

A Das Boltzmannsche Superpositionsprinzip

Das Boltzmannsche Superpositionsprinzip (oder: Superpositionsgesetz) hat zahlreiche Anwendungen in der Mechanik. Eine allgemeine Formulierung dazu lautet wie folgt, siehe z.B. [36]:

Das Boltzmannsche Superpositionsprinzip

Die gesamte Wirkung einer Summe von Ursachen ist gleich der Summe der Wirkungen jeder Einzelursache.

Ludwig Eduard Boltzmann
(1844 - 1906)



(A.1)

Bildquelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann, 9.11.2014

Im Folgenden wollen wir anhand von zwei Definitionen für die Dehnungen die Gültigkeit und die Ungültigkeit des Boltzmannschen Superpositionsprinzips veranschaulichen.

Abb. A.1 zeigt einen homogenen Zug/Druck-Stab mit zwei Lastfällen. Der erste Lastfall besteht aus einer Kraft F_1 gefolgt von einer Kraft F_2 . Der zweite Lastfall besteht aus einer

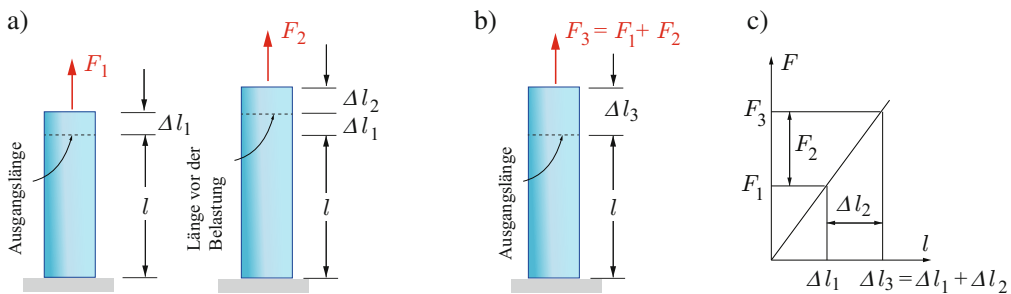


Abb. A.1. Homogener Zug/Druck-Stab mit zwei Lastfällen: a) Kraft F_1 gefolgt von Kraft F_2 , b) Kraft F_3 , c) Kraft-Verschiebungsdiagramm

Kraft F_3 . Wir setzen stets lineares Verhalten im Kraft-Verschiebungsdiagramm in [Abb. A.1.c](#) voraus. Damit gilt für die Kräfte und Längenänderungen folgender Zusammenhang:

$$1. F_3 = F_1 + F_2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2. \Delta l_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2. \quad (\text{A.2})$$

Für die zugehörigen Dehnungen nach Definition (2.10) folgt unter Verwendung von Gl.(A.2.2)

$$1. \varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l}, \quad 2. \varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l} \quad \Longrightarrow \quad 3. \varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{l} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (\text{A.3})$$

Das Ergebnis Gl.(A.3.3) besagt, dass die gesamte Dehnung ε_3 gerade durch Addition der Einzeldehnungen ε_1 und ε_2 erhalten wird. Damit erfüllen nach Definition (2.10) berechnete Dehnungen das Superpositionsprinzip (A.1).

Mit den Bezeichnungen in [Abb. A.1](#) führen wir anstatt Definition (2.10) zur technischen Dehnung die folgende Definition ein:

$$\text{Dehnung} = \frac{\text{Längenänderung}}{\text{Länge vor der Belastung}} = \tilde{\varepsilon}. \quad (\text{A.4})$$

Für die drei Lastfälle in [Abb. A.1](#) mit den Kräften F_1 , F_2 und F_3 gilt somit:

$$1. \tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\Delta l_1}{l}, \quad 2. \tilde{\varepsilon}_2 = \frac{\Delta l_2}{l + \Delta l_1} \quad \Longrightarrow \quad 3. \tilde{\varepsilon}_3 = \frac{\Delta l_3}{l} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l} \neq \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2. \quad (\text{A.5})$$

Die gesamte Dehnung $\tilde{\varepsilon}_3$ kann also nicht durch Addition der Einzeldehnungen $\tilde{\varepsilon}_1$ und $\tilde{\varepsilon}_2$ erhalten werden. Damit erfüllen nach Definition (A.4) berechnete Dehnungen nicht das Superpositionsprinzip (A.1).

In diesem Buch wird vielfach von dem Boltzmannschen Superpositionsprinzip Gebrauch gemacht, z.B. in den folgenden Fällen:

- Die Überlagerung von elastischer und thermischer Dehnung für das Stoffgesetz in Abschnitt 2.1.4 und Abschnitt 2.2.5.
- Die gerade Balkenbiegung mit Normalkraft in Abschnitt 4.2.8.
- Das Kraftgrößenverfahren für statisch unbestimmte Stabsysteme in den Abschnitten 2.3, 4.5 und 8.4.4.
- Die schiefe Biegung mit Normalkraft in Abschnitt 4.3.
- Das Weggrößenverfahren für statisch unbestimmte Balkensysteme in Abschnitt 4.7.
- Die Überlagerung von elastischen, thermischen und chemischen Verzerrungen für das verallgemeinerte Hookesche Gesetz in Abschnitt 5.3.6.
- Die Gesamtarbeit in Abschnitt 8.2.
- Die Gesamtverschiebung für den schubweichen Biegebalken nach Tymoschenko in Abschnitt 6.5.
- Die kombinierte Beanspruchung von Stabsystemen in Abschnitt 7.6.

B Lineare Näherungen von nichtlinearen Funktionen

Eindimensionale Funktion: Abb. B.1.a zeigt eine nichtlineare Funktion $f(x)$ in Abhängigkeit einer Variablen x . An der Stelle x legen wir eine Tangente an die Funktion, deren Steigung gleich der Ableitung $f'(x) = df/dx$ ist. Damit lässt sich der Funktionswert $f(x + dx)$ an der Stelle $x + dx$ in drei Anteile zerlegen:

$$f(x + dx) = f(x) + df + r(x). \tag{B.1}$$

Gl.(B.1) ist die *Taylor-Reihe* mit dem Restterm $r(x)$, welcher für lineare Funktionen $f(x)$ zu Null wird, siehe z.B. [4]. Lassen wir dx gegen Null laufen, dann ist $r(x)$ „klein von höherer Ordnung“ und kann daher für nichtlineare Funktionen vernachlässigt werden. Wir können Gl.(B.1) also durch einen *linearen* Term annähern

$$f(x + dx) \approx \tilde{f}(x + dx) = f(x) + f'(x)dx = f(x) + df. \tag{B.2}$$

Wir bezeichnen $\tilde{f}(x + dx)$ als: *Lineare Näherung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x + dx$.*

Zweidimensionale Funktion: Abb. B.1.b zeigt eine nichtlineare Funktion $f(x, y)$ in Abhängigkeit von zwei Variablen x und y . An der Stelle x, y legen wir wie dargestellt zwei Tangenten an die Funktion, deren Steigungen gleich den partiellen Ableitungen $f_{,x} = \partial f / \partial x$, $f_{,y} = \partial f / \partial y$ sind. Analog zum eindimensionalen Fall in Gl.(B.1) kann der Funktionswert $f(x + dx, y + dy)$ an der Stelle $x + dx, y + dy$ durch eine Taylor-Reihe mit einem Restterm dargestellt werden. Lassen wir dx und dy gegen Null laufen, dann ist der Restterm „klein von höherer Ordnung“ und kann wie in Gl.(B.2) vernachlässigt werden. Die lineare Näherung der Funktion $f(x + dx, y + dy)$ (Abbruch der Taylor-Reihe nach den linearen Termen) lautet

$$\tilde{f}(x + dx, y + dy) = f(x, y) + f_{,x} dx + f_{,y} dy. \tag{B.3}$$

Dreidimensionale Funktion: Für eine von drei Variablen abhängige Funktion $f(x, y, z)$ lautet die lineare Näherung (ebenso durch Abbruch der Taylor-Reihe nach den linearen Termen)

$$\tilde{f}(x + dx, y + dy, z + dz) = f(x, y, z) + f_{,x} dx + f_{,y} dy + f_{,z} dz. \tag{B.4}$$

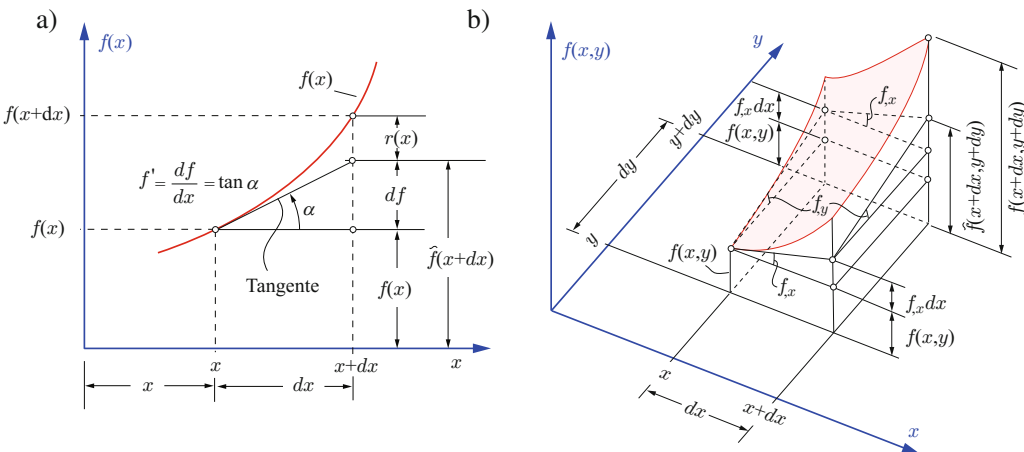


Abb. B.1. Lineare Näherung einer nichtlinearen a) Funktion $f(x)$, b) Funktion $f(x, y)$

C Unbestimmte Integrale, siehe z.B. [4]

