,323	83,33	269,4	400,4	0,673
140	0,3435	5,194	7,135	92,50	347,7	518,5	0,671
160	0,3006	5,193	6,244	101,3	434,0	648,8	0,669
180	0,2672	5,193	5,551	109,8	528,1	791,0	0,668
200	0,2405	5,193	4,996	118,0	629,5	944,5	0,667
220	0,2187	5,193	4,542	126,0	738,3	1109	0,666
240	0,2005	5,193	4,164	133,7	854,1	1285	0,665
260	0,1851	5,193	3,844	141,3	976,9	1470	0,664
280	0,1719	5,193	3,569	148,7	1106	1666	0,664
300	0,1604	5,193	3,332	156,0	1243	1873	0,664
350	0,1375	5,193	2,856	173,5	1611	2430	0,663
400	0,1203	5,193	2,499	190,4	2019	3047	0,663
500	0,09626	5,193	1,999	222,3	2947	4447	0,663
600	0,08022	5,193	1,666	252,4	4016	6059	0,663
700	0,06876	5,193	1,428	281,1	5220	7871	0,663
800	0,06017	5,193	1,250	308,5	6554	9874	0,664
900	0,05348	5,193	1,111	335,0	8011	12061	0,664
1000	0,04814	5,193	0,9999	360,6	9590	14426	0,665
1100	0,04376	5,193	0,9090	385,5	11285	16963	0,666
1200	0,04011	5,193	0,8332	409,7	13094	19667	0,666
1300	0,03703	5,193	0,7692	433,3	15014	22534	0,666
1400	0,03438	5,193	0,7142	456,4	17043	25560	0,667
1500	0,03209	5,193	0,6666	479,0	19178	28742	0,667

**Tab. B.9** Diffusionskoeffizienten beim Druck  $p = 1,01325 \text{ bar} = 1 \text{ atm}$  (a) Gase Die Druck- und Temperaturabhängigkeit im idealen Gaszustand kann man abschätzen aus  $D \sim T^{1,75}/p$ 

Stoffe	N <sub>2</sub> -CO <sub>2</sub>	N <sub>2</sub> -CH <sub>4</sub>	N <sub>2</sub> -C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	N <sub>2</sub> -SF <sub>6</sub>
$\vartheta$ °C	$D$ $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$	$D$ $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$	$D$ $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$	$D$ $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
0	0,1391	0,1955	0,1302	0,0869
20	0,1583	0,2219	0,1481	0,0987
40	0,1785	0,2495	0,1669	0,1110
60	0,1997	0,2784	0,1865	0,1239
80	0,2217	0,3084	0,2069	0,1373
100	0,2446	0,3396	0,2281	0,1512
200	0,3714	0,5122	0,3455	0,2281
300	0,5175	0,7106	0,4806	0,3166
400	0,6814	0,9331	0,6322	0,4159
500	0,8621	1,1785	0,7993	0,5254

Stoffe	$T$ K	$D$ $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
Luft-CO <sub>2</sub>	276	0,144
	317	0,179
Luft-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	313	0,147
Luft-He	276	0,632
Luft-H <sub>1</sub> 2O	313	0,292
CO <sub>2</sub> -H <sub>2</sub> O	307	0,201
He H <sub>2</sub> O	352	1,136
H <sub>2</sub> -H <sub>2</sub> O	307	0,927
CH <sub>4</sub> -H <sub>2</sub> O	352	0,361

(b) verdünnte wässrige Lösungen

Stoffe	$T$ K	$D$ $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
CH <sub>4</sub> -H <sub>2</sub> O	275	0,85
	333	3,55
CO <sub>2</sub> -H <sub>2</sub> O	298	2,00
CH <sub>3</sub> OH-H <sub>2</sub> O	288	1,26
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH-H <sub>2</sub> O	288	1,0
O <sub>2</sub> -H <sub>2</sub> O	298	2,4
N <sub>2</sub> -H <sub>2</sub> O	298	2,6
H <sub>2</sub> -H <sub>2</sub> O	298	6,3

**Tab. B.10** Thermophysikalische Eigenschaften nichtmetallischer Festkörper bei 20 °C

Stoff	$\rho$ 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>	$c$ kJ/kgK	$\lambda$ W/K m	$a$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
Acrylglas (Plexiglas)	1,18	1,44	0,184	0,108
Asphalt	2,12	0,92	0,70	0,36
Bakelit	1,27	1,59	0,233	0,115
Beton	2,1	0,88	1,0	0,54
Eis (0 °C)	0,917	2,04	2,25	1,203
Erdreich, grobkiesig	2,04	1,84	0,52	0,14
Sandboden, trocken	1,65	0,80	0,27	0,20
Sandboden, feucht	1,75	1,00	0,58	0,33
Tonboden	1,45	0,88	1,28	1,00
Fett	0,91	1,93	0,16	0,091
Glas, Fenster-	2,48	0,70	0,87	0,50
Spiegel-	2,70	0,80	0,76	0,35
Quarz-	2,21	0,73	1,40	0,87
Thermometer-	2,58	0,78	0,97	0,48
Gips	1,00	1,09	0,51	0,47
Granit	2,75	0,89	2,9	1,18
Korkplatten	0,19	1,88	0,041	0,115
Marmor	2,6	0,80	2,8	1,35
Mörtel	1,9	0,80	0,93	0,61
Papier	0,7	1,20	0,12	0,14
Polyethylen	0,92	2,30	0,35	0,17
Polyamide	1,13	1,6	0,29	0,16
Polytetrafluorethylen (Teflon)	2,20	1,04	0,23	0,10
PVC	1,38	0,96	0,15	0,11
Porzellan (95 °C)	2,40	1,08	1,03	0,40
Steinkohle	1,35	1,26	0,26	0,15
Tannenholz (radial)	0,415	2,72	0,14	0,12
Verputz	1,69	0,80	0,79	0,58
Zelluloid	1,38	1,67	0,23	0,10
Ziegelstein	1,6 ... 1,8	0,84	0,38 ... 0,52	0,28 ... 0,34

**Tab. B.11** Thermophysikalische Eigenschaften von Metallen und Legierungen bei 20 °C

Stoff	$\rho$ 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>	$c$ kJ/kgK	$\lambda$ W/Km	$a$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
<i>Metalle</i>				
Aluminium	2,70	0,888	237	98,8
Blei	11,3	0,129	35	24,0
Chrom	6,92	0,440	91	29,9
Eisen	7,86	0,452	81	22,8
Gold	19,26	0,129	316	127,2
Iridium	22,42	0,130	147	50,4
Kupfer	8,93	0,382	399	117,0
Magnesium	1,74	1,020	156	87,9
Mangan	7,42	0,473	21	6,0
Molybdän	10,2	0,251	138	53,9
Natrium	9,71	1,220	133	11,2
Nickel	8,85	0,448	91	23,0
Platin	21,37	0,133	71	25,0
Rhodium	12,44	0,248	150	48,6
Silber	10,5	0,235	427	173,0
Titan	4,5	0,522	22	9,4
Uran	18,7	0,175	28	8,6
Wolfram	19,0	0,134	173	67,9
Zink	7,10	0,387	121	44,0
Zinn, weiß	7,29	0,225	67	40,8
Zirkon	6,45	0,290	23	12,3
<i>Legierungen</i>				
Bronze (84 Cu, 9 Zn, 6 Sn, 1 Pb)	8,8	0,377	62	18,7
Duraluminium	2,7	0,912	165	67,0
Gusseisen	7,8	0,54	42 ... 50	10 ... 12
Kohlenstoffstahl (<0,4 % C)	7,85	0,465	45 ... 55	12 ... 15
Cr-Ni-Stahl (X12 CrNi 18,8)	7,8	0,50	15	3,8
Cr-Stahl (X8 Cr17)	7,7	0,46	25	7,1

**Tab.B.12** Emissionsgrade nichtmetallischer Oberflächen.  $\varepsilon_n$  Gesamtemissionsgrad in Richtung der Flächennormale,  $\varepsilon$  hemisphärischer Gesamtemissionsgrad

Stoff	$\vartheta / ^\circ\text{C}$	$\varepsilon_n$	$\varepsilon$
Acrylglas (Plexiglas)	20...60	0,97	
Beton, rauh	0...93		0,94
Buchenholz	70	0,94	0,91
Dachpappe	20	0,91	
Eichenholz, gehobelt	0...93		0,90
Eis, glatt, Dicke >4 mm	-9, 6	0,965	0,918
Emaillack, weiß	20	0,91	
Fliesen, hellgrau	25	0,92	
Fußbodenbelag (Fa. Pegulan)	20...60	0,94	
Gummi	20	0,92	
Kachel, weiß	25	0,93	
Kohle	150	0,81	
Kork	25	0,80	
Lack, schwarz, glänzend	25	0,88	
Marmor, poliert	0...93		0,90
Ölfarbe, 16 Sorten unterschiedlicher Farben	100	0,92...0,96	
Öl, dicke Schicht	21	0,82	
Papier, weiß, matt	95	0,92	0,89
Putz	0...200		0,91
Polytetrafluorethylen (Teflon)	20 ...100	0,97	
Pyrex-Glas	-170...430	0,85	
Reifbelag, rauh	0	0,985	
Sand	20	0,76	
Schamotte	1000	0,75	
Schmirgel (Korund), rauh	84	0,855	0,842
Tafelglas, 6 mm dick	-60...0	0,910	
	60	0,913	
	120	0,919	
Wasser, Dicke >0,1 mm	10...50	0,965	0,91
Ziegel, rot	0...93		0,93

**Tab. B.13** Emissionsgrade von Metall-Oberflächen.  $\varepsilon_n$  Gesamtemissionsgrad in Richtung der Flächennormale,  $\varepsilon$  hemisphärischer Gesamtemissionsgrad. Bei Angaben für ein Temperaturintervall darf zwischen den angegebenen Werten der Emissionsgrade linear interpoliert werden

Stoff	$\vartheta / ^\circ\text{C}$	$\varepsilon_n$	$\varepsilon$
Aluminium, poliert	20	0,045	
rauh	75	0,055...0,07	
walzblank	170	0,039	0,049
handelsübliche Folie	100	0,09	
oxidiert bei 600 °C	200...600	0,11...0,19	
stark oxidiert	100...500	0,32...0,31	
Blei, nicht oxidiert	127...227	0,06...0,08	
grau oxidiert	20	0,28	
Chrom, poliert	150	0,058	
bei Rotglut oxidiert	400...800	0,11...0,32	
Eisen, poliert	-73...727	0,04...0,19	0,06...0,25
oxidiert	-73...727	0,32...0,60	
blank geschmiregelt	25	0,24	
blank geätzt	150	0,128	0,158
Gusshaut	100	0,80	
angerostet	25	0,61	
stark verrostet	20	0,85	
Gold, poliert	227...627	0,020...0,035	
oxidiert	-173...827		0,013...0,070
Kupfer, poliert	327...727	0,012...0,019	
oxidiert	130	0,76	0,725
stark oxidiert	25	0,78	
	327	0,83	
	427	0,89	
	527...727	0,91...0,92	
Magnesium, walzblank	118	0,048	0,053
Messing, poliert	25	0,038...0,043	
matt	50...350	0,22	
oxidiert	200...600	0,60	
Nickel, poliert	100	0,045	0,053
	127...1127	0,07...0,19	
	127...727		0,09...0,15
oxidiert	227...627	0,37...0,47	

(Fortsetzung)



**Tab. B.13** (Fortsetzung)

Stoff	$\vartheta / ^\circ\text{C}$	$\varepsilon_n$	$\varepsilon$
Platin, poliert	127...1127	0,05...0,16	
	127...1527		0,07...0,21
Platindraht	227...1377	0,07...0,18	
Quecksilber, nicht oxidiert	25...100		0,10...0,12
Silber, poliert	127...527	0,020...0,030	
	127...927		0,020...0,047
Stahl, Werkstoff-Nr.			
DIN 1.4301=AISI 304			
poliert	50...200	0,111...0,132	
gesandstrahlt, $R_a = 2,1 \mu\text{m}$	-50...200	0,446...0,488	
Wismut, blank	80	0,340	0,366
Wolfram, gealtert	1327...2427		0,20...0,31
Zink, poliert	227...327	0,04...0,05	
	25	0,23...0,25	
Zinn, glänzend	25	0,064	

# Anhang C: Lösungen der Aufgaben

## Kapitel 1: Einführung. Technische Anwendungen

**1.1:**  $\dot{Q} = 484 \text{ W}$ ; für die Gasbetonsteine  $\dot{Q} = 270 \text{ W}$

**1.3:** Durch Differenzieren von  $\dot{q} = -\lambda(\vartheta)d\vartheta/dx$  folgt

$$\frac{d\lambda}{d\vartheta} = -\lambda \frac{d^2\vartheta/dx^2}{(d\vartheta/dx)^2} < 0.$$

$\lambda$  nimmt mit steigender Temperatur ab.

**1.4:**  $I_{\max} = 28,6 \text{ A}$

**1.5:**  $\vartheta_{W1} = 38,9^\circ\text{C}$

**1.6:** a)  $\vartheta_{\max} = \vartheta_0$  auf der Hypothenuse  $y = x$ ;  $\vartheta_{\min} = \vartheta_0 - \vartheta_1$  bei  $x = l$ ,  
 $y = 0$ .  $\vartheta_1 = \vartheta_{\max} - \vartheta_{\min}$ .

b)  $\text{grad } \vartheta = \frac{2\vartheta_1}{l} \left( -\frac{x}{l} \mathbf{e}_x + \frac{y}{l} \mathbf{e}_y \right)$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{2\lambda\vartheta_1}{l} \left( \frac{x}{l} \mathbf{e}_x - \frac{y}{l} \mathbf{e}_y \right)$ ,  $|\dot{\mathbf{q}}| = \frac{2\lambda\vartheta_1}{l}$   
 $\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}$  ist am größten bei  $x = y = l$ .

c)  $y = 0$ :  $\dot{Q}_1 = 0$ ;  $x = l$ :  $\dot{Q}_2 = -2\lambda h\vartheta_1$ ;  $y = x$ :  $\dot{Q}_3 = 2\lambda h\vartheta_1 = -\dot{Q}_2$ .

**1.7:**  $\alpha = 6241 \text{ W/m}^2\text{K}$

**1.8:**  $\alpha = 5,0 \text{ W/m}^2\text{K}$

**1.9:**  $\alpha_W/\alpha_L = 574$

**1.10:**  $\vartheta_1 = 552^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_a = 548^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_{\text{Str}} = 5,33 \text{ W/m}^2\text{K}$

**1.11:**  $\dot{q} = 72,7 \text{ W/m}^2$ ,  $\vartheta_{W1} = 12,6^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_{W2} = -9,1^\circ\text{C}$

**1.12:**  $\dot{q} = 15,35 \text{ W/m}^2$ ,  $\vartheta_{W1} = 20,0^\circ\text{C}$

**1.13:**  $\dot{Q}/L = 618,2 \text{ W/m}$ ;  $\vartheta_3 = 224,6^\circ\text{C}$  liegt unter dem zulässigen Wert von  $250^\circ\text{C}$ .