1. $\int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right),$ wobei $X = a^2 - x^2$
2. $\int x^2 \sqrt{X} dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8} \left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right),$ wobei $X = a^2 - x^2$
3. $\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$
4. $\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$
5. $\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax$
6. $\int \frac{1}{X} dx = \frac{1}{a} \ln X,$ wobei $X = ax + b$
7. $\int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1}, n \neq -1,$ wobei $X = ax + b$
8. $\int \frac{x}{X} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X,$ wobei $X = ax + b$
9. $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2}X^2 - 2bX + b^2 \ln X \right),$ wobei $X = ax + b$
10. $\int \ln x dx = x \ln x - x$
11. $\int \exp(ax) dx = \frac{1}{a} \exp(ax)$ (C.1)
12. $\int x \exp(ax) dx = \frac{\exp(ax)}{a^2} (ax - 1)$
13. $\int x^2 \exp(ax) dx = \exp(ax) \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$
14. $\int x^3 \exp(ax) dx = \frac{1}{a} x^3 \exp(ax) - \frac{3}{a} \exp(ax) \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$
15. $\int x^n \exp(ax) dx = \frac{1}{a} x^n \exp(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \exp(ax) dx$

D Trigonometrische Beziehungen, siehe z.B. [4]

1. $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$
2. $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$
3. $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$
4. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
5. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
6. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ (D.1)
7. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$
8. $\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$
9. $\tan \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}$

E Beweise zu zwei virtuellen Arbeitsprinzipien im dreidimensionalen Fall

E.1 Grundlagen

Dieser Abschnitt behandelt die Beweise zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V) (8.107) und zum Prinzip der virtuellen Kräfte (P.d.v.K) (8.109). Dazu betrachten wir in **Abb. E.1** einen beliebigen Körper. Die Belastung besteht aus Flächenkräften $\bar{\mathbf{q}}(x, y, z) = [\bar{q}_i(x, y, z), i = x, y, z]$ auf dem Rand A_q und Volumenkräften $\mathbf{f}(x, y, z) = [f_i(x, y, z), i = x, y, z]$ im Inneren. Auf dem Rand A_u sind Verschiebungen (z.B. Stützensenkungen) $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z) = [\bar{u}_i(x, y, z), i = x, y, z]$ vorgegeben. Die nachfolgenden Rechenschritte werden mit einer Indexdarstellung durchgeführt. Dabei gilt folgende Einsteinsche Summenkonvention (nach *Albert Einstein, 1879 - 1955*): Für einen Index, der zweimal auftritt, wird über die Koordinaten x, y, z summiert. Damit kann man z.B. folgende Summendarstellung abkürzen:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{j=x,y,z} a_j b_j = a_j b_j. \quad (\text{E.1})$$

Eine partielle Ableitung nach den Koordinaten x, y, z wird mit einem Komma bezeichnet:

$$(\cdot)_{,j} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial j}, \quad j = x, y, z. \quad (\text{E.2})$$

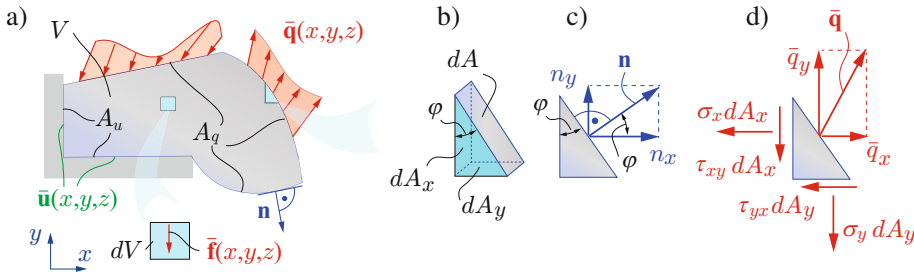


Abb. E.1. a) Körper mit Belastungen \mathbf{f} im Inneren und $\bar{\mathbf{q}}$ auf dem Rand, b) Geometrie eines Keildifferentials, c) Normalenvektor am Keildifferential, d) innere und äußere Kräfte am Keildifferential

E.2 Die statische Randbedingung

Bevor wir auf die Beweise zum P.d.v.V. und zum P.d.v.K. eingehen, soll eine statische Randbedingung in allgemeiner Darstellung hergeleitet werden. Wir untersuchen dazu zunächst in **Abb. E.1.b** ein freigeschnittenes Keildifferential im ebenen Spannungszustand, dessen eine Schnittfläche der Größe dA Teil des Randes A_q ist. \bar{q}_x und \bar{q}_y in **Abb. E.1.d** sind die Koeffizienten des Flächenkraftvektors $\bar{\mathbf{q}}$. Die Neigung der Fläche ist durch den Winkel φ festgelegt. Damit gelten folgende Beziehungen für die Koeffizienten des Einheitsnormalenvektors \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$ und die zur x - und y -Achse senkrecht stehenden Flächen in **Abb. E.1.c**:

$$n_x = \cos \varphi, \quad n_y = \sin \varphi, \quad dA_x = dA \cos \varphi = dA n_x, \quad dA_y = dA \sin \varphi = dA n_y. \quad (\text{E.3})$$

Multipliziert man alle an dem Keil auftretenden Spannungen mit den zugehörigen Flächen, dann ergeben sich die in **Abb. E.1.d** angreifenden Kräfte. Aus Gleichgewicht am Keildifferential folgt:

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow: \quad \bar{q}_x dA - \sigma_x dA_x - \tau_{yx} dA_y = 0 \\ \uparrow: \quad \bar{q}_y dA - \tau_{xy} dA_x - \sigma_y dA_y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{q}_x &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y \\ \bar{q}_y &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{q}_i = \sum_{j=x,y} \sigma_{ij} n_j, \quad i = x, y. \quad (\text{E.4})$$

Der erste Teil der Gleichungen (E.4) stellt die Gleichgewichtsbedingungen in x - und in y -Richtung dar. Nach Teilen dieser Gleichungen durch die Fläche dA erhalten mit Hilfe von Gl.(E.3) den zweiten Teil der Gleichungen (E.4), wobei wir gemäß Gl.(5.9) noch die Notationen für die Spannungen ausgetauscht haben. Damit wird die statische Randbedingung im dritten Teil der Gleichungen (E.4) als Summendarstellung erhalten. Das Ergebnis kann durch Gleichgewicht an einem Tetraederdifferential auf den dreidimensionalen Fall erweitert werden. Mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention (E.1) lautet dann

$$\text{Die statische Randbedingung:} \quad \bar{q}_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i = x, y, z \quad \text{auf } A_q. \quad (\text{E.5})$$

E.3 Beweis zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.)

Ausgangspunkt ist die *statische Zulässigkeit* der äußeren Belastung, d.h. im Inneren erfüllen die Volumenkräfte \mathbf{f} und die Spannungen σ_{ij} die statische Feldgleichung (Gleichgewichtsbedingung) (5.16), und auf dem Rand erfüllen die Randkräfte $\bar{\mathbf{q}}$ und die Spannungen σ_{ij} die statische Randbedingung (Gleichgewichtsbedingung) (E.5):

$$1. \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{in } V, \quad 2. \sigma_{ij}n_j = \bar{q}_i \quad \text{auf } A_q. \quad (\text{E.6})$$

Zusätzlich werden virtuelle Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ eingeführt. Wir verlangen, dass sie *kinematisch zulässig* sind, d.h. im Inneren erfüllen die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ und die virtuellen Verzerrungen $\delta\varepsilon_{ij}$ die kinematische Feldgleichung (Verträglichkeitsbedingung) (5.34), und auf dem Rand erfüllen die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ die kinematische Randbedingung:

$$1. \delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad \text{in } V, \quad 2. \delta u_i = 0_i \quad \text{auf } A_u. \quad (\text{E.7})$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Kettenregel} & \quad (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij,j}\delta u_i + \sigma_{ij}u_{i,j} \\ 2. \text{ Symmetrie der realen Spannungen} & \quad \sigma_{ij}\delta u_{i,j} = \sigma_{ij}\delta u_{j,i} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \\ 3. \text{ Gaussscher Integralsatz} & \quad \int_{(V)} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} dV = \int_{(A)} \sigma_{ij}\delta u_i n_j dA. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Multiplikation der statischen Feldgleichung (E.6.1) mit einer virtuellen Verschiebung δu_i und Integration über das Gesamtvolumen liefert:

$$\int_{(V)} \sigma_{ij,j}\delta u_i dV + \int_{(V)} f_i\delta u_i dV = 0. \quad (\text{E.9})$$

Durch Umformen des linken Terms in (E.9) folgt mit den Rechenregeln (E.8), der statischen Randbedingung (E.6.2) und der kinematischen Randbedingung (E.7.2)

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \sigma_{ij,j}\delta u_i dV &= \int_{(V)} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} dV - \int_{(V)} \sigma_{ij}\delta u_{i,j} dV \\ &= \int_{(A)} \sigma_{ij}\delta u_i n_j dA - \int_{(V)} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV \\ &= \int_{(A_q)} \underbrace{\sigma_{ij}n_j}_{\bar{q}_i} \delta u_i dA - \int_{(A_u)} \underbrace{\sigma_{ij}}_0 \delta u_i n_j dA - \int_{(V)} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Nach Einsetzen dieses Ergebnisses in Gl.(E.9) und Umformen erhält man

$$\underbrace{\int_{(A)} \bar{q}_i \delta u_i dA_q + \int_{(V)} f_i \delta u_i dV}_{\delta W} = \underbrace{\int_{(V)} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV}_{\delta U} \implies \delta W = \delta U. \quad (\text{E.11})$$

Damit ist das P.d.v.V. (8.107) bewiesen. Man kann einen Beweis auch in umgekehrter Richtung, ausgehend von der Gleichung $\delta W = \delta U$, durchführen. Die Aussage lautet dann: *Ist die virtuelle äußere Arbeit gleich der virtuellen Formänderungsenergie eines Körper, dann ist die äußere Belastung statisch zulässig (d.h. der Körper ist im Gleichgewicht).* Damit gilt:

Das P.d.v.V. (8.107) ist notwendig und hinreichend für statische Zulässigkeit der äußeren und inneren Kräfte. Mit anderen Worten: Der Körper ist im Gleichgewicht.

Bemerkung: Da das P.d.v.V. für beliebige virtuelle Verschiebungen gilt, können wir den obigen Beweis auch auf den Arbeitssatz der Elastostatik (8.37.1) in differentieller Form übertragen. Dazu sind lediglich $\delta\mathbf{u}$ und $\delta\varepsilon_{ij}$ durch $d\mathbf{u}$ und $d\varepsilon_{ij}$ zu ersetzen.

E.4 Beweis zum Prinzip der virtuellen Kräfte (P.d.v.K.)