**1.14:**  $\vartheta_F = 17,0^\circ\text{C}$ ;  $t^* = 3,16 \text{ h} = 3 \text{ h } 10 \text{ min}$ . Diese Werte gelten unter der Annahme, dass eine der kreisförmigen Deckflächen (=Stellfläche) adiabat ist.

**1.15:**  $\vartheta_1^+(z) := [\vartheta_1(z) - \vartheta_2'] / (\vartheta_1' - \vartheta_2')$ ;  $\vartheta_2^+(z) := [\vartheta_2(z) - \vartheta_2'] / (\vartheta_1' - \vartheta_2')$ ;

$$\begin{aligned}
 C = 1 : \vartheta_1^+(z) &= 1 - \frac{N}{1+N} \frac{z}{L} = 1 - \varepsilon \frac{z}{L} \\
 \vartheta_2^+(z) &= \frac{N}{1+N} \left(1 - \frac{z}{L}\right) = \varepsilon \left(1 - \frac{z}{L}\right) \\
 C \neq 1 : \vartheta_1^+(z) &= 1 - \frac{1 - C_1 \varepsilon_1}{1 - C_1} \left\{1 - \exp\left[N_1 (C_1 - 1) \frac{z}{L}\right]\right\} \\
 \vartheta_2^+(z) &= C_1 [\vartheta_1^+(z) + \varepsilon_1 - 1]
 \end{aligned}$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N_1, C_1)$  ist nach Tab. 1.4 zu berechnen.

- 1.16:** Gegenstrom:  $kA = 423$  W/K; Kreuzstrom mit einer Rohrreihe:  $kA = 461$  W/K, Kreuzgegenstrom mit zwei Rohrreihen nach Abb. 1.59:  $kA = 433$  W/K.
- 1.17:** Unter den genannten Voraussetzungen ist  $\dot{N}_A = u_{jA} 2\pi r L = -D \partial c_A / \partial r 2\pi r L = \text{const}$  und damit

$$\frac{d\dot{N}_A}{dr} = 0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( D r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right).$$

Integration zwischen den Grenzen  $c_A(r_0) = c_{AW}$  und  $c_A(r_0 + \delta) = c_{A\delta}$  ergibt das Konzentrationsprofil

$$\frac{c_A - c_{AW}}{c_{A\delta} - c_{AW}} = \frac{\ln r / r_0}{\ln [(r_0 + \delta) / r_0]}.$$

Daraus ergibt sich durch Differentiation und Einsetzen in die Gl. für  $\dot{N}_A$  der angegebene Ausdruck.

- 1.18:** a)  $\dot{n}_A = 3,952 \cdot 10^{-6}$  kmol/m<sup>2</sup>s;  $\dot{m}_A = \dot{n}_A \tilde{M}_A = 1,82 \cdot 10^{-4}$  kg/(m<sup>2</sup> s).  
 b) Während der Zeit  $dt$  verdunstet eine Ethanolmenge  $\dot{m}_A Adt = \dot{n}_A \tilde{M}_A Adt$ . Laut Aufgabenstellung lässt sich der Diffusionsstrom aus dem der stationären Lösung (1.174) berechnen, in der jetzt  $y_1 = y(t)$  ist. Somit ist

$$dt = - \frac{Q_L}{\tilde{M}_A} \frac{y_2 - y(t)}{pD/R_m T} \frac{1}{\ln(p_{B2}/p_{B1})} dy = B [y_2 - y(t)] dy.$$

Integration und Einsetzen der Zahlenwerte ergibt  $t = 17,96$  h.

- 1.19:** In dem Röhrchen herrscht äquimolare Gegendiffusion. Es folgt daher aus (1.176):  $\dot{N}_A = -cDA \partial \tilde{x}_A / \partial y$ . Da  $\dot{N}_A$  konstant ist, stellt sich ein lineares Konzentrationsgefälle über die Länge  $L$  der Röhrchens ein. Somit gilt

$$\dot{N}_A = -cDA \frac{\tilde{x}_{Aa} - \tilde{x}_{Ae}}{L}.$$

$\tilde{x}_{Aa} = 1$  ist der Molanteil des Ammoniaks in der Rohrleitung,  $\tilde{x}_{Ae} = 0$  derjenige des Ammoniaks in der Luft. Daraus erhält man den Ammoniakverlust  $\dot{N}_A = 4,03 \cdot 10^{-13}$  kmol/s,  $\dot{M}_A = \tilde{M}_A \dot{N}_A = 6,87 \cdot 10^{-12}$  kg/s. Die durch die Rohrleitung strömende Ammoniakmenge ist  $\dot{M} = 1,93 \cdot 10^{-3}$  kg/s, und es ist  $\dot{N} = 1,133 \cdot 10^{-4}$  kmol/s. Die Luftmenge, die in das Ammoniak gelangt ist  $\dot{N}_B = -\dot{N}_A = -4,03 \cdot$

$10^{-13}$  kmol/s,  $\dot{M}_B = \tilde{M}_B \dot{N}_B = 1,17 \cdot 10^{-11}$  kg/s. Der Molanteil der Luft in der Rohrleitung ist extrem klein, nämlich  $\tilde{x}_B = |\dot{N}_B|/\dot{N} = 3,56 \cdot 10^{-9}$ .

**1.20:** Es herrscht einseitiger Stoffübergang. Nach (1.195) wird

$$\dot{m}_A = \tilde{M}_A \dot{n}_A = \tilde{M}_A \frac{p}{R_m T} \beta \ln \frac{1 - \tilde{x}_{A\delta}}{1 - \tilde{x}_{A0}} = 3,59 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}.$$

Um mit (1.195a) zu rechnen, braucht man die Beladung

$$X_A = 1,530 \cdot 10^{-2}, \quad \dot{m}_A = 3,635 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \text{s}.$$

**1.21:** Aus (1.210) und (1.203) findet man die Lösung durch Probieren mit Hilfe einer Wasserdampf tafel zu  $\vartheta_1 = 2,56$  °C. Es ist  $p_s(2,56$  °C) = 7,346 mbar.

**1.22:** Wir setzen zunächst kleine Einblaseraten voraus. Als tiefste Temperatur stellt sich die Kühlgrenztemperatur  $\vartheta_1$  ein. In (1.211) ist der Faktor

$$\frac{\tilde{M}_B c \beta_m}{\alpha_m} = \frac{\tilde{M}_A c \beta_m c_{pA}}{\alpha_m} \frac{\tilde{M}_B}{\tilde{M}_A c_{pA}} = 1,097 \cdot 10^{-3} \text{ mol K/J}$$

Damit kann man (1.211), da  $X_{A\delta} = 0$  ist, schreiben,

$$(600 - \vartheta_1) \text{ °C} = 1,097 \cdot 10^{-3} \cdot 2346 \cdot 10^3 \cdot X_{A1} \text{ °C}.$$

Mit (1.203) findet man durch Probieren unter Benutzung einer Wasserdampf tafel die Kühlgrenztemperatur zu  $\vartheta_1 = 65,1$  °C. Dieser Wert genügt auch recht gut (1.206). Die zuzuführende Wassermenge folgt aus (1.209) zu  $\dot{m}_A = 2,27 \cdot 10^{-2}$  kg/m<sup>2</sup>s.

**1.23:** Die übergehende Benzolmenge ist  $\Delta \dot{N}_B = 11,88$  kmol/h. Die Beladung des Gases im Querschnitt e ist  $\tilde{Y}_e = 2,5 \cdot 10^{-3}$ . Nach (1.224) ist  $\tilde{X}_a = 0,216$ .

## Kapitel 2: Wärmeleitung und Diffusion

**2.2:** Bei  $x = 0$  hat  $\vartheta(x)$  eine horizontale Tangente. Die Tangente bei  $x = \delta$  schneidet die Waagerechte  $\vartheta = \vartheta_F$  im Punkt R mit der Abszisse  $x_R = \delta + \lambda/\alpha = (1 + Bi^{-1}) \delta = 1,667 \delta$ . Die Tangente an den Verlauf der Fluidtemperatur bei  $x = \delta$  schneidet die Linie  $\vartheta = \vartheta_F$  bei  $x_F = \delta + \lambda_F/\alpha = (1 + Nu^{-1}) \delta = 1,100 \delta$ .

**2.3:** a) Die Platte erwärmt sich, weil  $\partial^2 \vartheta + \partial x^{+2} > 0$  ist.

b)  $x_T^+ = 1/2$ ;  $(\partial \vartheta / \partial t)_{\max} = 4,40$  K/s.

c)  $x_{\min}^+ = 0,3778$ .

d)  $B(t) = 0,850 \exp[-0,03454 \text{ s}^{-1} (t - t_0)]$ . Für  $t \rightarrow \infty$  wird  $\vartheta^+ = x^+$ .

**2.4:** a)  $\dot{q}(R) = \dot{W}_R R / (m + 2)$ ;  $\dot{W}_R = \dot{W}_0 (1 + m/2)$ .

b)  $\Theta(r) = \frac{R^2 \dot{W}_R}{\lambda (m + 2)^2} [1 - (r/R)^{m+2}]$ .

c)  $\Theta_{\max} / \Theta_{\max}^0 = 2 / (m + 2)$ .

- 2.5:** a)  $\vartheta_0 = 55,39^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_L = 37,39^\circ\text{C}$ .  
 b)  $\dot{Q}_0 = 3,204\text{ W}$ ,  $\dot{Q}_L = 0,0622\text{ W}$ .  
 c) Die Ergebnisse unterscheiden sich innerhalb der angegebenen Ziffern nicht. Die einfachere Rechnung mit dem Ersatzbolzen der Länge  $L_C$  ist sehr genau.
- 2.6:**  $\eta_R = 0,603$
- 2.7:** a) 87 Rippen/m. Damit wächst der Wärmestrom um den Faktor 6,019. b) 1,40.
- 2.8:**  $\dot{Q}/L = 149\text{ W/m}$
- 2.9:** a)  $Q/A = 1027\text{ kJ/m}^2$ . b)  $\vartheta = 50,6^\circ\text{C}$
- 2.10:** Oberflächentemperatur:  $73,1^\circ\text{C}$ ; in 10 cm Tiefe:  $27,2^\circ\text{C}$ .
- 2.11:** Oberflächentemperatur:  $45,8^\circ\text{C}$ ; in 10 cm Tiefe:  $24,3^\circ\text{C}$ .
- 2.12:** a) Die Amplitude in 1 m Tiefe ist nur  $3,7 \cdot 10^{-4}\text{ K}$ . b) Höchste Temperatur  $18,6^\circ\text{C}$  am 2. Oktober, niedrigste Temperatur  $1,4^\circ\text{C}$  am 2. April.
- 2.13:** a)  $\alpha = 19,3\text{ W/m}^2\text{K}$ . b) Die Temperaturen der isolierten Oberfläche sind  $\vartheta(t_1) = 146,4^\circ\text{C}$  und  $\vartheta(t_2) = 112,3^\circ\text{C}$ .
- 2.14:** a)  $\vartheta = 37,5^\circ\text{C}$ . b)  $\vartheta_m = 39,1^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_{\text{Oberfl.}} = 37,9^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_{\text{Mittelp.}} = 40,9^\circ\text{C}$
- 2.15:**  $w = 0,206\text{ m/s}$
- 2.16:**  $t(s = 15\text{mm}) = 3,26\text{ h}$ ;  $t(s = 20\text{mm}) = 3,57\text{ h}$ .
- 2.18:**

$i = x/\Delta x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(\vartheta^+)_i^6$	1,000	0,412	0,140	0,037	0,007	0,001	0,000			
$\vartheta^+(x, t^*)$	1,000	0,419	0,151	0,046	0,012	0,002	0,000			
$(\vartheta^+)_i^{12}$	1,000	0,681	0,414	0,216	0,098	0,038	0,012	0,003	0,001	0,000
$\vartheta^+(x, 2t^*)$	1,000	0,679	0,409	0,217	0,102	0,042	0,016	0,005	0,001	0,000

- 2.19:** a)  $M = 0,375$ ;  $Bi^* = 0,2087$ . Das Stabilitätskriterium

$$M \leq \frac{1}{2(1 + Bi^*)} = 0,4137 \quad (\text{C.1})$$

ist erfüllt. Temperaturverteilung zur Zeit  $t^* = 15\text{ min}$ :  $\vartheta_1^{15} = 80,0^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_2^{15} = 63,9^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_3^{15} = 50,7^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_4^{15} = 40,8^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_5^{15} = 34,9^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_6^{15} = 30,8^\circ\text{C}$ .

b) Stationäre Temperaturverteilung ( $t \rightarrow \infty$ ):  $\vartheta_1^\infty = 80,0^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_2^\infty = 71,6^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_3^\infty = 64,1^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_4^\infty = 57,4^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_5^\infty = 51,3^\circ\text{C}$ ;  $\vartheta_6^\infty = 45,7^\circ\text{C}$ .

- 2.20:** a)  $-(2 + m^2 \Delta x^2) \vartheta_1^+ + \vartheta_2^+ + \vartheta_6^+ = 0$ ,  
 $\vartheta_1^+ - (3 + m^2 \Delta x^2) \vartheta_2^+ + \vartheta_3^+ + \vartheta_7^+ = 0$ ,  
 $\vartheta_2^+ - (3 + m^2 \Delta x^2) \vartheta_3^+ + \vartheta_4^+ + \vartheta_8^+ = 0$ ,  
 $\vartheta_3^+ - (3 + m^2 \Delta x^2) \vartheta_4^+ + \vartheta_5^+ + \vartheta_9^+ = 0$ ,  
 $\vartheta_4^+ - (1 + 0,5m^2 \Delta x^2) \vartheta_5^+ = 0$ ,  
 $\vartheta_1^+ - (3 + m^2 \Delta x^2) \vartheta_6^+ + \vartheta_7^+ + \vartheta_{10}^+ = 0$ ,

$$\begin{aligned} \vartheta_2^+ + \vartheta_6^+ - (4 + m^2 \Delta x^2) \vartheta_7^+ + \vartheta_8^+ + \vartheta_{11}^+ &= 0, \\ \vartheta_3^+ + \vartheta_7^+ - (4 + m^2 \Delta x^2) \vartheta_8^+ + \vartheta_9^+ + \vartheta_{12}^+ &= 0, \\ \vartheta_4^+ + \vartheta_8^+ - (2 + 0,5m^2 \Delta x^2) \vartheta_9^+ &= 0, \\ 1,90384\vartheta_6^+ - (43,5992 + 0,56837m^2 \Delta x^2) \vartheta_{10}^+ + (4/3)\vartheta_{11}^+ &= -40,35875, \\ (4/3)\vartheta_7^+ + \vartheta_{10}^+ - (6 + 0,92069m^2 \Delta x^2) \vartheta_{11}^+ + \vartheta_{12}^+ &= -8/3 \\ \vartheta_8^+ + \vartheta_{11}^+ - (2 + 0,5m^2 \Delta x^2) \vartheta_{12}^+ &= 0. \end{aligned}$$

b)  $\vartheta_1^+ = 0,54791; \vartheta_2^+ = 0,50806; \vartheta_3^+ = 0,44968; \vartheta_4^+ = 0,39775;$   
 $\vartheta_5^+ = 0,36828; \vartheta_6^+ = 0,67543; \vartheta_7^+ = 0,60786; \vartheta_8^+ = 0,51519;$   
 $\vartheta_9^+ = 0,43891; \vartheta_{10}^+ = 0,97859; \vartheta_{11}^+ = 0,83003; \vartheta_{12}^+ = 0,64674.$

$\eta_R = 0,5756$ . Näherung nach (2.81):  $\eta_R = 0,5758$ , nach (2.82):  $\eta_R = 0,5721$ .

**2.21:** Wir wählen die finiten Elemente wie in Abb.2.59 mit dem Unterschied, dass die dimensionslosen Außentemperaturen  $\vartheta^+ = (\vartheta - \vartheta_U) / (\vartheta_i - \vartheta_U)$  nicht mehr null sind, sondern gemäß Abb.2.70 die Werte  $\vartheta_5, \dots, \vartheta_{10}$  annehmen. Die Tab.2.14 ist daher zu ergänzen um die Tab.C.1. Die Ableitungen nach den Temperaturen sind die gleichen wie in Tab.2.15. Auch die Integrale  $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(7)}$  bleiben unverändert. Da an der Außenwand nur Wärme an die Luft übertragen wird, lauten die Integrale  $I^{(8)}, I^{(9)}, \dots, I^{(12)}$

$$I^{(k)} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega^{+(k)}} \left[ \left( \frac{\partial \vartheta^+}{\partial x^+} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta^+}{\partial y^+} \right)^2 \right] dx^+ dy^+ + Bi \vartheta^{+2}(x^+ = 1) \right\}.$$

Im nächsten Schritt bildet man die Ableitungen  $\partial I / \partial \vartheta_i^+$  in gleicher Weise wie es bereits im Beispiel 2.10 gezeigt wurde. Es sei hier nur das Ergebnis der einfachen, aber aufwändigen Rechnung mitgeteilt. Man erhält 11 lineare Gleichungen für die unbekanntenen Temperaturen  $\vartheta_0^+, \vartheta_1^+, \dots, \vartheta_{10}^+$ :

**Tab.C.1** Den Temperaturen  $\vartheta_j^+, j = 5, 6, \dots, 10$  zugeordnete Dreiecke  $k = 8, 9, \dots, 16$

$\vartheta_j^+$	$\vartheta_j^+$ ist Eckpunkt der Dreiecke $k$
$j = 5$	$k = 8$
6	8, 13, 9
7	9, 14, 10
8	10, 15, 11
9	11, 16, 12
10	12

$$\begin{aligned}
10 \vartheta_0^+ - 8 \vartheta_1^+ - 5 \vartheta_5^+ &= 1 \\
8 \vartheta_0^+ - 18 \vartheta_1^+ + 4 \vartheta_2^+ + 3 \vartheta_6^+ &= -3 \\
\vartheta_1^+ - 4 \vartheta_2^+ + \vartheta_3^+ + \vartheta_7^+ &= -1 \\
\vartheta_2^+ - 4 \vartheta_3^+ + \vartheta_4^+ + \vartheta_8^+ &= -1 \\
\vartheta_3^+ - 2 \vartheta_4^+ + \vartheta_9^+ &= 0 \\
3 \vartheta_0^+ - (15 + 2\Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_5^+ + (12 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_6^+ &= 0 \\
9 \vartheta_1^+ + (12 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_5^+ - 3(9 + 2\Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_6^+ + 2(3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_7^+ &= 0 \\
6 \vartheta_2^+ + (3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_6^+ - 4(3 + \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_7^+ + (3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_8^+ &= 0 \\
6 \vartheta_3^+ + (3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_7^+ - 4(3 + \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_8^+ + (3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_9^+ &= 0 \\
6 \vartheta_4^+ + (3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_8^+ - 4(3 + \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_9^+ + (3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_{10}^+ &= 0 \\
(3 - \Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_9^+ - (3 + 2\Delta x^+ \text{Bi}) \vartheta_{10}^+ &= 0.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte  $Bi = \alpha \delta / \lambda = (10 \text{ W/m}^2\text{K} \cdot 0,25 \text{ m}) / 0,8 \text{ W/Km} = 3,125$  und  $\Delta x^+ = x / \delta = 0,5$  bzw.  $\Delta x^+ / 2 = 0,25$  ergibt die folgenden Temperaturen:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0^+ &= 0,6115 & \vartheta_1^+ &= 0,6096 & \vartheta_2^+ &= 0,5925 & \vartheta_3^+ &= 0,5309 \\
\vartheta_4^+ &= 0,3286 & \vartheta_5^+ &= 0,2378 & \vartheta_6^+ &= 0,2372 & \vartheta_7^+ &= 0,2294 \\
\vartheta_8^+ &= 0,2026 & \vartheta_9^+ &= 0,1263 & \vartheta_{10}^+ &= 0,0297.
\end{aligned}$$

Der von der Außenwand an die Luft übertragene Wärmestrom ist

$$\dot{Q} = 8 \alpha (\vartheta_i - \vartheta_U) b \frac{\delta}{2} \left( \frac{\vartheta_5^+}{4} + \vartheta_6^+ + \dots + \vartheta_9^+ + \frac{\vartheta_{10}^+}{4} \right).$$

Daraus folgt mit  $\alpha = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$  und  $\delta = 0,25 \text{ m}$ :

$$\dot{Q} = 8,62 b (\vartheta_i - \vartheta_U).$$

Ist statt der Umgebungstemperatur  $\vartheta_U$  der Außenluft die Temperatur  $\vartheta_a$  der Außenwand nach Beispiel 2.8 vorgegeben, so erhalten wir  $\dot{Q} = 12,85 b \lambda (\vartheta_i - \vartheta_a)$  und daraus mit  $\lambda = 0,8 \text{ W/Km}$ :

$$\dot{Q} = 10,28 b (\vartheta_i - \vartheta_a).$$

Durch den zusätzlichen Wärmewiderstand an die Luft auf der Außenseite verringert sich der übertragene Wärmestrom um 16,1%.

**2.22:** Gesucht wird das Minimum von

$$I = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a} \frac{\partial \Theta^2}{\partial t} + m^2 \Theta^2 \right] dx + \frac{1}{\lambda} (\dot{q} \Theta) \Big|_{x=0}^L.$$

Hierin ist  $\Theta = \vartheta - \vartheta_U$  und nach (2.52):  $m^2 = \alpha U/\lambda A_q = 4\alpha/\lambda d$ .

Der Beweis ist nach dem gleichen Schema zu führen wie der zu (2.340) in Abschn. 2.5.3: Man denkt sich die unbekannte Funktion  $\Theta(t, x)$  in eine Familie von Funktionen eingebettet  $\hat{\Theta}(t, x, \varepsilon) = \Theta(t, x) + \varepsilon \eta(x)$  und bildet dann, wie schon in Abschn. 2.5.3 gezeigt, die Ableitung  $(\partial I)/(\partial \varepsilon)$ . An der Stelle  $\varepsilon = 0$  ist  $(\partial I)/(\partial \varepsilon) = 0$  für beliebige Werte  $\eta(x)$  nur zu erfüllen, wenn gilt

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - m^2 \Theta$$

mit den Randbedingungen:

$$\Theta(t=0) = 0; \quad \lambda \frac{\partial \Theta(x=0)}{\partial x} + \dot{q}(x=0) = 0; \quad \lambda \frac{\partial \Theta(x=L)}{\partial x} + \dot{q}(x=L) = 0.$$

Das ist aber gerade die Differentialgleichung, deren Lösung unter den angegebenen Randbedingungen das obige Integral zu einem Minimum macht. Wir setzen im Folgenden vernachlässigbaren Wärmestrom am oberen Ende der Stäbe voraus,  $\dot{q}(x=L) = 0$ .

Mit  $\dot{q}^* = \dot{q}L/\lambda$  (SI-Einheit K) und den dimensionslosen Größen  $x^+ = x/L$ ,  $t^+ = at/L^2$  geht das Integral  $I$  über in

$$I^* = I L = \frac{1}{2} \int_{x^+=0}^1 \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x^+} \right)^2 + \frac{\partial \Theta^2}{\partial t^+} + m^2 L^2 \Theta \right] dx^+ - (\dot{q}^* \Theta)_{x^+=0}.$$

Einen einzelnen Stab teilen wir über seine Länge in fünf äquidistante Abschnitte  $\Delta x^+ = 0,2$  auf wie in Abb. C.1 gezeigt. Zum gesamten Integral  $I^*$  trägt jeder Abschnitt den Anteil  $I^{*(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$  bei. Es ist

$$I^{*(k)} = \frac{1}{2} \int_{x^+=0}^{\Delta x^+} \left[ \left( \frac{\Theta_k - \Theta_{k-1}}{\Delta x^+} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t^+} \left( \Theta_{k-1} + \frac{\Theta_k - \Theta_{k-1}}{\Delta x^+} x^+ \right)^2 + m^2 L^2 \left( \Theta_{k-1} + \frac{\Theta_k - \Theta_{k-1}}{\Delta x^+} x^+ \right)^2 \right] dx^+ - (\dot{q}^* \Theta)_{x^+=0}.$$

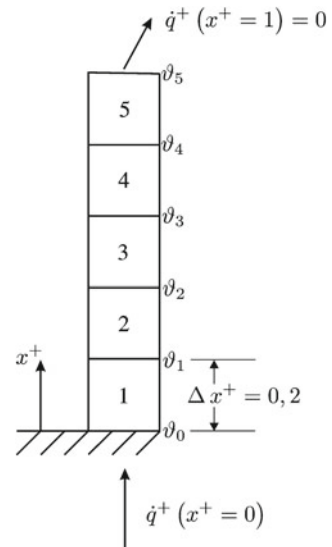
Nach Integration erhält man

$$I^{*(k)} = \frac{\Theta_k - \Theta_{k-1}}{\Delta x^+} + \frac{1}{6} \Delta x^+ \frac{d}{dt^+} (\Theta_{k-1}^2 + \Theta_{k-1} \Theta_k + \Theta_k^2) + m^2 L^2 \frac{1}{6} \Delta x^+ (\Theta_{k-1}^2 + \Theta_{k-1} \Theta_k + \Theta_k^2) - (\dot{q}^* \Theta)_{x^+=0}.$$

Die Temperatur  $\Theta_0$  kommt nur im ersten Abschnitt vor. Daher ist  $\partial I^*/\partial \Theta_0 = \partial I^{*(1)}/\partial \Theta_0 = 0$ . Jede der Temperaturen  $\Theta_1, \dots, \Theta_4$  kommt einmal in dem über ihr



**Abb. C.1** FEM-Gitter des Stabes



und einmal in dem unter ihr liegenden Abschnitt vor. Für sie gilt daher:

$$\frac{\partial I^*}{\partial \Theta_k} = \frac{\partial I^{*(k)}}{\partial \Theta_k} + \frac{\partial I^{*(k+1)}}{\partial \Theta_k} = 0.$$

Die Temperatur  $\Theta_5$  kommt nur im fünften Abschnitt vor, so dass für sie gilt:

$$\frac{\partial I^*}{\partial \Theta_5} = \frac{\partial I^{*(5)}}{\partial \Theta_5} = 0.$$

Nach Bildung von  $\partial I^* / \partial \Theta_k = 0$  erhält man folgendes System von sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen, in dem die Temperaturen  $\Theta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$  noch Funktionen der Zeit sind:

$$\Theta_0 - \Theta_1 + \frac{\Delta x^{+2}}{6} (2\dot{\Theta}_0 + \dot{\Theta}_1) + m^2 L^2 \frac{\Delta x^{+2}}{6} (2\Theta_0 + \Theta_1) - \dot{q}^* \Delta x^+ = 0.$$

Für  $i = 1, 2, \dots, 4$  gilt:

$$\begin{aligned} \Theta_{i-1} + 2\Theta_i - \Theta_{i+1} + \frac{\Delta x^{+2}}{6} (\dot{\Theta}_{i-1} + 4\dot{\Theta}_i + \dot{\Theta}_{i+1}) \\ + m^2 L^2 \frac{\Delta x^{+2}}{6} (\Theta_{i-1} + 4\Theta_i + \Theta_{i+1}) = 0, \end{aligned}$$

und es ist

$$\Theta_5 - \Theta_4 + \frac{\Delta x^{+2}}{6} (\dot{\Theta}_4 + 2\dot{\Theta}_5) + m^2 L^2 \frac{\Delta x^{+2}}{6} (\Theta_4 + 2\Theta_5) = 0.$$

Der Überpunkt bezeichnet eine Ableitung nach der Zeit  $t^+$ . Eine analytische Lösung des Gleichungssystems unter Beachtung der Anfangsbedingung  $\Theta_i(t^+ = 0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$  mit Hilfe der Laplace-Transformation führt auf ein System algebraischer Gleichungen, die man leicht lösen kann. Die Rücktransformation ergibt jedoch für jede der Temperaturen eine schlecht konvergierende unendliche Reihe. Der numerische Aufwand, den ihre Auswertung erfordert, ist recht groß. Es ist daher zweckmäßiger, das Gleichungssystem ohne den Umweg über die Laplace-Transformation von vornherein numerisch zu lösen, beispielsweise mit Hilfe von Mathematica oder MathLab. Einige auf diese Weise ermittelte Temperaturen  $\Theta = \vartheta - \vartheta_U$ ,  $\vartheta_U = 20^\circ\text{C}$ , gibt die Tab. C.2 wieder.

Die analytische Lösung der für stationäre Wärmeleitung gültigen Gl. (2.51) mit den Randbedingungen

$$x = 0 : -\lambda \partial\Theta/\partial x = \dot{q} \quad \text{und} \quad x = L : \partial\Theta/\partial x = 0$$

lautet:

$$\Theta = \frac{\dot{q}}{\lambda m} \frac{\cosh[m L (1 - x^+)]}{\sinh(m L)}.$$

Mit den Werten des Beispiels  $\dot{q}/\lambda m = 100,66$  und  $m L = 0,6325$  erhält man die Temperaturen in der letzten Zeile der Tabelle C.2. Man erkennt, dass stationäre Wärmeleitung nach etwa einer halben Stunde erreicht ist.

**Tab. C.2** Lösungen zur Aufgabe 2.22

$\Theta(t) / ^\circ\text{C}$	$x^+ = 0$	$x^+ = 0,2$	$x^+ = 0,4$	$x^+ = 0,6$	$x^+ = 0,8$	$x^+ = 1,0$
$t = 10 \text{ s}$	20,17	59,93	54,08	51,33	50,31	51,0
100 s	65,11	53,78	45,16	39,09	35,49	34,30
1000 s	173,70	162,38	153,75	147,69	144,09	142,89
1800 s						
$\hat{=} 1/2 \text{ h}$	179,19	167,87	159,24	153,18	149,58	148,38
3600 s						
$\hat{=} 1 \text{ h}$	179,62	168,29	159,67	153,60	150,00	148,81
Analyt.						
Lösung, stationär	179,82	168,50	159,87	153,81	150,20	149,02

**2.23:** Es ist

$$\frac{\xi_A(x=0, t) - \xi_{AU}}{\xi_{A\alpha} - \xi_{AU}} = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} t_D^+\right) - \frac{4}{3\pi} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4} t_D^+\right) \\ + \frac{4}{5\pi} \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4} t_D^+\right) - \dots + \dots$$

Unter Verwendung des ersten Reihenglieds erhält man  $t_D^+ = 1,039$  und  $t = 14,1$  Tage. Die übrigen Reihenglieder sind vernachlässigbar klein, wie man leicht nachprüfen kann, so dass es tatsächlich genügt, nur das erste Reihenglied zu berücksichtigen.