Ausgangspunkt ist die *kinematische Zulässigkeit* des Verschiebungsfeldes, d.h. im Inneren erfüllen die Verschiebungen \mathbf{u} und die Verzerrungen ε_{ij} die kinematische Feldgleichung (Verträglichkeitsbedingung) (5.34), und auf dem Rand erfüllen die Verschiebungen \mathbf{u} die kinematische Randbedingung:

$$1. \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ in } V, \quad 2. u_i = \bar{u}_i \text{ auf } A_u. \quad (\text{E.12})$$

Zusätzlich werden virtuelle Kräfte $\delta \mathbf{f}$, $\delta \bar{\mathbf{q}}$ eingeführt. Wir verlangen, dass sie *statisch zulässig* sind, d.h. im Inneren erfüllen die virtuellen Volumenkräfte $\delta \mathbf{f}$ und die virtuellen Spannungen $\delta \sigma_{ij}$ die statische Feldgleichung (Gleichgewichtsbedingung) (5.16), und auf dem Rand erfüllen die virtuellen Randkräfte $\delta \bar{\mathbf{q}}$ und die virtuellen Spannungen $\delta \sigma_{ij}$ die statische Randbedingung (Gleichgewichtsbedingung) (E.5):

$$1. \delta \sigma_{ij,j} + \delta f_i = 0 \text{ in } V, \quad 2. \delta \sigma_{ij} n_j = \delta \bar{q}_i \text{ auf } A_q. \quad (\text{E.13})$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

1. Kettenregel	$(\delta \sigma_{ij} u_i)_{,j} = \delta \sigma_{ij,j} u_i + \delta \sigma_{ij} u_{i,j}$	
2. Symmetrie der virtuellen Spannungen	$\delta \sigma_{ij} u_{i,j} = \delta \sigma_{ij} u_{j,i} = \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$	(E.14)
3. Gaussscher Integralsatz	$\int_{(V)} (\delta \sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_{(A)} \delta \sigma_{ij} u_i n_j dA.$	

Multiplikation der kinematischen Feldgleichung (E.12.1) mit einer virtuellen Spannung $\delta \sigma_{ij}$ und Integration über das Gesamtvolumen liefert:

$$\int_{(V)} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dV. \quad (\text{E.15})$$

Durch Umformen des zweiten Terms in (E.15) folgt mit den Rechenregeln (E.14), der kinematischen Randbedingung (E.12.2) und der statischen Randbedingung (E.13.2)

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dV &= \int_{(V)} \delta \sigma_{ij} u_{i,j} dV \\ &= \int_{(V)} (\delta \sigma_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_{(V)} \delta \sigma_{ij,j} u_i dV \\ &= \int_{(A)} (\delta \sigma_{ij} u_i n_j dA + \int_{(V)} \delta f_i u_i dV \\ &= \int_{(A_q)} \underbrace{\delta \sigma_{ij} n_j}_{\delta \bar{q}_i} u_i dA + \int_{(A_u)} \delta \sigma_{ij} \underbrace{u_i}_{\bar{u}_i} n_j dA + \int_{(V)} \delta f_i u_i dV. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Nach Einsetzen dieses Ergebnisses in Gl.(E.15) und Umformen erhält man

$$\underbrace{\int_{(A_q)} \delta \bar{q}_i u_i dA_q + \int_{(A_u)} \delta \sigma_{ij} \bar{u}_i n_j dA + \int_{(V)} \delta f_i u_i dV}_{\delta W^*} = \underbrace{\int_{(V)} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV}_{\delta U^*} \implies \delta W^* = \delta U^*. \quad (\text{E.17})$$

Damit ist das P.d.v.K. (8.109) bewiesen. Man kann einen Beweis auch in umgekehrter Richtung, ausgehend von der Gleichung $\delta W^* = \delta U^*$, durchführen. Die Aussage lautet dann: *Ist die komplementäre virtuelle äußere Arbeit gleich der komplementären virtuellen Formänderungsenergie eines Körper, dann ist die Verschiebung kinematisch zulässig.* Damit gilt:

Das P.d.v.K. (8.109) ist notwendig und hinreichend für kinematische Zulässigkeit der Verschiebungen und Verzerrungen. Mit anderen Worten: Die Verformungen des Körpers sind kompatibel (keine Sprünge, Risse etc.).

Bemerkung: Da das P.d.v.K. für beliebige virtuelle Kräfte gilt, können wir den obigen Beweis auch auf den Arbeitssatz der Elastostatik (8.37.2) in differentieller Form übertragen. Dazu sind lediglich $\delta \mathbf{f}$, $\delta \bar{\mathbf{q}}$, $\delta \sigma_{ij}$ durch $d\mathbf{f}$, $d\bar{\mathbf{q}}$, $d\sigma_{ij}$ zu ersetzen.

F Das Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabsysteme

Wir untersuchen das Tragwerk in Abb. 8.49 mit der thermo-mechanischen Belastung $(F_k, \Delta T)$. Zusätzlich greift an dem Ort j eine virtuelle Kraft δF_j an. Ausgehend von der allgemeinen Darstellung (8.109) lautet das Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabsysteme:

$$\delta W^* = \delta U^*: \quad f_{jk} \delta F_j = \int_{(l)} \int_{(A)} (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz}) dA dx. \quad (\text{F.1})$$

Im Unterschied zu Gl.(8.110) haben wir die Volumenintegration in eine Integration über die Querschnittsfläche A und eine Integration über die Balkenlänge l aufgeteilt. Auf der linken Seite von Gl. (F.1) leistet die virtuelle Kraft δF_j eine virtuelle Arbeit auf dem Weg der realen Verschiebung f_{jk} . Auf der rechten Seite von Gl. (F.1) leisten die virtuellen Spannungen $\delta \sigma_x$, $\delta \tau_{xy}$, $\delta \tau_{xz}$ virtuelle Arbeiten auf den realen Verzerrungen ε_x , γ_{xy} , γ_{xz} infolge der thermo-mechanischen Belastung $(F_k, \Delta T)$. Für linear-elastisches, thermisches Verhalten folgt nach Einsetzen von Gl.(4.65.1) in Gl.(5.67.1) mit $\sigma_y = \sigma_z = 0$ sowie $\Delta C = 0$ für die Verzerrung ε_x :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{el} + \varepsilon_T = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha_T T_m + \alpha_T T_l z, \quad (\text{F.2})$$

wobei T_m und T_l in den Gleichungen (4.65.2-3) angegeben sind.

Bei der Auswertung von Gl.(F.1) kann man analog zur Auswertung der komplementären Formänderungsenergien eines Stabes in Gl.(8.45) vorgehen. Dazu werden die verschiedenen Belastungen des Stabes getrennt behandelt. Für den Biegebalken mit Normalkraft verwenden wir die folgenden Beziehungen:

$$1. \delta \sigma_x = \frac{\delta N_j(x)}{A} + \frac{\delta M_y(x)}{I_y} z, \quad 2. \varepsilon_x = \frac{N(x) + N_{\Delta T}(x)}{EA} + \frac{M_y(x) + M_{\Delta T,y}(x)}{EI} z. \quad (\text{F.3})$$

Gl.(F.3.1) für die Normalspannung $\delta \sigma_x$ infolge der virtuellen Kraft δF_j folgt aus Gl.(4.70.1). Gl.(F.3.2) folgt durch Einsetzen der Beziehungen (4.70.2-3) in die kinematische Beziehung $\varepsilon_x = u' - zw''$ aus Gl.(4.66.3). Analog zur Herleitung von Gl.(8.47) erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (F.3) in Gl.(F.1):

$$\begin{aligned} f_{jk} \delta F &= \int_{(l)} \int_{(A)} \delta \sigma_x \varepsilon_x dA dx = \int_{(l)} \frac{1}{E} \left[\frac{\delta N(x)(N(x) + N_{\Delta T}(x))}{A^2} \int_{(A)} dA \right. \\ &+ \int_{(l)} \frac{\delta M_y(x)(M_y(x) + M_{\Delta T,y}(x))}{I_y^2} \int_{(A)} z^2 dA \\ &+ \left. \frac{(\delta N(x)(M(x) + M_{\Delta T,y}(x)) + (\delta M_y(x)(N(x) + N_{\Delta T}(x)))}{AI_y} \int_{(A)} z dA \right] \\ &= \int_{(l)} \left[\frac{\delta N(x)(N(x) + N_{\Delta T}(x))}{EA} + \frac{\delta M_y(x)(M_y(x) + M_{\Delta T,y}(x))}{EI_y} \right] dx. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Zusätzlich wird Gl.(F.1) für Torsion, Querkraftschub und Federanteile ausgewertet. Dies geschieht analog zur Herleitung der komplementären Formänderungsenergien für Torsion in Gl.(8.49) und Querkraftschub in Gl.(8.51). Zusammenfassend erhält man das Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabtragwerke in Gl.(8.111).

G Die Methode der Hilfskräfte für thermo-mechanische Belastung

Das Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabtragwerke in Gl.(8.111) gilt für beliebige Kräfte δF_j mit statisch zulässigen Schnittgrößen δN , δM_y , δM_T , δQ_z , δF_f , δM_f . Da die virtuelle Belastung nach Definition (8.104.8) beliebig ist, können wir als virtuelle Kraft δF_j die Hilfskraft \bar{F}_j als Belastung wählen. Dann sind \bar{N} , \bar{M}_y , \bar{M}_T , \bar{Q}_z , \bar{F}_f , \bar{M}_f die zugehörigen Schnittgrößen, die wir Bemerkung 4.10.2 folgend mit einem Querstrich versehen haben. Mit diesen Beziehungen folgt aus dem Prinzip der virtuellen Kräfte für Stabtragwerke (8.111) sofort die Methode der Hilfskräfte für thermo-mechanische Belastungen in Gl.(8.60).

H Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösungen zu Kapitel 2

Lösungen zu Abschnitt 2.1

- 2.1** Seil: $S = G_S \cos \beta / (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = 217,01 \text{ MPa}$, $\Delta l = \frac{Sl}{EA} = 13,91 \text{ mm}$, $\Delta l_{\perp} = \Delta l \tan 30^\circ = 8,03 \text{ mm}$, $f_C = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta l_{\perp}^2} = 16,06 \text{ mm}$, $u = f_C \sin \beta = 5,49 \text{ mm}$, $v = f_C \cos \beta = 15,09 \text{ mm}$
- 2.2** $S_2 = G / (\tan \alpha \cos \beta + \sin \alpha) = 3,54 \text{ N}$, $S_1 = S_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = 7,91 \text{ N}$, $\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA} = 2,5 \text{ mm}$, $\Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{EA} = 1,5 \text{ mm}$, Stab 2 starr: $\Delta l_{1\perp} = \Delta l_1 \tan 26,57^\circ = 1,25 \text{ mm}$, $f_1 = \sqrt{\Delta l_1^2 + \Delta l_{1\perp}^2} = 2,795 \text{ mm}$, $u_1 = v_1 = f_1 / \sqrt{2} = 1,98 \text{ mm}$, Stab 1 starr: $f_2 = 1,68 \text{ mm}$, $u_2 = f_2 \sin 71,57^\circ = 1,591 \text{ mm}$, $v_2 = \cos 71,57^\circ = 0,53 \text{ mm}$, Superposition: $u = u_2 - u_1 = 0,39 \text{ mm}$, $v = v_1 + v_2 = 2,51 \text{ mm}$
- 2.3** $\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,1$, $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_{W_1} = \ln(l + \Delta l_1 / l) = 0,00995$, $\varepsilon_{W_2} = 0,09553$, $\varepsilon_{W_3} = 0,69315$, $e_1 = 0,5\%$, $e_2 = 4,7\%$, $e_3 = 30,7\%$
- 2.4** 1. Stab BC: $B = F \cdot 3,46a / (\sin \alpha \cdot 2a + \cos \alpha \cdot 1,15a) = 359491,29 \text{ N}$, $\alpha = 26,5651^\circ$, $\sigma_N = -99,86 \text{ MPa}$, $S_{\sigma} = 2,353$ 2. $\Delta l = l(-B)/(EA) = -7,97 \text{ mm}$, $\Delta l_{\perp} = \Delta l \tan 33,43^\circ = 5,27 \text{ mm}$, $f_C = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta l_{\perp}^2} = 9,56 \text{ mm}$, $u = f_C \cos 30^\circ = 8,28 \text{ mm}$, $v = f_C \sin 30^\circ = 4,78 \text{ mm}$
- 2.5** $S_1 = S_2 = S = G / (2 \sin 69,44^\circ) = 0,534 \text{ G}$, $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l = \frac{Sl}{EA} = 5,703 \text{ mm}$, $u_1 = u_2 = 0 \text{ mm}$, $\Delta l_{\perp} = \Delta l / (\tan 69,44^\circ) = 2,14 \text{ mm}$, $f = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta l_{\perp}^2} = 6,09 \text{ mm} = v_1 = v_2$
- 2.6** 1. $S_3 = \frac{15}{16} F$, $S_4 = \frac{5}{8} F$, $\Delta l_3 = 2\Delta l_4$, $\sigma_3 = \frac{15F}{16A_3}$, $\Delta l_3 = 15Fl / (16(EA)_3)$ 2. $S_3 = \frac{\Delta s}{2l}(EA)_3$, $S_4 = -\frac{\Delta s}{l}(EA)_4$, $\sigma_3 = \Delta s E_3 / (2l)$, $\Delta l_3 = \frac{\Delta s}{2}$ 3. $S_3 = \frac{3}{8} \alpha_T \Delta T (EA)_3$, $S_4 = -2S_3 = -\frac{3}{4} \alpha_T \Delta T (EA)_4$, $\sigma_3 = \frac{3}{8} \alpha_T \Delta T E_3$, $\Delta l_3 = \frac{3}{8} \alpha_T \Delta T l$
- 2.7** 1. $S = Fl / (4a)$, $\Delta l = Fl^2 / (8EAa)$ 2. $u_B = 2\Delta l$ 3. $v = \Delta l \cdot l / (2h)$
- 2.8** $\Delta l_2 = Nh / ((EA)_2) = amgh / (b(EA)_2)$, $v_m = \frac{a}{b} \Delta l_2 = mga^2 h / ((EA)_2 b^2)$
- 2.9** 1. $N_{Al} = \Delta T (EA)_{Al} (\alpha_{TC} - \alpha_{TAl}) + N_C (EA)_{Al} / ((EA)_C)$, $N_C = (- (EA)_{Al} (\alpha_{TC} - \alpha_{TAl}) + (EA)_M (\alpha_{TC} - \alpha_{TM})) \Delta T / (\frac{(EA)_{Al}}{(EA)_C} + 1 + \frac{(EA)_M}{(EA)_C})$, $N_M = \Delta T (EA)_M (\alpha_{TC} - \alpha_{TM}) + N_C (EA)_M / ((EA)_C)$, $\sigma_{Al} = -50,62 \text{ MPa}$, $\sigma_C = 96,33 \text{ MPa}$, $\sigma_M = -5,13 \text{ MPa}$, 2. $|\sigma_{Al}| = |50,62 \text{ MPa}| < R_{e,Al} / S_{\sigma,Al} = 110 \text{ MPa}$.
- 2.10** 1. $N_1 = -G / 12$, $N_2 = -G / 3$, $N_3 = -7G / 12$ 2. $\Delta l_1 = -Gh / (12EA)$, $\Delta l_2 = -Gh / (3EA)$, $\Delta l_3 = -7Gh / (12EA)$ **2.11** 1. $\Delta l = \alpha_T \Delta T l = 3 \text{ mm}$ 2. $\sigma = -\alpha_T \Delta T E = -18 \text{ MPa}$
- 2.12** 1. $\sigma_0 = F_1 / A_1$, $F_2 = -F_1 = -3000 \text{ N}$, $\delta = -\Delta l_2 = -\frac{F_2 d}{E_2 A_2} = 0,124 \text{ mm}$ 2. $\sigma_1(G) = \sigma_0 - G / (A_1 + E_2 A_2 / E_1)$ 3. $G = \sigma_0 (E_1 A_1 + E_2 A_2) / E_1 = 4200 \text{ N}$
- 2.13** 1. $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l = 2,025 \text{ mm}$, $F_1 = F_3 = \Delta T (\alpha_2 - \alpha_1) / ((E_1 A_1)^{-1} + 2(E_2 A_2)^{-1}) = 18,75 \text{ kN}$, $F_2 = -2F_1 = -37,5 \text{ kN}$, $\sigma_1 = 75 \text{ MPa} = \sigma_3$, $\sigma_2 = -48,875 \text{ MPa}$, 2. $S_B = \min\{S_{\sigma}, S_f\} = \min\{3, 2; 0,987\} = 0,987 < 1$. **2.14** $\varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E} + K (\frac{\sigma}{E})^n = 0,487 \cdot 10^{-3}$
- 2.15** 1. $\Delta l_{Al,r} = -\Delta l_{Al,l} = -\Delta l_{st}$, $F_{Al,l} = \frac{-\Delta T \alpha_{Al} l_r}{\frac{l_r}{EA_{Al} A_r} + \frac{E_{St} A_{St} l_r}{E_{Al} A_l} + \frac{l_r}{EA_{Al}}} = -139,05 \text{ kN}$, $F_{Al,r} = -218,31 \text{ kN}$, $F_{St} = -79,26 \text{ kN}$, $A_r = 50^2 \pi \text{ mm}^2$, $A_{St} = 20^2 \pi \text{ mm}^2$, $A_l = A_r - A_{St}$, $l_r = 15 \text{ mm}$, $l_l = 40 \text{ mm}$, 2. $\sigma_{Al,l} = -21,1 \text{ MPa}$, $\sigma_{Al,r} = -27,8 \text{ MPa}$, $\sigma_{St} = -63,1 \text{ MPa}$
- 2.16** $\Delta l_{St} = -\frac{3}{5} \Delta l_{Al}$, $\Delta l_{Al} = \frac{F_{Al}}{EA_{Al}} (\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2})$, $F_{Al} = -2,83 \text{ kN}$, $F_{St} = -4,72 \text{ kN}$, $\sigma_{Al,1} = -14,15 \text{ MPa}$, $\sigma_{Al,2} = -7,08 \text{ MPa}$, $\sigma_{St} = -47,2 \text{ MPa}$
- 2.17** $F_{Cu} = 2F_{Al} = 2F_{St}$, $F_{St} = \frac{-\Delta T \alpha_{St} (l_1 + l_2)}{\frac{A_3}{E_{Cu} A_1} + \frac{1}{EA_{Al}} (\frac{l_2}{A_1} + \frac{l_1}{A_2}) + \frac{l_1 + l_2}{E_{St} A_1}} = -65,74 \text{ kN}$, $F_{Cu} = -131,48 \text{ kN}$, $\Delta l_{ges} = (\Delta l_{Al} + \Delta l_{St} / 2) + \Delta l_{Cu} = 0$, $\sigma_{Al,1} = -65,74 \text{ MPa}$, $\sigma_{Al,2} = -32,87 \text{ MPa}$, $\sigma_{Cu} = -131,48 \text{ MPa}$, $\sigma_{St} = -65,74 \text{ MPa}$
- 2.18** 1. Differenz: $\Delta l_{Cu} - \Delta l_{St} = 5,848 \text{ mm} - 1,728 \text{ mm} = 4,12 \text{ mm}$ 2. $N_{Cu} = \frac{(-\Delta T \alpha_{Cu} \alpha_{Cu} + \Delta T \alpha_{St} \alpha_{St}) E_{St} A_{St}}{2 + \frac{E_{St} A_{St}}{E_{Cu} A_{Cu}}} = -339,3 \text{ kN}$, $\sigma_{Cu} = -424,1 \text{ MPa}$, $\sigma_{St} = 339,3 \text{ MPa}$
- 2.19** 1. $F_{Cu} = -4F_{St}$, $\Delta l_{St} = \Delta l_{Cu}$, $\Delta T = (100 \text{ MPa} \cdot 4 \cdot (\frac{(EA)_{St} + (EA)_{Cu}}{E_{St} \cdot (EA)_{Cu}})) / (\alpha_{Cu} - \alpha_{St}) = 447,61 \text{ K}$, $F_{St} = 2,234 \text{ kN}$, $F_{Cu} = -8,936 \text{ kN}$ 2. $T_2 = 91,9^\circ \text{C}$
- 2.20** 1. $B = 2R_m / \varepsilon_m$, $C = -R_m / \varepsilon_m^2$ 2. $F = 2AR_m u / (\varepsilon_m l) - AR_m u^2 / (\varepsilon_m^2 l^2)$