**2.24:** Die Diffusion erfolgt jetzt in Richtung der  $x$ - und der  $y$ -Koordinate. Bei der Behandlung des entsprechenden Wärmeleitproblems, Abschn. 2.3.5, war gezeigt worden, dass für einen Quader mit den Kantenlängen  $2X, 2Y$  die Temperaturverteilung durch (2.191) gegeben ist

$$\vartheta^+ = \frac{\vartheta - \vartheta_U}{\vartheta_0 - \vartheta_U} = \vartheta_{Pl}^+ \left( \frac{x}{X}, \frac{at}{X^2}, \frac{\alpha X}{\lambda} \right) \cdot \vartheta_{Pl}^+ \left( \frac{y}{Y}, \frac{at}{Y^2}, \frac{\alpha' Y}{\lambda} \right).$$

Für das Diffusionsproblem gilt in Stabmitte  $x = y = 0$  und für  $\beta X/D = \beta' Y/D \rightarrow \infty$  entsprechend

$$\xi_A^+ = \frac{\xi_A(x=y=0) - \xi_{AU}}{\xi_{A\alpha} - \xi_{AU}} = c_{Pl}^+ \left( \frac{Dt}{X^2} \right) \cdot c_{Pl}^+ \left( \frac{Dt}{Y^2} \right).$$

Unter der Annahme, dass das erste Reihenglied aus der Lösung der vorigen Aufgabe genügt, folgt

$$\xi_A^+ = \left[ \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} t_D^+\right) \right]^2.$$

Es sind  $t_D^+ = 0,569$  und  $t = 7,7$  Tage. Man prüft leicht nach, dass die folgenden Reihenglieder gegenüber dem ersten tatsächlich vernachlässigbar sind.

- 2.25:** a) Es sind  $\dot{M}_{La} = 0,7$  kg/s,  $\dot{M}_{Ga} = 6,0$  kg/s und  $\dot{M}_W = 0,532$  kg/s.  
b) Die erforderliche Zeit erhält man aus (2.426). Hierin ist  $c_{A\alpha} = 0$  und somit

$$c_{Am}/c_{AU} = \xi_{Aa}^L/\xi_{A0} = 0,6.$$

Damit folgt aus (2.427):

$$0,65797 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \exp(-i^2 \pi^2 t_D^+).$$

Durch Probieren findet man als Lösung  $t_D^+ = 0,0485$ . Es genügen die drei ersten Glieder der Reihe. Es ist  $t = 72,7$  s.

- c)  $L = tw = 7,27$  m.

**2.26:** In guter Näherung gilt  $Bi_D \rightarrow \infty$ . Außerdem ist die Oberfläche jeder Kugel sofort vollständig mit Wasser getränkt,  $\xi_{A0} = 1$ . Daher ist

$$c_{A0} = \rho \xi_{A0} / \tilde{M}_A = 55,5 \text{ kmol/m}^3.$$

Weiter ist

$$t_D^+ = 0,072.$$

Aus (2.427)

$$c_{Am}^+(t_D^+) = \frac{c_{Am} - c_{A0}}{c_{A\alpha} - c_{A0}} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \exp(-i^2 \pi^2 t_D^+)$$

folgt mit  $c_{A\alpha} = 0$ :  $c_{Am} / c_{A0} = 0,6927$  und  $c_{Am} = 38,42 \text{ kmol/m}^3$ . Jede Kugel nimmt 0,241 g Wasser auf.

### Kapitel 3: Konvektiver Wärme- und Stoffübergang. Einphasige Strömungen

**3.1:** Aus  $-\dot{q}_j = \lambda_{ji} \partial \vartheta / \partial x_i$  folgt unter Beachtung von  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$

$$-\dot{q}_1 = \lambda_{11} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \lambda_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}$$

$$-\dot{q}_2 = \lambda_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \lambda_{22} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}$$

$$-\dot{q}_3 = \lambda_{33} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3}.$$

Bei stationärer Wärmeleitung ist allgemein  $\partial \dot{q}_j / \partial x_j = 0$  da die Platte in  $x_2$ -Richtung dünn ist, wird  $\partial \vartheta / \partial x_2 = 0$  und die Differentialgleichung der stationären Wärmeleitung lautet

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{q}_3}{\partial x_3} = \lambda_{11} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \lambda_{33} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_3^2} = 0.$$

**3.2:** Für Modell (Index M) und Original (Index O) muss gelten

$$Nu = f(Re, Pr).$$

- Es muss sein  $Pr_M = Pr_O$ . Mit  $Pr_O = 4,5$  beträgt die zugehörige Temperatur  $T = 311 \text{ K}$ .
- Die Reynolds-Zahlen von Wasser und Chloroform müssen bei den Anströmgeschwindigkeiten 0,2 m/s und 2 m/s übereinstimmen. Daraus folgt  $(w_M)_1 = 0,0355 \text{ m/s}$  und  $(w_M)_2 = 0,355 \text{ m/s}$ .
- Wegen  $Nu_M = Nu_O$  oder  $(\alpha_M d_M) / \lambda_M = (\alpha_O d_O) / \lambda_O = 484 \text{ W/m}^2 \text{K}$ .

- 3.3:** Für Modell (Index M) und Original (Index O) gilt nach (3.367)  $Nu_m \sim Gr^{1/4}$  mit  $Nu_m = \alpha_m L / \lambda$  und  $Gr = \beta_\infty \Delta \vartheta g L^3 / \nu^2$ . Daraus folgt

$$\frac{\alpha_{mO}}{\alpha_{mM}} = \left( \frac{L_M}{L_O} \right)^{1/4} \left( \frac{\Delta \vartheta_O}{\Delta \vartheta_M} \right)^{1/4}$$

und

$$\frac{\dot{Q}_O}{\dot{Q}_M} = \frac{\alpha_{mO} A_O \Delta \vartheta_O}{\alpha_{mM} A_M \Delta \vartheta_M} \left( \frac{L_O}{L_M} \right)^{7/4} \left( \frac{\Delta \vartheta_O}{\Delta \vartheta_M} \right)^{5/4}$$

wegen  $A_O/A_M = L_O^2/L_M^2$ . Wir erhalten  $\dot{Q}_O = 469,5 \text{ W}$ .

- 3.4:** Man stellt zuerst eine Dimensionsmatrix auf. Es bezeichne L die Dimension einer Länge:

$$L = \dim L;$$

entsprechend sei  $t = \dim t$ ,  $T = \dim \vartheta$ ,  $M = \dim M$ . Die Dimensionsmatrix lautet

	$L$	$w_0$	$q$	$\lambda$	$\nu$	$c$	$\alpha_m$
L	1	1	-3	1	2	2	0
t	0	-1	0	-3	-1	-2	-3
M	0	0	1	1	0	0	1
T	0	0	0	-1	0	-1	-1

Man bestimmt nun den Rang  $r$  der Matrix mit Hilfe von Äquivalenztransformationen; das sind Linearkombinationen von Zeilen (oder Spalten). Wir bilden dazu Linearkombinationen von Zeilen, bis die Diagonale einer Untermatrix nur Einsen, die Nebendiagonale nur Nullen enthält. Wir bezeichnen die erste Zeile mit  $Z_1$ , die zweite mit  $Z_2$  u.s.w. und bilden zunächst eine neue Matrix, deren Zeilen wir mit einem Strich kennzeichnen. Es sei  $Z'_4 = -Z_4$ ,  $Z'_3 = Z_3 + Z_4$ ,  $Z'_2 = -Z_2 + 3Z_4$ . Die neue Matrix lautet

$L$	$w_0$	$q$	$\lambda$	$\nu$	$c$	$\alpha_m$
1	1	-3	1	2	2	0
0	1	0	0	1	-1	0
0	0	1	0	0	-1	0
0	0	0	1	0	1	1

Sie enthält bereits in der vorderen Hauptdiagonalen nur Einsen. Durch eine weitere Transformation  $Z''_1 = Z'_1 - Z'_2 + 3Z'_3 - Z'_4$  ergibt sich Die linke Untermatrix enthält nun, wie gefordert, in der Hauptdiagonalen nur Einsen, in den Nebendiagonalen nur Nullen. Der Rang der Matrix ist  $r = 4$ , denn es sind 4 Zeilen linear unabhängig voneinander: Durch Äquivalenztransformationen kann man keine Zeile mehr in eine andere überführen. Nach Buckingham [1.20] ist die

$L$	$w_0$	$q$	$\lambda$	$\nu$	$c$	$\alpha_m$
1	0	0	0	1	-1	-1
0	1	0	0	1	-1	0
0	0	1	0	0	-1	0
0	0	0	1	0	1	1

Zahl  $m$  der  $\pi$ -Größen  $m = n - r$ , wenn  $n$  die Zahl der ursprünglichen Variablen ist, in unserem Fall ist  $n = 7$ . Es gibt also

$$m = 7 - 4 = 3$$

$\pi$ -Größen. Diese ergeben sich aus der obigen Matrix zu

$$\pi_1 = \nu L^{-1} w_m^{-1} q^{-0} \lambda^{-0} = \frac{\nu}{w_m L} = 1/Re$$

$$\pi_2 = c L^1 w_m^1 q^1 \lambda^{-1} = \frac{c q}{\lambda} w_m L = \frac{w_m L}{a} = RePr$$

$$\pi_3 = \alpha_m L^1 w_m^0 q^0 \lambda^{-1} = Nu$$

Es ist  $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$  oder  $f(Nu, Re, Pr) = 0$ .

**3.5:** a) Die Dimensionsmatrix lautet

	$d$	$w$	$q_L$	$\Lambda_W$	$g$
L	1	1	-3	-3	1
t	0	-1	0	0	-2
M	0	0	1	1	0

Durch Äquivalenztransformationen erhält man neue Zeilen  $Z'_i$  aus den vorhergehenden  $Z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Wir bilden folgende Äquivalenztransformationen der Zeilen  $Z'_1 = Z_1 + Z_2 + 3Z_3$ ,  $Z'_2 = -Z_2$ ,  $Z'_3 = Z_3$  und erhalten

$d$	$w$	$q_L$	$q_W$	$g$
1	0	0	0	-1
0	1	0	0	2
0	0	1	1	0

Der Rang der Matrix ist  $r = 3$ . Es gilt somit  $m = n - r = 5 - 3 = 2$ . Die dimensionslosen Größen sind

$$\pi_1 = \varrho_W d^0 w^0 \varrho_L^{-1} = \frac{\varrho_W}{\varrho_L}$$

$$\pi_2 = g d^1 w^{-2} \varrho_L^0 = \frac{g d}{w^{-2}}$$

b) Es ist  $\pi_2 = f(\pi_1)$  oder  $g d/w^2 = f(\varrho_W/\varrho_L)$ .

- 3.6:** Einsetzen des Geschwindigkeitsprofils in die aus (3.165) folgende Integralbedingung für den Impuls

$$\frac{d}{dx} \left[ w_\delta^2 \delta \int_0^1 \frac{w_x}{w_\delta} \left( 1 - \frac{w_x}{w_\delta} \right) d \left( \frac{y}{\delta} \right) \right] = \frac{\nu w_\delta}{\delta} \left( \frac{\partial w_x / \partial w_\delta}{\partial y / \delta} \right)_{y=0}$$

ergibt, wenn man abkürzend  $z = \pi/2(y/\delta)$  setzt:

$$\frac{2}{\pi} w_\delta^2 \frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^{\pi/2} \sin z (1 - \sin z) dz \right] = \frac{\nu w_\delta}{\delta} \frac{\pi}{2}.$$

Das Integral hat den Wert  $1 - \pi/4$ . Damit ist nach Integration

$$\delta = \pi \left( \frac{2}{4 - \pi} \right)^{1/2} \left( \frac{\nu x}{w_\delta} \right)^{1/2} = 4,795 x Re_x^{-1/2}.$$

Dies Ergebnis unterscheidet sich von (3.170) dadurch, dass anstelle des Faktors 4,64 in (3.170) nun der Faktor 4,795 tritt.

- 3.7:** Um festzustellen, ob die Strömung turbulent wird, berechnet man die Reynolds-Zahl am Plattenende  $Re = w_\infty L/\nu$ . Da man die Viskosität nur beim Druck 0,1 MPa findet, macht man Gebrauch von  $\eta = \varrho \nu = \text{const}$  für  $\vartheta = \text{const}$ . Daraus folgt  $p_1/(RT_1)\nu_1 = p_2/(RT_2)\nu_2$  oder  $\nu_2 = \nu_1 p_1/p_2$  bei  $\vartheta = \text{const}$ . Es ist  $\nu_1(p_1, \vartheta_m) = 30,84 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  mit  $p_1 = 0,1 \text{MPa}$ , und der Mitteltemperatur  $\vartheta_m = (\vartheta_\infty + \vartheta_0)/2 = (300 + 25)/2^\circ\text{C} = 162,5^\circ\text{C}$ . Damit wird  $\nu_2 = 30,84 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$  und die zugehörige Reynolds-Zahl  $Re = 3,243 \cdot 10^4$ . Die Strömung ist bis zum Plattenende laminar. Die mittlere Nußelt-Zahl ist nach 3.74 Nr. 1,  $Nu_m = 0,664 Re^{1/2} Pr^{1/3} = 105,5$ . Daraus ergibt sich  $\alpha_m = 3,84 \text{W/m}^2\text{K}$  und  $\dot{q} = 1056 \text{W/m}^2$ .
- 3.8:** Die Reynolds-Zahl am Ende des Sees ist  $Re = 2,606 \cdot 10^6$ . Die Strömung ist daher anfänglich laminar und geht nach einer Lauflänge von  $x_{cr} = 3,84 \text{m}$  in turbulente Strömung über. Wir berechnen die Sherwood-Zahl aus (3.208), indem wir dort die Nußelt-Zahl durch die Sherwood-Zahl ersetzen. Es ist  $Sh_{m,\text{lam}} = 904,1$  und  $Sh_{m,\text{turb}} = 3592$ . Damit ist

$$Sh_m = \sqrt{sh_{m,\text{lam}}^2 + sh_{m,\text{turb}}^2} = 3704, \quad \beta_m = 4,741 \cdot 10^{-4} \text{m/s}$$

$$\dot{m}_A = \beta_m \varrho (\xi_{A0} - \xi_{A\infty}) = \beta_m \frac{1}{RT} (p_{A0} - p_{A\infty}) = \beta_m \frac{1}{RT} (p_{A0} - \varphi p_{A0}).$$

Es ist  $p_{A0} = p_{Ws}$  und daher

$$\dot{m}_A = \beta_m \frac{p_{Ws}}{RT} (1 - \varphi) = \beta_m \varrho'' (1 - \varphi),$$

$$\dot{m}_A = 4,099 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

$$\dot{M}_A = 147,5 \text{ kg/h.}$$

**3.9:** Es ist  $\dot{M} = \varrho \dot{V} = 0,25 \text{ kg/s}$ . Weiter gilt die Energiebilanz

$$\dot{Q} = \dot{M} c_p (\vartheta_a - \vartheta_e) = \alpha_m d \pi L \Delta \vartheta_m$$

mit

$$\Delta \vartheta_m = \frac{(\vartheta_0 - \vartheta_e) - (\vartheta_0 - \vartheta_a)}{\ln [(\vartheta_0 - \vartheta_e) / (\vartheta_0 - \vartheta_a)]} = 57,71 \text{ }^\circ\text{C}$$

Damit ergibt sich

$$\alpha_m = \frac{\dot{M} c_p (\vartheta_a - \vartheta_e)}{d \pi L \Delta \vartheta_m} = 769,3 \text{ W/m}^2 \text{ K.}$$

**3.10:** Die vom Reflektor aufgefangene Sonnenenergie wird an das Absorberrohr übertragen

$$\dot{q}_{sL}/2 = \dot{q}_a d_a \pi L.$$

Die vom Absorberrohr aufgenommene Wärmestromdichte ist daher  $\dot{q} = 1,567 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$ . Sie dient zur Erwärmung des Wassers:

$$\dot{q}_a d_a \pi L/2 = \dot{M} c_p (\vartheta_a - \vartheta_e)$$

mit  $\dot{M} = \varrho w_m d_i^2 \pi/4 = 0,141 \text{ kg/s}$ . Es ist

$$L = \frac{2 \dot{M} c_p (\vartheta_a - \vartheta_e)}{\dot{q}_a d_a \pi} = 13,3 \text{ m.}$$

Die Wandtemperatur im Austrittsquerschnitt folgt aus  $\dot{q} = \alpha (\vartheta_0 - \vartheta_F) = \alpha (\vartheta_0 - \vartheta_a)$  zu  $\vartheta_0 = \dot{q}/\alpha + \vartheta_a = 139,4 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**3.11:** Die Wärmeverluste ergeben sich aus der Energiebilanz zu  $\dot{Q} = \dot{M} c_p (\vartheta_e - \vartheta_a) = 11,94 \text{ kW}$ . Die am Rohrende übertragene Wärmestromdichte ist

$$\dot{q} = k (\vartheta_a - \vartheta_0) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_a}$$

Hierin ist  $\alpha$  der Wärmeübergangskoeffizient vom überhitzten Dampf an die innere Rohrwand. Wir haben hierbei  $d_i \approx d_a$  gesetzt. Zur Berechnung von  $\alpha$  ermitteln wir zuerst die Reynolds-Zahl



$$Re = \frac{w_m d}{\nu} = \frac{4\dot{M}}{\pi d \eta} = 7,47 \cdot 10^5.$$

Die Strömung ist turbulent. Außerdem ist  $L/d > 100$ . Aus (3.259) erhält man  $Nu_m = 1143$ ,  $\alpha_m = 1261 \text{ W/m}^2\text{K}$  und  $\dot{q} = 1779 \text{ W/m}^2$ . Weiter gilt  $\dot{q} = \alpha_m(\vartheta_a - \vartheta_0)$  und daher  $\vartheta_0 = \vartheta_a - \dot{q}/\alpha_m = 118,6^\circ\text{C}$ .

- 3.12:** Die spez. Oberfläche der Partikel ist nach (3.266)  $a_P = 6(1 - \varepsilon)/d = 180 \text{ m}^2/\text{m}^3$ . Der Anordnungsfaktor nach (3.268) ist  $f_\varepsilon = 1,9$ , die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{w_m d}{\varepsilon \nu} = 6,135 \cdot 10^3.$$

Die Nußelt-Zahl berechnet sich nach Abschn. 3.7.4, Nr. 5, aus

$$Nu_m = 2 + \sqrt{Nu_{m,\text{lam}}^2 + Nu_{m,\text{turb}}^2}$$

mit  $Nu_{m,\text{lam}} = 46,40$  und  $Nu_{m,\text{turb}} = 35,58$  zu  $Nu_m = 60,47$ . Daraus ergibt sich  $\alpha_m = 80,73 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Die gesamte Partikeloberfläche ist nach (3.264)  $nA_P = a_P V = a_P A_0 H = 117 \text{ m}^2$ .

a) Damit wird  $\dot{Q} = \alpha_m n A_P (\vartheta_L - \vartheta_0) = 177740 \text{ W} \approx 178 \text{ kW}$ .

b) Die aufgrund der zugeführten Wärme verdunstende Wassermenge ist

$$\dot{M}_W = \dot{Q}/\Delta h_v = 7,25 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s}$$

Die aufgrund des Partialdruckgefälles verdunstende Wassermenge

$$\dot{M}_W = \beta_m \frac{p}{R_L T} (X_{WS} - X)$$

ist um rund zwei Größenordnungen kleiner und vernachlässigbar, wie man mit Hilfe des aus Abschn. 3.7.4, Nr. 5 folgenden Stoffaustauschkoeffizienten und dem spez. Wassergehalt  $X = 0,622 p_{WS}/(p/\varphi - p_{WS})$  nachprüfen kann.

- 3.13:** Die Höhe  $H_L$  der Wirbelschicht am Lockerungspunkt folgt aus der Bedingung konstanter Sandmasse

$$A_0 H_L (1 - \varepsilon_L) \varrho_S = A_0 H_S (1 - \varepsilon_S) \varrho_S.$$

Es ist

$$H_L = \frac{1 - \varepsilon_S}{1 - \varepsilon_L} H_S = 0,57 \text{ m}.$$

Der gesamte Druckabfall ist nach (3.311)  $\Delta p = [\varrho_S(1 - \varepsilon_L) + \varrho_L \varepsilon_L] g H \cong \varrho_S(1 - \varepsilon_L) g H$ . Da  $(1 - \varepsilon_L) H = \text{const}$  gilt, ist der Druckabfall in der Wirbelschicht praktisch konstant, was auch durch Messungen bestätigt wird. Man darf für  $(1 - \varepsilon_L) H$  am Lockerungspunkt auch  $(1 - \varepsilon_S) H_0$  der ruhenden Sandschicht setzen. Damit ist  $\Delta p \cong 7848 \text{ Pa}$ . Diesen Druckabfall muss das Gebläse aufbringen. Der Druck  $p_2$

am Ausgang des Gebläses ist gleich dem Druck am Eingang der Wirbelschicht  $p_2 = p_1 + \Delta p = 107848 \text{ Pa}$ . Die mittlere Dichte der Luft in der Wirbelschicht ist  $\varrho_{\text{mF}} = p_{\text{m}}/RT = 0,322 \text{ kg/m}^3$ . Die Lockerungsgeschwindigkeit folgt aus (3.312). Darin ist die Archimedes-Zahl gebildet mit der mittleren Dichte  $\varrho_{\text{mF}}$

$$Ar = \frac{\varrho_{\text{S}} - \varrho_{\text{mF}}}{\varrho_{\text{mF}}} \frac{d_{\text{p}}^3 g}{\nu^2} = 419,7.$$

Es ist nach (3.312)  $Re_{\text{L}} = 0,313$ ; und  $w_{\text{L}} = 0,094 \text{ m/s}$ . Die tatsächliche Geschwindigkeit ist  $w_{\text{m}} = 10w_{\text{L}} = 0,94 \text{ m/s}$ . Der Massenstrom der Luft im Eintrittsquerschnitt ist

$$\dot{M}_{\text{L}} = \varrho_{\text{L}} w_{\text{m}} A_0 = \frac{p_2}{RT} w_{\text{m}} A_0 = 2,22 \text{ kg/s}.$$

Die erforderliche Gebläseleistung ist

$$P = \dot{M}_{\text{L}} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{RT_1}{\eta_{\text{V}}} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = 20,4 \text{ kW}.$$

Es ist

$$\eta_{\text{V}} = \frac{P_{\text{rev}}}{P} = \frac{\dot{M} c_p (\vartheta_{1'} - \vartheta_1)}{P},$$

wenn  $\vartheta_{1'}$  die Endtemperatur der Verdichtung ist. Daraus folgt  $\vartheta_{1'} = 299,5 \text{ K} = 26,4^\circ\text{C}$ . Der zugeführte Wärmestrom beträgt  $\dot{Q} = \dot{M}_{\text{L}} c_{\text{p mL}} (\vartheta_2 - \vartheta_{1'}) = 2126 \text{ kW}$ .

**3.14:** Die Dichte der Luft über dem Erdboden ist

$$\varrho_{\text{L1}} = \frac{p_1}{R_{\text{L}} T_{\text{L1}}} = 1,2084 \text{ kg/m}^3,$$

die der Abgase ist

$$\varrho_{\text{G1}} = \frac{p_1}{R_{\text{G}} T_{\text{G1}}} = 1,1946 \text{ kg/m}^3.$$

Es ist  $\varrho_{\text{G1}} < \varrho_{\text{L1}}$ ; die Abgase können aufsteigen. Sie würden nicht mehr aufsteigen, wenn  $\varrho_{\text{G1}} \geq \varrho_{\text{L1}}$  wäre oder

$$T_{\text{G1}} \leq \frac{R_{\text{L}} T_{\text{L1}}}{R_{\text{G}}} = 438,1 \text{ K} = 164,9^\circ\text{C},$$

die Abgastemperatur also unter rund  $165^\circ\text{C}$  läge.

Für die Luft gilt  $d_p = -\varrho g dx$  und somit  $\nu dp = -g dx$ . Mit  $\nu = R_{\text{L}} T_{\text{L}}/p$  folgt

$$\frac{dp}{p} = \frac{g}{R_{\text{L}} T_{\text{L}}} dx.$$

Durch Integration erhält man die barometrische Höhenformel

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g\Delta x}{R_L T_L}\right).$$

Der Luftdruck in 100 m Höhe beträgt  $p_2 = 0,09882$  MPa. Die Dichte der Luft in 100 m Höhe ist

$$\rho_{L2} = \frac{p_2}{R_L T_L} = 1,194 \text{ kg/m}^3.$$

Die Dichte der Abgase in 100 m Höhe folgt aus

$$\rho_{G2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\kappa} \rho_{G1} = 1,184 \text{ kg/m}^3.$$

Die Abgase sind in 100 m Höhe leichter als die Luft. Sie können noch weiter aufsteigen.

**3.15:** Es ist

$$Gr = \frac{\gamma_{T_\infty} (\vartheta_0 - \vartheta_\infty) g L^3}{\nu^2} = 4,23 \cdot 10^9$$

und  $Ra = Gr Pr = 3,03 \cdot 10^9$ . Damit erhält man nach (3.368) die mittlere Nußelt-Zahl bei freier Strömung  $Nu_{mF} = 173,2$ . Weiter ist

$$Re = \frac{w_0 L}{\nu} = 5,80 \cdot 10^4.$$

Damit wird  $Nu_{m,lam} = 142,4$  und  $Nu_{m,turb} = 203,3$ . Man erhält die mittlere Nußelt-Zahl der erzwungenen Strömung zu

$$Nu_{mE} = \sqrt{Nu_{m,lam}^2 + Nu_{m,turb}^2} = 248,2.$$

Da freie und erzwungene Strömung entgegen gerichtet sind, gilt in (3.381) das Minuszeichen,  $Nu_m = 216,1$  und  $\alpha_m = 5,92 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Die beiden Seiten der Platte geben den Wärmestrom  $\dot{Q} = \alpha_m A (\vartheta_0 - \vartheta_\infty) = 474 \text{ W}$  ab.

**3.16:** Es ist nach Abschn. 3.9.3, Nr. 5 zu rechnen. Es ist

$$Ra_x = Gr_x Pr = \frac{\gamma_{T_\infty} \dot{q} g x^4}{\nu^2 \lambda} Pr = 7,11 \cdot 10^{10} \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^4.$$

Am Plattenende  $x_1 = 0,4 \text{ m}$  ist  $Ra_x = 1,82 \cdot 10^9$ . Die Strömung ist am Plattenende gerade noch laminar. Es ist

$$Nu_x = 78,42 \left(\frac{x}{\text{m}}\right)^{4/5} \quad \text{und} \quad \alpha_x = Nu_x \frac{\lambda}{x} = 1,968 x^{-1/5} \frac{\text{W}}{\text{m}^{9/5}\text{K}}$$

Weiter folgt aus  $\dot{q} = \alpha_x (\vartheta_0 - \vartheta_\infty)$ :

$$\vartheta_0 = \frac{\dot{q}}{\alpha_x} + \vartheta_\infty = 7,62 \frac{\text{W}}{\text{m}^{1/5}} x^{1/5} + 283,15 \text{ K}.$$

Die Wandtemperatur nimmt mit  $x^{1/5}$  zu und beträgt am Plattenende,  $x_1 = 0,4 \text{ m}$ :

$$\vartheta_0 = 289,5 \text{ K} = 16,3 \text{ }^\circ\text{C}.$$

- 3.17:** Die Kühlung wird durch den Wärmeübergang bei freier Strömung bestimmt. Für den senkrechten Zylinder gilt (3.368), für den waagrechten die Gleichung Nr. 3 in Abschn. 3.9.3. Die Raleigh-Zahl  $Ra_S$  für den senkrechten Zylinder ist mit der Zylinderhöhe, die für den waagrechten  $Ra_W$  mit dem Zylinderdurchmesser zu bilden. Es ist

$$Ra_S = \frac{\gamma_{T_\infty} (\vartheta_0 - \vartheta_\infty) g L^3}{\nu^2} Pr = 8,45 \cdot 10^6 \quad \text{und} \quad Ra_W = 5,41 \cdot 10^5.$$

Nach (3.368) wird  $Nu_{mS} = 29,75$  und  $\alpha_{mS} = Nu_{mS} \lambda / L = 5,06 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Nach Nr. 3 in Abschn. 3.9.3, wird  $Nu_{mW} = 12,25$  und  $\alpha_{mW} = Nu_{mW} \lambda / d = 5,21 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Es ist  $\alpha_{mW} > \alpha_{mS}$ . Außerdem wird bei waagrechter Lage noch Wärme über die Enden abgeführt. Die Dosen kühlen daher rascher ab, wenn man sie legt.