Lösungen zu Abschnitt 2.2

- 2.21** Allgemein: $l_R = R_m/(\rho g)$; S235JR: $l_R = 4,41$ km, C25/30: $l_R = 0,011$ km, Aluminium: $l_R = 1,51$ bis 9,44 km, Eiche faserparallel: $l_R = 16,02$ km, Eiche radial: $l_R = 1,02$ km, Kohlefaser: $l_R = 198,21$ km, EP: $l_R = 2,55$ bis 9,34 km
- 2.22** 1. Streckenlast $n(x) = \rho g A(x)$, oberer Bereich: $N(x_1) = -\rho g \pi r_0^2 h_1$, unterer Bereich: $dN(x_2) = -n(x_2)dx = -\rho g \pi r(x_2)^2 dx$, konstante Spannung: $N(x_2) = \sigma_0 A(x_2) \implies dN(x_2) = \sigma_0 dA(x_2)$, Gleichsetzen und Tr.d.V.: $dA(x_2)/A(x_2) = -(\rho g/\sigma_0)dx \implies A(x_2) = A_0 \exp(-\rho g x_2/\sigma_0)$, $r(x_2) = r_0 \sqrt{\exp(g \rho x_2/\sigma_0)}$ 2. $u'(x) = N(x)/(EA(x)) = \sigma_0/E \implies u = h_2 \sigma_0/E$
- 2.23** 1. Integration der Dgl. für beide Bereiche: $((EA)(x)u'(x))' = -n(x) + ((EA)(x)\alpha_T \Delta T)'$, Bereich 1: $n(x_1) = -\rho g A(x_1)$, $u(x_1) = -\frac{\rho g}{2E} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2$, $C_1 = 7 \rho g l/(10E) - \alpha_T \Delta T/5$, $C_2 = 0$, Bereich 2: $n(x_2) = -\rho g A(x_2)$, $u(x_2) = -\frac{\rho g}{2E} x_2^2 + C_3 x_2 + C_4$, mit $C_3 = 2 \alpha_T \Delta T/5 - 3 \rho g l/(20E)$, $C_4 = \rho g l^2/(5E) - \alpha_T \Delta T l/5$, 2. $\sigma(x_1) = E(-\frac{\rho g}{E} x_1 + C_1) - E \alpha_T \Delta T$, $\sigma(x_2) = E(-\frac{\rho g}{E} x_2 + C_3) - E \alpha_T \Delta T$
- 2.24** 1. $n(x) = -\rho g A(x)$, $N(x) = -\rho g A_0(x+x^2/(4h))$, $\sigma(x) = -\rho g x(4h+x)/(2(2h+x))$ 2. $u'(x) = \varepsilon(x) = \varepsilon_{el}(x) = \sigma(x)/E = -\rho g(4hx+x^2)/(4h+2x)$, $u(x) = \frac{\rho g}{E}(2h^2(\ln(2h+x) - \ln(3h)) - x^2/4 - hx + 5h^2/4)$
- 2.25** 1. $N(x) = -\omega^2 p b t x^2/2 + C_1$, $C_1 = \omega^2 p b t/2 + (r+h)^2$, $\sigma(x) = \omega^2 \rho((r+h)^2 - x^2)/2$ 2. $\sigma(x = r) = 2,724$ MPa
- 2.26** 1. $r_1 = \sqrt{G/(\pi \sigma_0) + r_0^2}$ 2. Streckenlast $n(x) = \rho g A(x)$, $dN(x) = -n(x)dx = -\rho g A(x)dx$, konstante Spannung: $N(x) = \sigma_0 A(x) \implies dN(x) = \sigma_0 dA(x)$, Gleichsetzen und Tr.d.V.: $A(x) = A_0 \exp(-\rho g x/\sigma_0)$, $r(x) = \sqrt{r_0^2 + (r_1^2 - r_0^2) \exp(g \rho x/\sigma_0)}$ 3. $u'(x) = N(x)/(EA(x)) = \sigma_0/E \implies u(x=0) = -h \sigma_0/E$
- 2.27** 1. Integration der Dgl.: $((EA)(x)u'(x))' = ((EA)(x)\alpha_T \Delta T)'$, $A(x) = A_0(1-x/(3l))$, $EAu(x) = -\frac{EA_0 \alpha_T \Delta T}{6l} x^2 + C_1 x_1 + C_2$, $C_1 = \frac{EA_0 \alpha_T \Delta T}{6}$, $C_2 = 0$, $N(x) = -\frac{5EA_0 \alpha_T \Delta T}{6}$, $\sigma(l/2) = -E \alpha_T \Delta T$ 2. $\sigma(\alpha = 30^\circ, x = l/2) = -3E \alpha_T \Delta T/4$, $\tau(\alpha = 30^\circ, x = l/2) = -\sqrt{3}E \alpha_T \Delta T/4$ 3. $\alpha = 45^\circ$ bzw. $\alpha = 135^\circ$
- 2.28** 2. Streckenlast $n(x) = \rho g A(x)$, $dN(x) = -n(x)dx = -\rho g A(x)dx$, konstante Spannung: $N(x) = \sigma_0 A(x) \implies dN(x) = \sigma_0 dA(x)$, Oberer Bereich: $N(x_1) = -\rho g \pi(d^2 + 2dr_1)x_1$, Unterer Bereich: $dN(x_2) = -n(x_2)dx = -\rho g[(r(x_2) + d)^2 - r(x_2)^2]dx$, $N(x_2) = \sigma_0 A(x_2) \implies dN(x_2) = \sigma_0 dA(x_2)$, Gleichsetzen und Tr.d.V.: $A(x_2) = A(x_2 = 0) \exp(-\rho g x_2/\sigma_0)$, $r(x_2) = (1/2)(2r_1 + d) \exp\left(\frac{x_2}{h_1}\right) - d/2$, 2. $u = -h_2 \sigma_0/E$

Lösungen zu Abschnitt 2.3

- 2.29** s. Aufg. 2.6 **2.30** s. Aufg. 2.9 **2.31** s. Aufg. 2.10 **2.32** s. Aufg. 2.11 **2.33** s. Aufg. 2.17

Lösungen zu Kapitel 3

- 3.1** 1. $e = 52\pi a^3/(12\pi a^2) = 26$ mm 2. $I_y = 60\pi a^4 - 16\pi a^4/7 = 22,26$ cm⁴, $I_z = 60\pi a^4 = 24,43$ cm⁴
- 3.2** 1. $I_y = 405$ mm⁴ + $133/3$ mm⁴ = $449,333$ mm⁴, Vergl. mit Tab. 3.2, Fall (12 od.) 13: $I_y = (BH^3 - bh^3)/12 = (10^4 - 9 \cdot 8^3)/12$ mm⁴ = $449,333$ mm⁴ 2. Bedingung: $I_y = a^4/12 \implies a = 8,57$ mm
- 3.3** $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\bar{z}(y) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2}$, $\bar{z}(y) = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2}$, $dI_y = \frac{2}{3} [\frac{a}{b} \sqrt{a^2 - y^2}]^3 dy$, $I_y = \pi a b^3/4$
- 3.4** $\bar{f}(r) = \alpha$, $\bar{f}(r) = 2\pi - \alpha$, $dI_y(r) = r^3(\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin(2\alpha))dr$, $dI_z(r) = r^3(\pi - \alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha))dr$, $dI_{yz}(r) = 0$, $I_y = R^3 h(\pi - \alpha + \sin(2\alpha)/2)$, $I_z = R^3 h(\pi - \alpha - \sin(2\alpha)/2)$, $I_{yz} = 0$
- 3.5** $\bar{y}(z) = \frac{1}{2}z + \frac{7}{9}a$, $\bar{y}(z) = -\frac{1}{2}z - \frac{7}{9}a$, $dI_y(z) = z^2(\bar{y}(z) - \bar{y}(z))dz = (z^3 + 14az^2/9)dz$, $dI_z(z) = \frac{1}{3}(\bar{y}(z)^3 - \bar{y}(z)^3)dz = (z^3/12 + 7az^2/18 + 49a^2z/81 + 686a^3/2187)dz$, $dI_{yz}(z) = -\frac{1}{2}z(\bar{y}(z)^2 - \bar{y}(z)^2)dz = 0$, $I_y = 13a^4/108$, $I_z = 5a^4/16$, $I_{yz} = 0$ **3.6** $I_y = I_z = 5\sqrt{3}R^4/16$, $I_{yz} = 0$
- 3.7** $I_z = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} y^2[-2\frac{b}{a}y + b]dy = ba^3/48$, $I_y = \int_{-\frac{2}{3}b}^{\frac{2}{3}b} z^2[\frac{a}{b}z + \frac{2}{3}a]dz = ab^3/36$, $I_{yz} = 0$
- 3.8** $\bar{y}(z) = \frac{c}{h}z + \frac{b}{2}$, $\bar{y}(z) = \frac{c}{h}z - \frac{b}{2}$, $dI_y(z) = z^2(\bar{y}(z) - \bar{y}(z))dz$, $dI_z(z) = \frac{1}{3}(\bar{y}(z)^3 - \bar{y}(z)^3)dz$, $dI_{yz}(z) = -\frac{1}{2}z(\bar{y}(z)^2 - \bar{y}(z)^2)dz$, $I_y = bh^3/12$, $I_z = hb(b^2 + c^2)/12$, $I_{yz} = -h^2bc/12$
- 3.9** $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{h}{2}$, $L = \sqrt{h^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}h}{2}$, $I_y = I_z = \frac{h^3L}{60}$, $I_{yz} = 0$