- 3.18:** Die Temperatur der Außenhaut  $T_0$  ist praktisch gleich der Eigentemperatur, denn die von der Außenhaut abgegebene Wärmestromdichte ist nach (3.146)  $\dot{q} = \alpha(T_0 - T_e) = k'(T_i - T_0)$  mit  $1/k' = 1/\alpha_i + \delta/\lambda$ . Daraus folgt  $T_0 - T_e = k'/\alpha(T_i - T_0)$ . Darin ist  $T_i - T_0$  einige K, und der äußere Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha \gg k'$ . Daher ist  $T_0 \cong T_e$ . Die Eigentemperatur berechnet sich nach (3.399) mit  $w_{S\delta} = \sqrt{\kappa RT_\delta} = 299,5 \text{ m/s}$  und  $Ma_\delta = w_\delta/w_{S\delta} = 0,649$  zu

$$T_e = T_0 = T_\delta \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_\delta^2 \right] = 241,95 \text{ K} = -31,2 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Zum annähernd gleichen Ergebnis kommt man nach (3.401) mit  $r = \sqrt[3]{Pr} = \sqrt[3]{0,727} = 0,89$  und  $Pr(-50 \text{ }^\circ\text{C}) = 0,727$ ,  $c_p = 1,007 \text{ kJ/kgK}$ . Man erhält  $T_0 = 240 \text{ K} = -33,1 \text{ }^\circ\text{C}$ . Die Wärmestromdichte ist  $\dot{q} = k(T_i - T_0) = 170,7 \text{ W/m}^2$  mit

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda} \quad \text{und} \quad k = 3,33 \text{ W/m}^2 \text{ K}.$$

- 3.19:** Sobald die Temperatur  $T_0$  der Außenhaut über eine Eigentemperatur  $T_e$  von  $300 \text{ }^\circ\text{C}$  ansteigt, muss man kühlen. Es muss daher  $T_0 \leq T_e$  sein, damit man nicht kühlen muss. Nach (3.399) ist

$$\frac{T_e}{T_\delta} = 1,8.$$

Es soll  $T_0 \leq T_e = 1,8 T_\delta$  sein, also  $T_\delta \geq T_0/1,8 = 45,3 \text{ }^\circ\text{C}$ . Sobald die Lufttemperatur über  $45,3 \text{ }^\circ\text{C}$  ansteigt, muss man kühlen.

### Kapitel 4: Konvektiver Wärme- und Stoffübergang, Strömungen mit Phasenumwandlungen

- 4.1 Nach (4.15) ist  $\alpha_{m,waag} = 3538,9 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Die Temperatur an der Kondensatoberfläche ergibt sich näherungsweise aus (4.35)

$$\vartheta_1 - 333,15 = \frac{30 \text{ W/m}^2\text{K} \cdot 2257,3 \text{ kJ/kgK}}{\alpha_{m,waag} \text{ W/m}^2\text{K} \cdot 1,93 \text{ kJ/kgK}} \ln \frac{(0,101325 - p_1(\vartheta_1)) \text{ MPa}}{6,556 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}}.$$

Hierin ist  $p - p_{1G} = (1 - y_{1G})p = 0,0647 \cdot 0,101325 \text{ MPa} = 6,556 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$  gesetzt.  $\alpha_{m,waag}(\vartheta_1)$  ist nun mit der noch unbekanntem Temperatur  $\vartheta_1$  an der Phasengrenze nach (4.15) zu bilden. Zur Bestimmung von  $\vartheta_1$  aus obiger Gleichung schätzt man zunächst  $\vartheta_1$ , und prüft mit dem Wert  $p_1(\vartheta_1)$  aus der Wasserdampf-tafel nach, ob der Schätzwert richtig war. Man findet  $\vartheta_1 = 350,8 \text{ K} = 77,7^\circ\text{C}$ , hierfür ist  $p_1 = 0,0397 \text{ MPa}$  und obige Gleichung recht gut erfüllt. Aus (4.36) folgt damit  $\dot{q}_G/\dot{q} = 0,44$ . Die abgeführte Wärmestromdichte sinkt auf 44 % der Wärmestromdichte, die man abführen müsste, wenn reiner Satt-dampf vorhanden wäre. Die Fläche muss also rund um den Faktor  $1/0,44 = 2,27$  vergrößert werden, wenn die Kondensatorleistung gleich bleiben soll.

- 4.2 Es ist  $\Delta\vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_s = 200^\circ\text{C}$ , nach Abb. 4.40 befindet man sich im Bereich der Filmverdampfung. Der Wärmeübergangskoeffizient ergibt sich aus 4.2.8, Nr. 6 zu  $\alpha_S = 25,1 \text{ W/m}^2\text{K}$  und  $\alpha_{mG} = 231,1 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Damit ist  $\alpha_{mG}/\alpha_S = 9,2$  und  $\alpha_m/\alpha_{mG} = 1,088$ ,  $\alpha_m = 252,1 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Die Heizleistung ist  $\dot{Q} = \alpha_m A \Delta\vartheta = 396 \text{ W}$ .
- 4.3 Die Heizleistung beträgt  $\dot{Q} = \dot{M}_{WT} c_{pWT} \Delta\vartheta = 3 \text{ MW}$ . Der erzeugte Dampfmen-genstrom  $\dot{M}_W$  folgt aus  $\dot{Q} = \dot{M}_W \Delta h_v$  zu  $\dot{M}_W = 1,38 \text{ kg/s} = 4,95 \cdot 10^3 \text{ kg/h}$ . Der übertragene Wärmestrom ist andererseits

$$\dot{Q} = k A \Delta\vartheta_m \quad \text{mit} \quad \Delta\vartheta_m = \frac{(\vartheta_{WTe} - \vartheta_s) - (\vartheta_{WTa} - \vartheta_s)}{\ln[(\vartheta_{WTe} - \vartheta_s)/(\vartheta_{WTa} - \vartheta_s)]}.$$

Es ist  $\Delta\vartheta_m = 42,84 \text{ K}$  und aus  $1/(kA) = 1/(\alpha_i A_i) + 1/(\alpha_a A_a)$  mit  $A = A_a \cong A_i$  folgt  $1/k = 1/\alpha_i + 1/\alpha_a$ . Nach (4.97) ist  $\alpha_a = 2,43 \dot{q}^{0,72} \text{ W/m}^2\text{K}$  und somit

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{700} + \frac{1}{2,43 \dot{q}^{0,72}} \text{ m}^2\text{K/W}.$$

Damit wird

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \dot{q} = k \Delta\vartheta_m = \left( \frac{1}{700} + \frac{1}{2,43 \dot{q}^{0,72}} \right)^{-1} \text{ W/m}^2\text{K} \cdot 42,84 \text{ K}.$$

Dies führt zu einer transzendenten Gleichung für  $\dot{q}$ :

$$3,3347 \cdot 10^{-5} \dot{q} + 9,606 \cdot 10^{-3} \dot{q}^{0,28} - 1 = 0.$$

Die Lösung lautet  $\dot{q} = 25076 \text{ W/m}^2$ . Die Fläche folgt aus  $\dot{Q} = \dot{q} A$  zu  $A \cong 120 \text{ m}^2$ .

4.4 a) Die Länge folgt aus der Energiebilanz

$$\dot{q}d\pi \Delta z = \dot{m} \frac{d^2\pi}{4} (h' - h_1) \quad \text{zu} \quad \Delta z = \frac{\dot{m}d(h' - h_1)}{4\dot{q}} = 1,17 \text{ m.}$$

b) Der Dampfgehalt im Austrittsquerschnitt ergibt sich aus (4.115) zu  $x^* = 0,387$ .

4.5 Nach (4.152) ist

$$X_{tt} = 0,2259 \left( \frac{1 - x^*}{x^*} \right)^{0,9}.$$

Nach (4.126) ist mit (4.128)

$$\begin{aligned} \left( \frac{dp}{dz} \right)_r &= -\Phi_L^2 \left( \frac{dp}{dz} \right)_L = \Phi_L^2 \zeta_L \frac{\dot{m}^2}{d} (1 - x^*)^2 \\ \left( \frac{dp}{dz} \right)_r &= -2061,6 \text{ N/m}^3 \Phi_L^2 (1 - x^*)^2. \end{aligned}$$

Aus (4.153) folgt mit obigem Wert für  $X_{tt}$

$$\Phi_L^2 = 1 + \frac{20}{X_{tt}} + \frac{1}{X_{tt}^2} = 1 + 88,53 \left( \frac{x^*}{1 - x^*} \right)^{0,9} + 19,596 \left( \frac{x^*}{1 - x^*} \right)^{1,8}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left( \frac{dp}{dz} \right)_r dx^* &= -2063 \text{ N/m}^3 \left[ (1 - x^*)^2 + 88,53 x^{*0,9} (1 - x^*)^{1,1} \right. \\ &\quad \left. + 19,596 x^{*1,8} (1 - x^*)^{0,2} \right] dx^*. \end{aligned}$$

Da mit konstanter Wärmestromdichte beheizt wird, ändert sich der Strömungsdampfgehalt  $x^*$  linear mit der Lauflänge  $z$ . Dies folgt aus der Energiebilanz

$$x^* = \frac{1}{\Delta h_v} \frac{\dot{q}d\pi (z - \Delta z)}{\dot{m}d^2\pi/4} = \frac{\dot{q} \cdot 4}{\Delta h_v \dot{m}d} (z - \Delta z).$$

Mit  $\Delta z = 1,17 \text{ m}$  wird  $x^* = 0,1575(z/m - 1,17)$ . Somit ist  $dx^*/dz = 0,1575 \text{ 1/m}$  und in der vorigen Gleichung für den Druckabfall

$$\left( \frac{dp}{dz} \right)_r dx^* = (dp)_r 0,1575/m.$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned} (dp)_r &= -13098 \text{ N/m}^2 \left[ (1 - x^*)^2 + 88,53 x^{*0,9} (1 - x^*)^{1,1} \right. \\ &\quad \left. + 19,596 x^{*1,8} (1 - x^*)^{0,2} \right] dx^*. \end{aligned}$$

Integration zwischen  $x^* = 0$  und  $x^* = 0,387$  ergibt  $(\Delta p)_r = -823 \text{ hPa} = -0,823 \text{ MPa}$ .

**4.6 a)** Die Länge ergibt sich aus einer Energiebilanz

$$\dot{q}d\pi L + \dot{M}h_1 = \dot{M}_G h'' + \dot{M}_L h'$$

$$\frac{\dot{q}d\pi L}{\dot{m}d^2\pi/4} = x^* h'' + (1 - x^*) h' - h_1$$

$$L = \frac{\dot{m}d}{4\dot{q}} [x^* h'' + (1 - x^*) h' - h_1] = 3,25 \text{ m.}$$

b) Die Wandtemperatur ergibt sich aus  $\vartheta_0 = \vartheta_s + \dot{q}/\alpha_{2\text{Ph}}$ . Es ist  $\vartheta_s(5,95 \text{ MPa}) = 275 \text{ }^\circ\text{C}$ . Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{2\text{Ph}}$  folgt aus (4.159) mit  $\alpha_L$  und  $\alpha_G$  aus 3.8.6 Nr. 1. Es ist

$$Re_L = \frac{\dot{m}d}{\eta_L} = 2,1 \cdot 10^5; \quad Re_G = \frac{\dot{m}d}{\eta_G} = 1,08 \cdot 10^6$$

$$\alpha_L = 11023 \text{ W/m}^2\text{K}; \quad \alpha_G = 6241 \text{ W/m}^2\text{K}$$

und  $\alpha_{2\text{Ph}} = 39258 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Damit wird  $\vartheta_0 = 295,4 \text{ }^\circ\text{C}$ .

## Kapitel 5: Wärmestrahlung

**5.1**  $c = 197,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ ;  $\lambda_M = 1,97 \text{ } \mu\text{m}$ ;  $e_{\text{Ph}} = 6,622 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ .

**5.2**  $\lambda_1 = 2,3 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $\lambda_2 = 4,7 \text{ } \mu\text{m}$ ;  $L = 115,2 \text{ W/(m}^2\text{sr)}$ ;  $M = 361,9 \text{ W/m}^2$ ;  $\Delta M/M = 1/32$ .

**5.3**  $\Delta M/M = 1/4$

**5.4**  $L_{\text{ref}} = 38,2 \text{ W/(m}^2\text{sr)}$ ;  $\Phi_{\text{b,abs}}/A = 680 \text{ W/m}^2$

**5.5**  $T = 1139 \text{ K}$

**5.6**  $T = 1400 \text{ K}$ ;  $M = 218 \text{ kW/m}^2$

**5.7**  $T = 4330 \text{ K}$  und  $T = 11810 \text{ K}$ . Es gibt zwei Temperaturen!

**5.8** a)  $\varepsilon = 0,677$ ; b)  $a = 0,375$

**5.9** 0,332

**5.10**  $E = 6375 \text{ W/m}^2$ ;  $\varepsilon = 0,864$

**5.11**  $T = 740 \text{ K}$ ;  $\varepsilon = 0,0964$ ;  $\varepsilon_n = 0,0789$

**5.12**  $F_{11} = 0$ ;  $F_{12} = 1$ ;  $F_{21} = 0,6366$ ;  $F_{22} = 0,3634$

**5.13**  $F_{12} = 0,5$

**5.14**  $F_{11} = 0$ ;  $F_{12} = 0,8500$ ;  $F_{13} = 0,1500$ ;  $F_{21} = 0,3400$ ;  $F_{22} = 0$ ;  $F_{23} = 0,6600$ ;  
 $F_{31} = 0,0833$ ;  $F_{32} = 0,9167$ ;  $F_{33} = 0$ .

**5.15**  $T(0) = 507 \text{ K}$ ;  $T(h) = 439 \text{ K}$ ;  $T(2h) = 375 \text{ K}$ ;  $T(10h) = 305 \text{ K}$ ;  $T(\infty) = 300 \text{ K}$ .

**5.16**  $T = 953 \text{ K}$

**5.17**  $\dot{Q} = 436 \text{ W}$

- 5.18** a) Der Wärmestrom ist unabhängig von der Orientierung des Strahlungsschutzschirms. b) Wenn die Seite mit dem größeren Emissionsgrad ( $2,5\varepsilon_S$ ) auf die Platte mit  $T_1$  gerichtet ist, ergibt sich die höhere Temperatur  $T_S$ .
- 5.19** a)  $T_A = 679,6 \text{ K}$ ;  $T_B = 576,1 \text{ K}$ . b)  $\dot{q} = 4063 \text{ W/m}^2$ . c)  $T_1 = 576,1 \text{ K} = T_B$  von Frage a).
- 5.20** a)  $\lambda_{\text{eff}} = 0,2545 \text{ W/K m}$ ;  $\dot{q} = 33,82 \text{ W/m}^2$ . b)  $\dot{q} = 13,1 \text{ W/m}^2$
- 5.21**  $\alpha = 39,9 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ ;  $\alpha_{\text{St}} = 23,8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ . Die Gasstrahlung ist zu etwa 37 % am Wärmeübergang beteiligt.