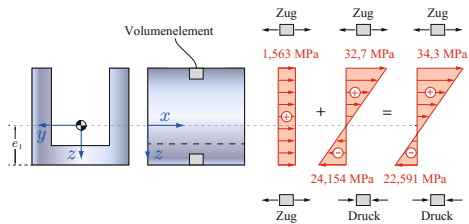
- 3.10** 1. $\bar{y}_S = 1,83a$, $\bar{z}_S = 2,83a$ 2. $I_y = 15,5a^4 + 13a^4/4 = 187\,500\text{ mm}^4$, $I_z = 11a^4 + 23a^4/4 = 167\,500\text{ mm}^4$, $I_{yz} = 12,99a^4 = 130\,000\text{ mm}^4$, 3. $\alpha_Y = 42,8^\circ$, $\alpha_Z = 132,8^\circ$, $I_Y = 307\,884\text{ mm}^4$, $I_Z = 47\,115\text{ mm}^4$
- 3.11** 1. $\bar{y}_S = -5,04\text{ mm}$, $\bar{z}_S = -15,04\text{ mm}$ 2. $I_y = 93\,775,35\text{ mm}^4$, $I_z = 25\,129,56\text{ mm}^4$, $I_{yz} = 28\,438,2\text{ mm}^4$ 3. $\alpha_Y = 19,82^\circ$, $\alpha_Z = 109,82^\circ$, $I_Y = 104\,026\text{ mm}^4 \approx I_u$, $I_Z = 14\,879\text{ mm}^4 \approx I_v$
- 3.12** $I_{y1} = ta^3$, $I_{y2} = 13ta^3/24$
- 3.14** 1. $\bar{y}_S = 47\text{ mm}$, $\bar{z}_S = 40\text{ mm}$ 2. $I_y = 1\,071\,124,5\text{ mm}^4$, $I_z = 484\,507,3\text{ mm}^4$, $I_{yz} = 564\,399,5\text{ mm}^4$ 3. $\alpha_Y = 31,27^\circ$, $\alpha_Z = 121,27^\circ$, $I_Y = 1\,413\,879,36\text{ mm}^4 \approx I_\zeta$, $I_Z = 141\,752,44\text{ mm}^4 \approx I_\eta$
- 3.15** 1. $\bar{y}_S = -59a/20 = -2,95a$, $\bar{z}_S = -61a/20 = -3,05a$ 2. $I_y = 81,45a^4 + 535a^4/6 = 170,616a^4$, $I_z = 149,45a^4 + 115a^4/6 = 168,62a^4$, $I_{yz} = 82,95a^4$, 3. $\alpha_Y = 44,65^\circ$, $\alpha_Z = 134,65^\circ$, $I_Y = 252,57a^4$, $I_Z = 86,66a^4$
- 3.16** 1. $\bar{y}_S = 0$, $\bar{z}_S = 67,06\text{ mm}$ 2. $I_y = 255\,913\,977,3\text{ cm}^4$, $I_z = 2\,487\,699\,999\text{ cm}^4$, $I_{yz} = 0$

Lösungen zu Kapitel 4

Lösungen zu Abschnitt 4.2

- 4.1** 1. $F = mg = 735,75\text{ N}$, $I_y = \frac{BH^3}{12} = 1\,092\,266,7\text{ mm}^4$, $\sigma_{\text{max}}^o = \frac{M_{\text{max}}}{I_y}(-z_{\text{max}}) = -\frac{2Fl}{I_y}(-H/2) = 21,55\text{ MPa}$, $\sigma_{\text{max}}^u = \frac{M_{\text{max}}}{I_y}(z_{\text{max}}) = -\frac{2Fl}{I_y}(H/2) = -21,55\text{ MPa}$ 2. $w_I(x) = F/(EI_y)(x_1^3/6 - 8x_1l^2/3 + 4l^3)$, $w_{II}(x) = F/(3EI_y)(-x_2^3 + 3lx_2^2 - 2l^2)$, $w_{\text{max}} = \frac{4Fl^3}{EI_y} = 207,26\text{ mm}$ 4. $H_{\text{crf}} = \sqrt[3]{(48mgl^3S_f)/EBw_{\text{krit}}} = 79,3\text{ mm}$, wobei $S_f = S_B$
- 4.2** 1. $m_{\text{max}} = 1429,5\text{ kg}$ 2. $w_{\text{max}} = 78,3\text{ mm}$ **4.3** 1. Statisch bestimmt: $w(x) = \frac{q_0l^4}{\pi^4 EI} \sin(\frac{\pi x}{l})$ 2. Statisch unbestimmt: $w(x) = \frac{1}{EI} [q_0 \frac{l^4}{\pi^4} \sin(\frac{\pi x}{l}) + 2q_0 \frac{l^2}{\pi^3} x^3 - 3q_0 \frac{l^2}{\pi^3} x^2 + q_0 \frac{l^3}{\pi^3}]$. Tabelle 4.1 erfordert die Totalresultierende (Größe und Lage) der Belastung am Teilsystem.

- 4.4** 1. $EI_y w(x) = \frac{q_0}{120l} x^5 - \frac{3q_0l}{80} x^3 + \frac{7q_0l^2}{240} x^2$, 2. Tab. 3.2 14: $e_1 = 17a/10$, $e_2 = 23a/10 = |\max z|$, $I_y = 433a^4/30$, $M(x=0) = \min M = -7q_0l^2/120 = -13,125\text{ Nm}$, $\max M = M(x = \sqrt{9/20}l) = 9,515\text{ Nm}$, $\sigma(N) = F/A = 1,563\text{ MPa}$, $\max \sigma(M) = \min M(-e_2)/I_y = -13125(-23 \cdot 4)30/(10 \cdot 433 \cdot 4^4) = 32,68\text{ MPa}$

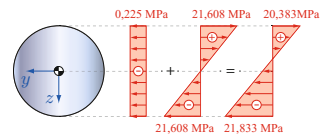


- 4.5** 1. Auflagerkräfte: $A = 3m_1g/2 + m_2g/2 - m_3g/2$, $B = -m_1g/2 + m_2g/2 + 3m_3g/2$, $M_{\min} = m_3gl = 200 \cdot 10 \cdot 1,2\text{ Nm} = -2400\text{ Nm}$, über Lager B, $I_y = \frac{\pi r^4}{4} = 4\,908\,738,521\text{ mm}^4$, $z_u = -z_o = r = 5\text{ mm}$, $\sigma_{\text{max}}^{\text{oben}} = \frac{\min M_y}{I_y} z_o = 24,5\text{ MPa}$, $\sigma_{\text{min}}^{\text{unten}} = \frac{\min M_y}{I_y} z_u = -24,5\text{ MPa}$, wobei $z_{\text{max}} = 50\text{ mm}$, $z_{\text{min}} = -50\text{ mm}$

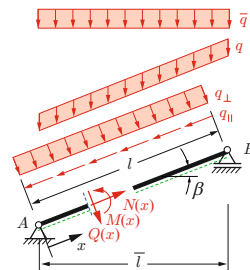
2. $w(x_1) = \frac{1}{EI_y} [\frac{1}{6}m_1gx_1^3 + (-\frac{7}{6}m_1 + \frac{1}{4}m_2 - \frac{1}{3}m_3)gl^2x_1 + (m_1 - \frac{1}{4}m_2 + \frac{1}{3}m_3)gl^3]$,
 $w(x_2) = \frac{1}{EI_y} [-\frac{1}{2}(m_1 + m_2 - m_3)gx_2^3 + \frac{1}{2}m_1glx_2^2 + (-\frac{2}{3}m_1 + \frac{1}{4}m_2 - \frac{1}{3}m_3)gl^2x_2]$,
 $w(x_3) = \frac{1}{EI_y} [-\frac{1}{12}(m_1 - m_2 - m_3)gx_3^3 + \frac{1}{4}(m_1 - m_2 + m_3)glx_3^2 + \frac{1}{12}(m_1 - m_3)gl^2x_3 + (-\frac{1}{4}m_1 + \frac{1}{6}m_2 - \frac{1}{4}m_3)gl^3]$, $w(x_4) = \frac{1}{EI_y} [-\frac{1}{6}m_3gx_4^3 + \frac{1}{2}m_3glx_4^2 + (\frac{1}{3}m_1 - \frac{1}{4}m_2 + \frac{2}{3}m_3)gl^2x_4]$

3. $S_\sigma = \frac{R_e}{|\sigma|_{\text{max}}} = 9,61$, $S_f = \frac{l/500}{w(x_4=l)} = 0,955$, $S_B = 0,955$

- 4.6** 1. $\min M_y = -\frac{Gl}{\sqrt{2}}$, $\min N = -G/\sqrt{2}$, $I_y = \frac{\pi r^4}{4} = 4\,908\,738,521\text{ mm}^4$, $\sigma(N) = \frac{\min N}{A} = -0,225\text{ MPa}$, $\sigma_{\text{max}}(M) = \sigma_b(z = -r) = \frac{\min M_y(x)_{\text{max}}}{I_y}(-r) = 21,608\text{ MPa}$, 2. $w(x_1) = \frac{mg}{6\sqrt{2}EI}(x_1^3 - 5l^2x_1 + 4l^3)$, $w(x_2) = \frac{mg}{6\sqrt{2}EI}(-x_2^3 + 3lx_2^2 - 2l^2x_2)$



- 4.7** Allg. Bed.: $\bar{q} = ql$, $\cos \beta = \bar{l}/l$, 1. $g_{Da} = 0,4 \cdot 4 = 2\text{ kN m}^{-1}$, $g_{Sp} = 0,1 \cdot 4 = 0,4\text{ kN m}^{-1}$, $g_{Bi} = 0,1\text{ kN m}^{-1} \implies g = 2,5\text{ kN m}^{-1}$, $q_s = 4\text{ m} \cdot s = 4\text{ m} \cdot \bar{s}l/l = 40,7 \cdot 16,6/20 = 2,324\text{ kN m}^{-1}$ $q = g + q_s = 4,824\text{ kN m}^{-1}$, 2. $\bar{q} = ql/\bar{l} = q/\cos \beta = 5,81\text{ kN m}^{-1}$ 3. Belastung senkrecht/horizontal zum Balken: $q_\perp = q \cos \beta = q\bar{l}/l = \bar{q} \cos^2 \beta = 4,00\text{ kN m}^{-1}$, $q_\parallel = q \sin \beta = \bar{q} \cos \beta \sin \beta$.



4. Schnittgrößen: $N(x) = -\frac{q_{\perp}}{2}(l - 2x)$, $Q(x) = \frac{q_{\perp}}{2}(l - 2x)$, $M(x) = \frac{q_{\perp}}{2}x(l - x)$, $\max M = q_{\perp}l^2/8 = 200 \text{ N m}$, 5. Erforderliche Höhe, Vernachlässigung von $N(x)$, $\sigma_{\text{krit}}/S_B = \sigma_{\text{zul}} = \max M/W$, $W = bh^2/6 \implies h_{\sigma} = \sqrt{\frac{6 \max M \cdot S_B}{b \sigma_{\text{krit}}}} = 410 \text{ mm}$, Tab. 4.4, Fall 3, $\frac{l}{S_B 100} = w_{\max} = \frac{5q_{\perp}l^4}{384EI}$, $I = \frac{bh^3}{12} \implies h_w = \sqrt[3]{\frac{100 \cdot S_B}{l} \frac{12 \cdot 5q_{\perp}l^4}{384Eb}} = 852 \text{ mm}$, $h = \min\{h_{\sigma}, h_w\} = 852 \text{ mm}$.