---

# Sachverzeichnis

## A

Abbildung, konforme, 154  
Abbinden von Beton, 213  
Abkühlung, 131  
  einer Platte, 140  
  einer Stahlplatte, 234, 266  
  eines Zylinders, 197  
  einfacher Körper, 181  
  von Behältern, 131  
Abkühlzeiten, 193, 198  
Abreißdurchmesser, 563–565, 571, 572, 575, 606  
Abreißvolumen, 564  
Absorption, 618  
  durch Ozon, 681, 684  
  in der Atmosphäre, 678, 679, 683  
  von Solarstrahlung, 662, 689, 691  
  von Strahlung, 619, 620, 633, 638, 641, 645, 683  
Absorptionsgrad, 634–637  
  Berechnung von -en, 658  
  des grauen Lambert-Strahlers, 660, 692  
  für Solarstrahlung, 690, 691  
  gerichteter spektraler, 635  
  Hemisphärischer spektraler, 635, 640  
  von Gasen, 629, 721  
  von Metallen, 667  
Absorptionskoeffizient  
  Spektraler, 672  
  von Wasser, 672  
Absorptionszahl, 663, 666  
Aerosole, 681, 682, 685, 687  
ähnlichkeitslösung, 468  
Albedo, 689, 692  
Analogie zwischen Impuls-, 424  
Analogieverfahren, 153, 162, 163

Anfangs-Randwertaufgabe, 162  
Anfangsbedingung, 128, 134, 165, 167  
Anheizen von Behältern, 131  
Anordnungsfakto, 429  
Anteilsfunktion, 650  
Archimedes-Zahl, 447  
Astronomische Einheit, 676  
Ausdehnungskoeffizient, 464  
Ausstrahlung, 617, 619–621  
  des Schwarzen Körpers, 636, 642–645  
  spektrale spezifische, 623, 624  
Austrocknen der Heizfläche, 600, 601  
Azimutwinkel, 621, 622, 624, 626, 634, 638, 656, 663

## B

Baker-Diagramme, 583  
Banden-Approximation, 741  
Behältersieden, 566  
Beim Aussenden von Wärmestrahlung, 620  
Benetzung, 505  
Berechnung der Wandtemperaturen  
  von Absorptionsgraden, 635  
Beschleunigungsdruckabfall, 588  
Bestrahlung, 620, 630  
  Strahlungsgrößen, 620, 623, 625, 626  
Bestrahlungsdichte, 631–633, 635  
  spektrale, 631–634  
Bestrahlungsstärke, 630, 632, 633, 635  
  der diffusen Solarstrahlung, 690  
  der direkten Solarstrahlung, 681, 687  
  der extraterrestrischen Solarstrahlung, 676, 677, 680  
  der Globalstrahlung, 689, 690  
Bilanzgleichungen, 318

- Bildfunktion, 163  
 Biot-Zahl, 134, 135  
   des Differenzenverfahrens, 220  
   kleine, 135  
 Blasenfrequenz, 563, 565  
 Blasenradius, 558, 560  
 Blasensieden, 551–553, 555, 567, 571  
   allgemein, 539, 571  
   an waagerechten Kupferrohren, 576  
   von Wasser, 516, 535, 566, 574, 611  
 Blasenströmung, 554, 580–582  
 Blasius'sches Gesetz, 592  
 Boltzmann-Konstante, 646, 651  
 Boussinesq-Ansatze, 373, 374, 393  
 Brechzahl, 618, 648, 649, 663–667  
   elektrischer Nichtleiter, 690  
 Burn-out, 570
- C**
- Cauchysche Bewegungsgleichung, 332  
 Cauchyschen Bewegungsgleichung, 332  
 Celsius\_Temperature, 2  
 Chen, 511  
 Cosinusetz, 656  
 Couette-Strömung, 350
- D**
- Damköhler-Zahl, 288  
 Dampfblasen, 551–553, 556, 559, 564  
 Dampfblasenentstehung, 606  
 Dampfgehalt, thermodynamischer, 585  
   Wahrer, 586, 587  
 Darcysche Gesetz, 431  
 Definition der Absorptionsgrade  
   der Reflexionsgrade, 640  
 Dephlegmator, 536  
 Deposition controlled burnout, 601  
 Dielektrika, 663–666  
 Differentialgleichung für das Konzentrations-  
   feld, 272, 275  
   für das Temperaturfeld, 121, 122, 125  
   für die Laplace-Transformierte, 167  
   für gerade Rippen, 147  
   für Kreisrippen, 148  
 Differentialoperator, selbstadjungierter, 235  
 Differenzgleichung, 220–222  
   explizite, 193, 198  
   für adiabaten Rand, 226  
   für den Zylinder, 137, 191  
   für ebene Temperaturfelder, 154  
   für Gitterpunkt in Randnähe, 225  
   für Randpunkt, 245, 249  
   implizite, 230  
 Differenzenquotient, 220, 221  
   vorderer, 221  
   zentraler, 221  
   zweiter, 240  
 Differenzenverfahren, 162, 219  
   explizites bei temperaturabhängigen  
     Stoffwerten, 125  
   für ebene stationäre Temperaturfelder, 243  
   für Zylinderkoordinaten, 218  
   graphisches, 186  
   implizites, 231  
   nach Crank-Nicolson, 233  
 Diffus strahlende Flächen, 628, 629  
 Diffusion, 121  
   äquimolare, 274  
   stationäre, 121  
 Diffusionsgleichung, 272  
 Diffusionskoeffizienten  
   turbulenter, 374  
 Diffusionsstromdichte  
   turbulente, 373  
 Diffusionswiderstandsfaktor, 291  
 Dilatation, 333  
 Diskretisierung  
   der Wärmeübergangsbedingung, 130  
   mit finiten Elementen, 252  
   von Randbedingungen, 220  
 Diskretisierungsfehler, 221, 222  
 Draper-Punkt, 647  
 Druck, mittlerer, 331  
   thermodynamischer, 331  
 Druckabfall, geodätischer, 588  
   zweiphasiger Strömungen, 586, 590  
 Dryout, 596
- E**
- Eckert-Zahl, 363  
 Eigenfunktion, 185  
 Eigentemperatur, 485, 487  
 Eigenwert, 185, 188  
   Kleinsten, 188  
 Eigenwertaufgabe, Sturm-Liouvillesche, 185

- Einlauflänge, hydrodynamische, 409  
 Einheitstensor, 330  
 Einlaufströmung, thermische, 418  
 Einstrahlzahl, 693  
 Elektrische Leiter, 666  
 Elektrische, Nichtleiter, 663  
 Emission, 619, 620  
 Emissionsbande, 725, 728  
 Emissionsgrad  
   eines Gases, 725  
   eines Gasvolumens, 729  
   in Richtung der Flächennormale, 623, 627, 629, 663  
   realer Körper, 654, 660  
 Energie, Dissipierte, 343  
 Energiebilanz, 337  
   einer Zone, 701, 704, 712  
   eines Kondensators, 548  
   für einen Wirbelschichtreaktor, 450  
 Energiegleichung, 347  
   Enthalpieform der, 347, 482  
   für Kondensatoberfläche, 543  
   Temperaturform der, 347, 348  
 Energiequantum, 618  
 Entropie, 343  
 Entropieproduktion, 343  
 Entropiestromdichte, 343  
 Entwicklung, asymptotische des Fehlerintegrals, 170  
 Ergun, 431  
 Error-function, 169, 173  
 Ersatzschaltbild für den Strahlungsaustausch, 708  
 Erstarren ebener Schichten, 203  
   einfacher Körper, 181  
 Erstarrungsdauer, 205  
   ebener Schichten, 203  
 Erstarrungsenthalpie, 202, 203  
 Erstarrungsgeschwindigkeit, 204, 211  
 Erwärmung dünnwandiger Behälter  
   einer Platte, 144  
   eines halbbunendlichen Körpers, 172  
   eines Rechkants, 196  
   einfacher Körper, 202  
 Erwärmung dünnwandiger Behälter  
   eines Zylinders, 197  
 Eulersche Gleichung, 356  
 Exponentialintegral, 219  
 Exzentrizitätsfaktor, 676, 678
- F**  
 Füllkörperkolonne, 427  
 Faltungssatz, 164, 216  
 Fehlerintegral, 169, 173  
   integriertes, 173–175, 213  
   Komplementäre, 166, 169, 173, 174  
 FEM, 252, 253, 258  
 Festbett, 427  
 Ficksches Gesetz, 275, 278, 282  
 Filmdicke, 509  
 Filmkondensation, 523  
   an waagerechten Rohren, 510  
   laminare, 549  
   mit turbulenter Wasserhaut, 523  
   turbulente strömender Dämpfe, 550  
 Filmsieden, 577, 600, 601  
 Filmverdampfung, 566, 567, 577  
 Finite-Element-Methode, 252  
   für ebene stationäre Temperaturfelder, 243  
   für instationäre, geometrisch eindimensionale Wärmeleitprobleme, 162  
   für stationäre, geometrisch eindimensionale Temperaturfelder, 291  
 Flachkollektor, 670  
 Fluidatbett, 426  
 Formfaktor, 160, 693  
 Formkoeffizient, 160  
 Fourier-Zahl, 133  
   des Differenzenverfahrens, 222  
 Fouriers Gesetz, 4  
 Frequenz, 618, 648  
 Frequenz von, 564  
 Fresnelschen Gleichungen, 663  
 Froude-Zahl, 539
- G**  
 Gamma-Funktion, 166  
 Gashalbkugel, 728  
 Gaskugel, 733–735  
 Gasstrahlung, 617, 692, 721, 726, 728, 729, 738, 740, 741, 747  
 Geometrisches Mittel, 7  
 Gerichteter, 635, 640, 642, 655, 664, 665, 680, 681  
 Gesamt-Absorptionsgrad, gerichteter  
   hemisphärische, 625  
   hemisphärischer, 621, 624, 625, 630, 632, 633

Gesamt-Emissionsgrad eines, 668, 669, 712  
 Geschwindigkeitskonstante, 287  
 Geschwindigkeitsprofil an der ebenen Platte, 389  
   der kompressiblen Strömungen, 482  
 Geschwindigkeitsschwankun, 370  
 Gesetz von Bouguer, 684  
   von Darcy, 431  
   von Forchheimer, 432  
 Gitternetz, 220, 221  
   quadratisches, 241  
   zentriertes, 235  
 Glattrohrbündel, 402  
 Gleichgewicht, hydrostatisches, 460  
 Gleichgewichtsstrahlung, 641  
 Gleichgewichtswert, 283  
 Gleichungen, Fresnelsche  
   für den Emissionsgrad von Gasen, 728  
 Gleichungssystem für den Strahlungsaustausch, 712  
   für die Helligkeiten, 713  
 Globalstrahlung, 687, 688  
 Graetz-Nußelt-Problem, 418  
 Grashof-Zahl, 465  
   modifizierte, 465, 475  
 Grenzfläche, 129  
   Temperatursprung an der, 130  
 Grenzflächenspannung, 505, 551  
 Grenzschrift  
   Laminare, 380  
 Grenzschriftablösung, 397  
 Grenzschriftdicke, 388  
 Grenzschriftgleichungen, 358  
   Lösungen der, 386  
 Grundgesetz der Wärmeleitung  
   photometrisches, 693

**H**

Hagen-Poiseuille-Strömung, 411  
 Halbraum, 214, 621, 623–625, 633, 635, 640, 655  
 Hatta-Zahl, 293  
 Haufwerk, 409, 426, 456, 458  
 Heterogene, 449  
 Himmelsstrahlung, 687, 688, 690  
 Hohlraum, 641–643, 645  
   isothermer, 645, 711, 712  
   mit drei Zonen, 701

Hohlraumstrahlung, 641–644  
 Hohlraumvolumenanteil, 427  
 Homogene, 449  
 Hookescher Körper, 336

**I**

Impulsbilanz, 325  
 Impulsleichung, 462  
 Indifferenzpunkt der Strömung, 380  
 Inertgas, 516, 518, 519  
 Instabilität expliziter Differenzenverfahren, 220, 231  
 Integralbedingung für die Energie, 382  
   für Impuls, 382  
   für Stoffaustausch, 382  
 Integralmethoden, 381  
 Inversion, 461  
 Isotherms, 3  
 Isotropes Material, 4

**K**

Kapillarkräfte, 562  
 Katalysatoroberfläche, 286  
 Keimbildung, 559, 563, 606  
 Kennlinie des Verdampfers, 569  
 Kennzahl, dimensionslose  
   der Wärmeleitung, 121  
 Komponenten-Kontinuitätsgleichung, 323  
 Kondensatfilm, 504, 507, 508, 510–513, 515, 518, 524, 526, 533, 538, 610  
 Kondensathaut, 523, 524, 538  
 Kondensation bei Gleich- und Gegenstrom, 539  
   Grenzfälle der, 543  
   strömender Dämpfe, 526, 529  
   von Dampfgemischen, 536, 537  
 Kondensationskeime, 506  
 Kondensator  
   Berechnung der Fläche eines -s, 547  
 Kontakt zweier Körper, 177  
 Kontakttemperatur, 177, 178  
 Kontaktwärmeübergangskoeffizienten, 129  
 Kontaktwiderstand, 129  
 Kontinuitätsgleichung, 322, 323  
 Konvektionssieden, 554  
 Konzentrationsgrenzschrift, 317, 366  
 Korngröße poröser Stoffe, 432  
 Körper, einseitig unendlich ausgedehnter, 171

- poröse, 431  
 Schwarzer, 642, 644, 645  
 Korrespondenzen, Tafel der, 165, 167  
 Kreisrippe, 148, 152  
 Kronecker- $\delta$ , 330  
 Kugel, 473  
   uberströmt, 407  
 Kugelpackung, 428  
 Kugelschüttung, 428
- L**
- Lambert-Strahler, 629, 656–658, 660, 661, 690, 692  
 Lambertisches Cosinusgesetz, 628  
 Laminarströmung hydrodynamisch ausgebildet, 410  
 Laplace-Operator, 125, 128, 137  
 Laplace-Parameter, 163  
 Laplace-Transformation, 162, 163  
 Laplace-Transformierte, 163, 164, 166, 167  
 Laplacesche Differentialgleichung, 127, 154  
 Leistungsdichte, 124, 125, 338, 342  
   temperaturabhängige, 121  
   Zeitabhängige, 161, 162  
 Lévêque-Lösung, 422  
 Lewis-Zahl, 318  
 Lewissche Beziehung, 369, 517  
 Lichtgeschwindigkeit, 618, 646, 648, 667  
 Lichtstreuung, 682  
 Lockerungsgeschwindigkeit, 447  
 Lockerungspunkt, 447  
 Lockhart-Martinelli-Parameter, 593  
   Verfahren, 593  
 Logarithmisches Mittel, 7  
 Löslichkeit, 282, 284  
 Lückengrad, 291, 292
- M**
- Mach-Zahl, 358  
 Maschenweite, 220, 221, 229  
 Massenbilanz, 275–277, 321  
 Materialgesetz, 335, 344  
 Mehrfach-Reflexion, 671  
 Mikrokonvektion, 571  
 Mikrozone, 560–562  
 Mischungstemperatur, adiabate, 412  
 Mischungsweg, 377  
 Mischungsweghypothese, 376  
 Mitteltemperatur, 176  
   der Platte, 138, 181, 185, 187, 191  
 Modul des Differenzenverfahrens, 222
- N**
- Näherung für große Zeiten, 192  
   kleine Biot-Zahlen, 200  
   kleine Zeiten, 163  
   quasistationäre, 179  
 Nadel, 145, 146  
 Navier-Stokesschen Gleichungen, 336  
 Netto-Strahlungsfluss, 700, 702, 705  
 Netzmittel, 605  
 Newtonsches Fluid, 335  
 Nichtisotropes Medium, 4  
 Normalspannungen, 330  
 Nukijama-Kurve, 565  
 Numerische Lösung von Wärmeleitproblemen, 219  
 Nußelt-Zahl, 135, 398  
   bei thermisch ausgebildeter Laminarströmung, 417  
   Endwert, 422  
 Nußeltsche Wasserhauttheorie, 506, 512, 523, 540  
   Abweichungen von der, 511  
   temperaturabhängige Stoffwerte und, 512
- O**
- Oberbeck-Boussinesq-Approximation, 466  
 Oberfläche  
   spezifische, 428  
 Oberfläche, adiabate, 168  
   spezifische, 123  
 Oberflächenkräfte, 327  
 Oberflächenreaktion, katalytische, 285  
 Oberflächentemperatur, 128  
   der Sonne, 653, 675–678  
 Objektfunktion, 163  
 Optische Dicke, 723  
 Optische Masse, 680–682  
   relative, 682–684, 686, 687, 721  
 Optische, Dicke, 723  
 Ozon, 681, 683  
 Ozonloch, 683

**P**

Péclet-Zahl, 362  
 Permeabilität, 431  
 Pfropfenströmung, 553, 554, 580–582  
 Phänomen, 570  
 Phase, 2  
 Phasenübergangszahl, 205  
 Photon, 618  
 Photonengas, 641  
 Planck-Konstante, 618, 646, 651  
 Platte  
   Geneigte, 473  
   Waagrechte, 472  
 Platte, ebene, 379, 718, 735  
   ebene Längsangeströmte, 406  
 Poiseuille-Parabel, 409  
 Pool boiling, 566  
 Porennutzungsgrad, 293, 294  
 Prandtl-Analogie, 395  
 Prandtl-Zahl, 362  
 Produktansatz, 184  
 Produktdarstellung mehrdimensionaler  
   Temperaturfelder, 198  
 Produktionsrate, 276, 323  
 Profilzylinder, Profilzylinder, 407  
 Promotoren, 533, 535

**Q**

Quantentheorie, 617, 618, 620, 644, 651  
 Quer angeströmten, 398  
 Quer angeströmter, 396  
 Querangeströmter, 407  
 Querteilung, 401

**R**

Randbedingung, 128  
   dritter Art, 240  
   erster Art, 246  
   im Differenzenverfahren, 224, 226  
   zweiter Art, 240  
 Randwinkel, 505, 563, 564, 571, 572, 575  
 Raumwinkel, 620, 622  
 Raumwinkeleinheit, 622  
 Raumwinkelement, 621, 622, 625, 629  
 Rayleigh-Gleichung, 545  
 Rayleigh-Streuung, 681, 682, 685, 687–689,  
   722

Recovery-Faktor, 485  
 Reaktion, 124  
    $n$ -ter Ordnung, 287  
   chemische, 124  
   erster Ordnung, 286  
   heterogene, 285  
   nukleare, 124  
 Reaktionsrate, 286, 324  
 Reaktor, katalytischer, 286  
 Referenztemperatur, 490  
 Reflexion, 619, 620, 638, 639  
   diffuse, 628, 629, 638, 639, 658, 659, 664  
 Regressionsanalyse, 571  
 Reibungsbeiwert, 392  
 Reibungsdruckabfall, 588–591, 593, 611  
   der homogenen Zweiphasenströmung, 592  
 Reibungskräfte, 463  
 Reynolds-Analogie, 370, 395  
 Reynoldssche Transporttheorem, 319, 321  
 Richtungsverteilung reflektierter Strahlung,  
   639, 658  
   von Strahlungsenergie, 619  
 Rieselfilmkolonne, 538  
 Rippe, 145  
   gerade, 148  
   kreisförmige, 148  
   mit geringstem Materialaufwand, 151  
   mit Rechteckprofil, 150  
 Rippenhöhe, optimale, 150  
 Rippenwirkungsgrad, 136, 145, 146, 151  
 Rohr  
   durchströmte, 445  
 Rohranordnung, 402  
 Rohrbündel, 402  
   Quer angeströmte, 401  
 Rohrbündel aus Glattrohren, 408  
 Rohrströmung  
   turbulente, 424  
 Rohrströmung, laminare, 409  
 Rücktransformation, 165–167, 169  
   gliedweise, 167  
 Rücktransformation  
   gliedweise, 194  
 Ruhetemperatur, 485

**S**

Sättigungssieden, 596–598, 603  
 Schüttungen, 458

- Schallgeschwindigkeit, 358, 484  
Schaumströmung, 580  
Scheibenrippen, 153  
Scheinspannungen  
  turbulente, 373  
Schichtdicke eines Gases, 734  
  gleichwertige, 722, 727, 729  
Schichtenströmung, 375, 550, 581, 582, 600  
Schichtung, 461  
Schleppleistung, 339  
Schlupf, 585, 592, 597  
Schlupffaktor, 585, 589  
Schmelzen eines Festkörpers, 202  
Schmidt-Zahl, 367  
  turbulent, 395  
Schubspannungen, 330  
Schubspannungsgeschwindigkeit, 375  
Schwächung der Solarstrahlung, 678  
Schwächungskoeffizienten, 681, 682  
Schwallströmung, 581, 582  
Schwankungen, turbulente, 371  
Schwarzer Körper  
  Realisierung des, 644, 645  
  spektrale spezifische Ausstrahlung des, 625, 627, 636  
  spezifische Ausstrahlung des, 646, 649, 650  
Separationsansatz, 154, 162, 184  
Separationsparameter, 184, 185  
Shah, Gleichung von, 550  
Sherwood-Zahl  
  Berechnung des -, 660, 692, 693, 699, 709, 714, 724, 729, 739, 740  
Sichtfaktor, 692–696, 702  
Siedekennlinie, 566–570  
Siedekrise, 600, 601  
Sieden, stilles, 553  
  unterkühltes, 586, 603  
  von Gemischen, 604  
Siedezustände, kritische, 600  
Singularitätenverfahren, 154  
Smoggefahr, 461  
Solarenergietechnik, 675  
Solarkonstante, 653, 676, 677  
Solarstrahlung, 617, 637, 638, 654, 661  
  am Erdboden, 675, 680, 684, 685, 688  
  diffuse, 659  
  direkte, 679, 680, 682, 685, 687, 688, 690  
  extraterrestrische, 653, 654, 675, 676, 678, 685  
  Sommerzeit, 677, 678, 687  
Sonnen-Polarwinkel, 677  
Sonnenzeit, 678  
Spannungen, Reynoldssche, 373, 375  
Spannungskomponenten, 329  
Spannungstensor, 328, 330  
Spannungsvektor, 327  
Spektrale spezifische Ausstrahlung des  
  Schwarzer Körper, 623  
Spektrale Strahldichte der, 642–644, 725  
Spektraler, 629, 642, 655, 658, 660, 661  
Spektrum elektromagnetischer Wellen, 618  
Sphärische Koordinaten, 622  
Sphärizität, 447  
Sprühkühlung, 601  
Sprühströmung, 554, 580–582, 586, 596  
Spritzerströmung, 591  
Stabilität beim Sieden, 567  
Stabilitätsbedingung, 222–224, 228  
Stanton-Zahl, 392  
Stefan-Problem, 203, 207, 210  
Stefan-Zahl, 205  
Steradian, 622  
Stoffübergang  
  an der Katalysatoroberfl., 286  
Stoffausdehnungskoeffizient, 475  
Stoffaustausch durch Rektifikation, 538  
Stoffwerte, temperaturabhängige, 121, 122, 125  
Stokesscher Ansatz, 336  
Stokessches Gesetz, 449  
Strömung  
  Freie, 459  
  reibungsfreie, 314  
  Turbulente, 374, 391  
Strömung, adiabate, 483  
  zweiphasige, 566  
Strömungen  
  Reibungsfreie, 356  
  Schleichende, 355  
Strömungsdampfgehalt, 530, 531, 555, 584, 585  
  volumetrischer, 584, 585  
Strömungsform-Diagramm, 529  
Strömungsformen, 554, 579–584, 589, 596  
Strömungsgrenzschicht, 357, 358  
Strömungskarte, 582, 583  
Strömungssieden, 551, 554, 555  
  im senkrechten Rohr, 600  
  im waagrechten Rohr, 600  
Strahldichte, 621, 623–625

- der extraterrestrischen Solarstrahlung, 676, 677, 687
  - spektrale, 618, 620, 621, 623–625
  - Strahlengang bei spiegelnder Reflexion, 719
  - Strahler, diffuser, 644, 659, 719, 720
    - grauer, 659, 661, 662, 741, 743
  - Strahlung des Schwarzen Körpers
    - durchgelassene, 669, 671
    - von Ruß, 741
  - Strahlungsaustausch, 617, 619, 688, 692
    - Ersatzschaltbild für den, 708
    - Hohlraum, 641, 642
    - im Hohlraum, 706
    - in Feuerungen, 617, 741
    - zwischen grauen Lambert-Strahlern, 703
    - zwischen Schwarzen Körpern, 692, 699
  - Strahlungsaustauschzahl, 708, 710, 711
  - Strahlungsempfänger, 693, 701, 702, 706
  - Strahlungsfluss, 620–622, 624, 625, 627, 628, 630, 632
    - absorbierter Teil des, 635
  - Strahlungsgleichgewicht, 701
  - Strahlungskonstanten, 646
  - Strahlungsleistung, 653
  - Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe, 185
  - Systeme, ruhende, 242, 272
- T**
- Tafel der Korrespondenzen, 165, 167
  - Temperatur
    - transformierte, 132
  - Temperaturänderungen im Wärme-übertrager
    - periodische, 178
  - Temperaturanstieg durch Dissipation, 440, 446
  - Temperaturdifferenz, 2
  - Temperaturfeld, 3, 179, 181
    - Differentialgleichung für das, 121
    - nach einer 'Wärmeexplosion, 217
    - stationäres, 121, 125
    - um eine linienförmige Wärmequelle, 184, 217
  - Temperaturfelder, ähnliche, 132
    - ebene und räumliche, 136
  - Temperaturgradient, 3
  - Temperaturgrenzschicht, 316, 361, 386
  - Temperaturleitfähigkeit, 168, 181, 199, 239
  - Temperaturprofil ebene Wand, 6
  - Temperaturprofile an der Wand
    - in kompressiblen Strömung, 484, 487
  - Temperaturschwingung, 178, 181
    - Eindringtiefe der, 181
    - in Verbrennungsmotoren, 178
    - jahreszeitliche, 178
    - tägliche, 178
  - Temperaturstrahlung, 618, 619, 623
  - Temperaturverlauf
    - an der Grenze zweier Körper, 129
    - in einem Stab, 141, 144, 253
    - in Rippen und Nadeln, 145
  - Temperaturverteilung beim Erwärmen oder Abkühlen der Platte, 187
  - Temperaturverteilung beim Erwärmen oder Abkühlen einer Platte, 194
    - im Stab, 140
    - im unendlich langen Zylinder, 190
    - in der Kugel, 192
    - um eine linienförmige Wärmequelle, 184, 217
    - um eine punktförmige Wärmequelle, 216
  - Temperaturwellen im halbenendlichen Körper, 180
  - Thomsonsche Gleichung, 557
  - Totalkondensation, örtliche, 540, 543
  - Trägheitskräfte, 463
  - Transmissionsgrad
    - der Atmosphäre, 678, 680–683
    - von Glas, 670, 671, 673
  - Transport, diffuser, 504
    - konvektiver, 504
  - Treibhauseffekt, 670
  - Tridiagonalsystem, 231, 232
  - Tropfenkondensation, 504, 505, 533
    - Theorien der, 535
  - Tropfenströmung, 591
  - Turbulente, 523–525, 529, 592, 594
  - Turbulenzmodelle, 371
- U**
- Übergang zwischen laminarer und turbulenter Kondensation
    - Strömung, 395, 524
  - Überhitzung des Dampfes, 514, 515, 528
  - Überlagerung von freier und erzwungener Strömung
    - von Wärmequellen und -senken, 154
  - Umkehrformel, 165, 166



- Umwegfaktor, 291, 292  
Unterkühlung des Kondensats, 514, 515  
Unterschicht, laminaren, 392  
UV-Strahlung, 683
- V**
- Verdampfer  
  Arbeitspunkte eines, 569  
  Kennlinie eines, 569  
Verfahren von, 595  
Verschiebungsgesetz, 648  
Verzerrungstensor, 332, 334  
Viskosität  
  dynamische, 336  
  turbulente, 373  
Volumenkräfte, 326  
Von Kirchhoff, 641, 654, 657, 722  
Von Mehrstoffgemischen, 364  
Von Metallen, 668  
Von Stefan-Boltzmann, 654  
Von Strahlung, 722, 723, 741, 743
- W**
- Wärme- bzw. Stoffaustausch, 424  
Wärme- und Stoffübertragung  
  in binären Gemischen, 475  
Wärmeübergang  
  an überströmten Körpern, 405  
  an senkrechten Wand bei laminarer  
    Strömung, 466  
  bei freier Strömung, 471  
  beim Blasensieden, 574, 596  
  beim Kondensieren, 504  
  beim Sieden, 559, 579  
  in durchströmten Kanälen, 456  
  in zweiphasigen Strömungen, 586, 595  
Wärmeübergangsbedingung, 130–132  
  beim Differenzenverfahren, 220, 229  
Wärmeübergangskoeffizient  
  beim Sieden, 571, 576, 578, 597  
Wärmeübergangskoeffizienten, 248  
Wärmeübertragung  
  an porösen Körper in einem zylindrischen  
    Kanal, 439  
  in durchströmten Kanälen, 439  
Wärmeeindringkoeffizient, 174, 175  
Wärmeexplosion, 217  
Wärmefluss, linearer, 126  
  mehrdimensionaler, 154  
Wärmeleitfähigkeit  
  temperaturabhängige, 121  
Wärmeleitung  
  in Längsrichtung eines Stabes, 140  
  instationäre, 161  
  mit Wärmequellen, 127  
  stationäre, 121  
  zwischen konzentrischen Kreisen, 154  
Wärmeleitungsgleichung, 161–163  
  bei temperaturabhängigen Stoffwerten, 132  
  in Kugelkoordinaten, 137  
  in Zylinderkoordinaten, 126  
Wärmeleitwiderstand, 135, 157–159  
Wärmequellen, 121, 125–127  
  homogene, 165  
  linienförmige, 154  
Wärmestrahlung, 600  
  Aussenden von, 620  
Wärmestromdichte, 345  
  Grenzwert für die kritische, 601, 602  
  maximale, 567, 577  
  turbulenten, 373  
Waagrechter, 473  
Wandüberhitzung, ideale, 609  
Wandbindung, 382  
Wandbindungsgleichung, 397  
Wandgesetz der turbulenten Strömung, 376  
Welle, elektromagnetische, 617, 618  
Wellenlänge, 179  
Wellenströmung, 581, 582  
Widerstand, 123  
Widerstandsbeiwert, 383, 389, 425, 433  
Widerstandsgerade, 569, 570  
Widerstandskraft, 448  
Windungsfaktor, 291  
Wirbeln, 371  
Wirbelschichten, 426, 445, 459  
Wirkungsgrad eines Wärmeübertragers  
  von Kreisrippen, 152, 301  
  von Rippen, 136  
  von Scheibenrippen, 153
- Z**
- Zeit, dimensionslose, 133  
  mitteleuropäische, 678  
Zenitwinkel, 621, 622

Zonen-Methode, [741](#)

Zusammenstellung von -en, [639](#)

Zwangskonvektion, [553](#), [560](#), [600](#)

Zweiphasenströmung, [579](#), [581](#), [584](#), [591](#), [595](#)

Zweischichtenmodell, [393](#)

Zylinder, [396](#), [398](#), [407](#)