- 4.8** 1. Symmetriebedingung ausnutzen, $w(x_1) = \frac{F}{EI_y}(x_1^3/16 - x_1^2l/8)$, $w(x_2) = \frac{F}{EI_y}(-x_2^3/12 + x_1^2l/4 + x_1l^2/4)$ 2. $w_{\max} = w_2(x_2 = l) = \frac{5Fl^3}{12EI_y} = 5,58 \text{ mm}$, $S_f = \frac{w_{\text{krit}}}{w_{\max}} = 1,34$ 3. $\sigma_{\max, \min} = \frac{2Fl}{8I_y} \pm (\frac{h}{2}) = \pm 31,25 \text{ MPa}$ 4. $S_{\sigma} = \frac{R_e}{|\sigma_{\max}|} = 7,52$ 5. $S_B = 1,34$

Lösungen zu Abschnitt 4.3

- 4.10** 1. $\alpha_N^* = -80,62^\circ$ 2. $\sigma_{\max} = 129,97 \text{ MPa}$, $\sigma_{\min} = -145,89 \text{ MPa}$
 4. $f = \sqrt{(0,473 \text{ mm})^2 + (2,861 \text{ mm})^2} = 2,9 \text{ mm}$
 5. $\alpha_N = -37,81^\circ$, $f = \sqrt{(1,779 \text{ mm})^2 + (2,29 \text{ mm})^2} = 2,9 \text{ mm}$

- 4.11** 1. $\alpha_N = -88,529^\circ$ 2. $\sigma_1(x = l/2) = -31,5 \text{ MPa}$, $\sigma_2(x = l/2) = 88,7 \text{ MPa}$, $\sigma_3(x = l/2) = -96,3 \text{ MPa}$ 4. $f = 10,51 \text{ mm}$

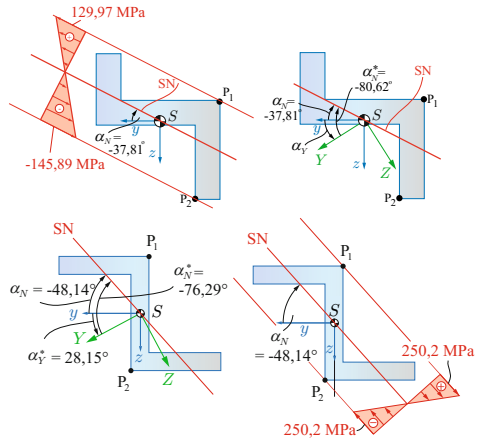
- 4.12** 1. $\bar{y}_S = 5a$, $\bar{z}_S = 5a$, $I_y = 428a^4$, $I_z = 172a^4$, $I_{yz} = 192a^4$, $\alpha_N = -48,14^\circ$, 2. $\sigma_{\min} = -250,2 \text{ MPa}$, $\sigma_{\max} = 250,2 \text{ MPa}$ 4. $f = \sqrt{(3,74 \text{ mm})^2 + (3,34 \text{ mm})^2} = 5,01 \text{ mm}$
 5. $I_Y = 492,33a^4$, $I_Z = 107,66a^4$, $\alpha_N^* = -76,29^\circ$, $f = \sqrt{(1,187 \text{ mm})^2 + (4,87 \text{ mm})^2} = 5,01 \text{ mm}$

- 4.13** 1. $y_s = 47 \text{ mm}$, $z_s = 40 \text{ mm}$, $I_{\bar{y}} = 1073815,82 \text{ mm}^4$, $I_{\bar{z}} = 485821,3 \text{ mm}^4$, $I_{\bar{y}, \bar{z}} = 564399,5 \text{ mm}^4$, $\alpha_0 = 31,24^\circ$, $\alpha_N = -86,46^\circ$ 2. $\sigma_1(x = l/2) = 98,7 \text{ MPa}$, $\sigma_2(x = l/2) = -153,6 \text{ MPa}$, $\sigma_3(x = l/2) = 153,6 \text{ MPa}$, $\sigma_4(x = l/2) = -98,7 \text{ MPa}$ 4. $f = \sqrt{(0,0162 \text{ mm})^2 + (10,797 \text{ mm})^2} = 10,797 \text{ mm}$

- 4.14** 1. $y_s = 0$, $z_s = 107,5 \text{ mm}$, $I_{\bar{y}} = 39272083,33 \text{ mm}^4$, $I_{\bar{z}} = 7781493,33 \text{ mm}^4$, $\alpha_N = -49,37^\circ$ 2. $\sigma_1(x = 0) = 30,61 \text{ MPa}$, $\sigma_2(x = 0) = -199 \text{ MPa}$, $\sigma_3(x = 0) = 223 \text{ MPa}$, $\sigma_4(x = 0) = -7 \text{ MPa}$ 4. $f = \sqrt{(0,918 \text{ mm})^2 + (1,07 \text{ mm})^2} = 1,41 \text{ mm}$

- 4.15** 1. $\bar{y}_s = 58,9 \text{ mm}$, $\bar{z}_s = 16,5 \text{ mm}$, $I_y = 521777,6 \text{ mm}^4$, $I_z = 1059690,9 \text{ mm}^4$, $I_{yz} = -288306,5 \text{ mm}^4$ 2. $\alpha_Y = 23,5^\circ$, $\alpha_Z = 113,5^\circ$, $I_Y = 1185016 \text{ mm}^4$, $I_Z = 396452 \text{ mm}^4$
 3. $\sigma_1(x = 0) = 250 \text{ MPa}$, $\sigma_2(x = 0) = 5 \text{ MPa}$, $\sigma_3(x = 0) = -385 \text{ MPa}$

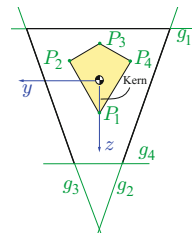
- 4.16** 1. $I_Y = 1080 \text{ cm}^4$, $I_Z = 244 \text{ cm}^4$, $\alpha_Y = -12,7^\circ$, $\alpha_Z = 77,3^\circ$ 3. $Y_1 = -61,4 \text{ mm}$, $Z_1 = -136,8 \text{ mm}$, $Y_2 = 36,1 \text{ mm}$, $Z_2 = -114,9 \text{ mm}$, $Y_3 = -7,8 \text{ mm}$, $Z_3 = 80,2 \text{ mm}$, $Y_4 = -105,4 \text{ mm}$, $Z_4 = 58,3 \text{ mm}$, $Y_5 = 89,7 \text{ mm}$, $Z_5 = 102,2 \text{ mm}$ 4. $\sigma_1(x = l/2) = -85,2 \text{ MPa}$, $\sigma_2(x = l/2) = -170,37 \text{ MPa}$, $\sigma_3(x = l/2) = 99,31 \text{ MPa}$, $\sigma_4(x = l/2) = 184,59 \text{ MPa}$, $\sigma_5(x = l/2) = 14,26 \text{ MPa}$ 5. $\alpha_N = 44,95^\circ$



Lösungen zu Abschnitt 4.4

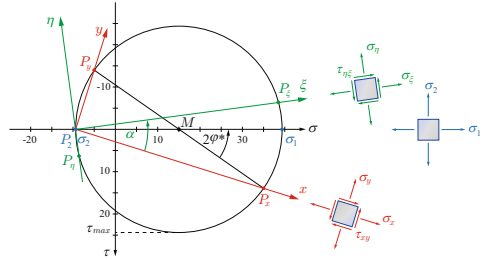
- 4.17** $y_{K1} = 0$, $z_{K1} = 7,36 \text{ mm}$, $y_{K2} = -8,59 \text{ mm}$, $z_{K2} = 0$, $y_{K3} = 10,17 \text{ mm}$, $z_{K3} = 0$, $y_{K4} = 0$, $z_{K4} = -6,58 \text{ mm}$

- 4.18** $y_{K1} = 0$, $z_{K1} = 23,87 \text{ mm}$, $y_{K2} = 22,59 \text{ mm}$, $z_{K2} = -7,32 \text{ mm}$, $y_{K3} = 0$, $z_{K3} = -12,98 \text{ mm}$, $y_{K4} = -22,59 \text{ mm}$, $z_{K4} = -7,32 \text{ mm}$



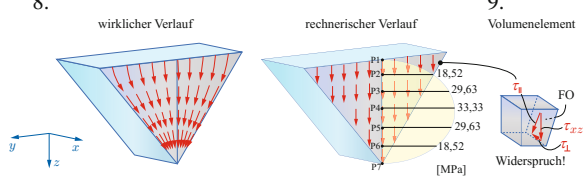
Lösungen zu Kapitel 5

- 5.1 $\Delta l = \frac{Fl}{EA} = 0,18 \text{ mm}$, $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$, $\nu = E/(2G) - 1 = 0,313$, $\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d}$, $\Delta d = -\frac{\nu\Delta l d}{l} = -0,00284 \text{ mm}$ 5.2 siehe Beispiel 5.2 5.3 siehe Beispiel 5.3 5.4 siehe Beispiel 5.4
- 5.5 1. $\varepsilon_y = -\nu(\frac{F}{A})/E + \alpha_T \Delta T = 0$, $\Delta T = 37,14 \text{ K}$ 2. $\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \alpha_T \Delta T l = 3,65 \text{ mm}$
- 5.6 $-\Delta l_A = \Delta l_E = E_E \beta_C \Delta C / (\frac{E_E}{s} + \frac{E_A}{l})$, $\sigma = E_A \Delta l_A / l = -11,1 \text{ MPa} < -R_m = -8,1 \text{ MPa}$
- 5.7 1. $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, $\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_1 = 12,96 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 4 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -13,96 \text{ MPa}$ 2. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$: $\sigma_v^N = |\sigma_3| = 13,96 \text{ MPa} < \sigma_{\text{Zul}}$, $\sigma_v^S = 2(\sigma_1 - \sigma_3) = 53,84 \text{ MPa} > \sigma_{\text{Zul}}$, $\sigma_v^D = 33,58 \text{ MPa} > \sigma_{\text{Zul}}$
- 5.8 1. $\beta_C = \frac{1}{3}(\frac{\rho_{fl}}{\rho_{fe}} - 1) = -1,4 \cdot 10^{-3}$ 2. $\sigma_x = \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu} \beta_C \Delta c = 6,97 \text{ MPa} < R_m$
- 5.9 $\sigma_{\text{Beton}} = -\beta_{BC} E_B E_{St} 0,07 / (E_B 0,93 + E_{St} 0,07) = 3,12 \text{ MPa} > R_m$ (vgl. auch Beispiel 2.5)
- 5.11 1. $\alpha_a = 0^\circ$, $\varepsilon_x = \varepsilon_a = 15 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_b = \alpha_b = 45^\circ$, 2. $\varepsilon_1 = 15,8 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -22,8 \cdot 10^{-4}$ 3. $\varphi_1^* = 8,28^\circ$, $\varphi_2^* = 98,28^\circ$, $\varphi_1 = -36,72^\circ$ 4. $J_{1\varepsilon} = -7 \cdot 10^{-4}$, $J_{2\varepsilon} = -360,25 \cdot 10^{-8}$
- 5.12 1. $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = -p \frac{3-\nu}{3-\nu^2}$, $\sigma_{x1} = -p \frac{2\nu^2}{3-\nu^2}$
- 5.14 1. $\sigma_\xi = 38,58 \text{ MPa}$, $\sigma_\eta = -8,58 \text{ MPa}$, $\tau_{\xi\eta} = -6,32 \text{ MPa}$ 2. $J_{1\sigma} = 30 \text{ MPa}$, $J_{2\sigma} = -371 \text{ MPa}^2$ 3. $\sigma_1 = 39,41 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -9,41 \text{ MPa}$ 4. $\tau_{\text{max}} = 24,41 \text{ MPa}$, $\tau_{\text{min}} = -24,41 \text{ MPa}$
- 5.15 Zug: $\alpha = 0^\circ$, $\sigma(0^\circ) = \frac{Fz}{A} = 11,1 \text{ MPa}$, $\tau(0^\circ) = 0$, Druck: $\alpha = 45^\circ$, $\tau(45^\circ) = -\sigma(45^\circ) = \frac{1}{2} \frac{Fz}{A} = 22,78 \text{ MPa}$
- 5.16 1. $\tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}$, $\alpha = 0,5 \tan^{-1}(2\tau_{xy}/\sigma_x)$
2. $\sigma_0 = \sigma_x/2 + \sqrt{\sigma_x^2/4 + \tau_{xy}^2}$
- 5.18 1. $\varepsilon_x = 2xyA$, $\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = 2zyA + C$, $\gamma_{xy} = Ax^2 + Bz$, $\gamma_{yz} = 2Bz + Az^2$, $\gamma_{xz} = By$ 2. $G = \frac{3E}{8}$, $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $\sigma_x = E(\frac{3}{8}Axy + \frac{3}{2}Ayz + \frac{3}{4}C)$, $\sigma_y = E(\frac{3}{2}Axy + \frac{3}{2}Ayz + \frac{3}{4}C)$, $\sigma_z = E(\frac{3}{2}Ayz + \frac{3}{2}C + \frac{3}{2}Axy)$, $\tau_{xy} = E(\frac{3}{8}Ax^2 + \frac{3}{8}Bz)$, $\tau_{xz} = \frac{3}{8}EBz$, $\tau_{yz} = E(\frac{3}{4}Bz + \frac{3}{8}Az^2)$
3. $P_x = \frac{\sqrt{2}B}{A}$, $P_y = \frac{1}{B}$, $P_z = \frac{-2B}{A}$, $\sigma_1 = \hat{\sigma}_1 = 2,0245E$, $\sigma_2 = \sigma_y = -0,1287E$, $\sigma_3 = \hat{\sigma}_2 = -2,4106E$ 4. $n_{1x} = 0,99639$, $n_{1y} = 0$, $n_{1z} = 0,08486$ 5. $\sigma_v^N = 2,0245E$, $\sigma_v^S = 4,4351E$, $\sigma_v^D = 3,8415E$
- 5.19 1. $p = \frac{\Delta R E h}{R^2(1-\frac{\nu}{2})} = 2,32 \text{ MPa}$ 2. $\sigma_\varphi = \frac{pR}{h} = 64,96 \text{ MPa}$
- 5.20 Mittlere Spannung nach Gl.(5.12): $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3\sigma_m^2 + \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$, $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x = 3\sigma_m^2 - \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$, Einsetzen in (8.42) liefert das Ergebnis. Für $\nu \leq 1/2$ gemäß (5.60) gilt: Die Formänderungsenergie eines hookeschen Werkstoffs ist nicht negativ, $\hat{u}^* \geq 0$. Null ist sie nur, wenn alle Spannungen gleich Null sind.
- 5.22 $e = \frac{\Delta V}{V} = 3\beta_C \Delta C$, $\Delta C = 0,75$
- 5.23 1. $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$, $\varepsilon_z \neq 0$, $\gamma_{xy} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{xz} = 0$ 2. $\sigma_x = \frac{Fx}{at} = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_y = \frac{Fy}{bt} = 25 \text{ MPa}$, $\varepsilon_x = \frac{\Delta b}{b} = 0,1$, $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} = 0,025$ 3. $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}$, $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}$, $\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = -0,05$, $\nu = \frac{\varepsilon_x \sigma_y - \varepsilon_y \sigma_x}{\varepsilon_x \sigma_x - \varepsilon_y \sigma_y} = 0,286$, $E = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{\varepsilon_x} = 428,572 \text{ MPa}$ 4. $\sigma_v^N = \sigma_1 = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_v^S = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_v^D = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2} - \sigma_1 \sigma_2 = 43,301 \text{ MPa}$



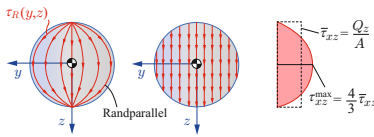
Lösungen zu Kapitel 6

- 6.1 1. $b(z) = \frac{4h}{3} - 2z$ 2. $S_y(z) = \int_{-\frac{z}{3}}^z \tilde{z} \cdot b(\tilde{z}) d\tilde{z} = \frac{2}{3}z^2h - \frac{2}{3}z^3 - \frac{8}{81}h^3$, 3. $I_y = \frac{bh^3}{36} = \frac{h^4}{18} = 2812,5 \text{ mm}^4$ 4. $\tau_{xz}(z) = -\frac{Q_z S_y(z)}{I_y b(z)} = -\frac{50z^2 \text{ kNm} - 3,33z^3 \text{ kN} - 1666,6 \text{ kNm}^3}{56250 \text{ mm}^5 - 5625 \text{ mm}^4 z}$
5. $\tau_{xz}(z_1) = \tau_{xz}(z_7) = 0 \text{ MPa}$,
 $\tau_{xz}(z_2) = \tau_{xz}(z_6) = 18,52 \text{ MPa}$,
 $\tau_{xz}(z_3) = \tau_{xz}(z_5) = 29,63 \text{ MPa}$,
 $\tau_{xz}(z_4) = 33,33 \text{ MPa}$
 $\bar{\tau}_{xz} = \frac{Q_z}{A} = 22,22 \text{ MPa}$
6. $\tau_{\text{max}} = 33,333 \text{ MPa}$, $z = 2,5 \text{ mm}$
7. $t_{\text{max}} = 592,6 \text{ N/mm}$, $z = 0$

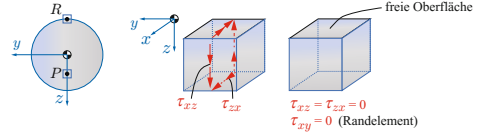


- 6.2 1. $b(z) = 2\sqrt{r^2 - z^2}$, $S_y(z) = -\frac{2}{3}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}$, $I_y = \frac{\pi R^4}{4} = 12,566 \text{ cm}^4$, $S_{y,\min} = -\frac{2}{3}r^3$, 2. $\tau(z) = -\frac{Q_z S_y(z)}{I_y b}$, $\tau(z_P) = 1,592 \text{ MPa}$, $\tau(z_R) = 0$, $\tau_{\max} = -\frac{Q_z S_{y,\min}}{I_y b} = \frac{4Q_z}{3A} = 2,122 \text{ MPa}$

3. tatsächlicher Verlauf rechnerischer Verlauf

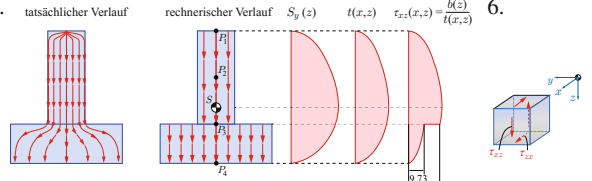


4. Kreisprofil Punkt P Punkt R

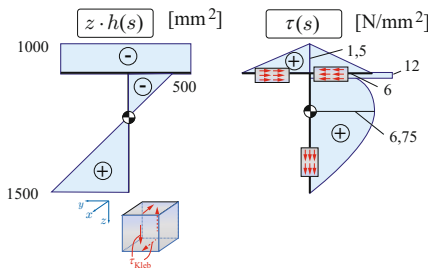


- 6.3 1. $\bar{y}_S = 0$, $\bar{z}_S = 17,5 \text{ mm}$ 2. $b_1(z) = b_1$, $b_2(z) = b_2$, $S_{y1}(z) = \frac{b_1}{2}(z^2 - (17,5)^2)$, $S_{y2}(z) = S_{y1}(z = 2,5 \text{ mm}) + \frac{b_2}{2}(z^2 - (2,5 \text{ mm})^2)$

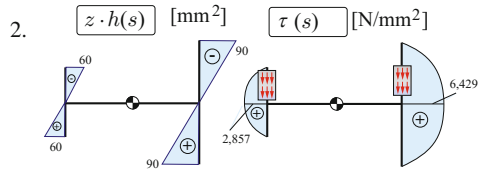
3. $I_y = \sum I_{yi} + \sum (\bar{z}_i - \bar{z}_s)^2 A_i = 30\,833,33 \text{ mm}^4$ 4. $\tau_1(z_1 = -17,5) = \tau_4(z_4 = 12,5) = 0$, $\tau_2(z_2 = -7,5) = 16,22 \text{ MPa}$, $\tau_3(z_3 = 2,5, \text{ oben}) = 19,46 \text{ MPa}$, $\tau_3(z_3 = 2,5, \text{ unten}) = 9,73 \text{ MPa}$, $\tau_4(z_4 = 12,5) = 0 \text{ MPa}$



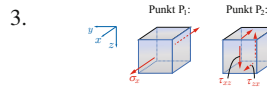
- 6.4 1. $y_s = 0$, $z_s = 50 \text{ mm}$, $I_y = 16666667 \text{ mm}^4$



- 6.5 1. $M_{\max} = \frac{Fl}{4} = 1500 \text{ kNm}$, $I_y = 70\,000 \text{ mm}^4$, $\sigma_1(z_1 = -\frac{h_2}{2}) = \frac{M_{\max}}{I_y} z_1 = -428,57 \text{ MPa}$, $\sigma_2(z_2 = 0) = \frac{M_{\max}}{I_y} z_2 = 0$



2. $\tau_{\text{Klebe}} = 12 \text{ MPa} < \tau_{\text{zul}}$

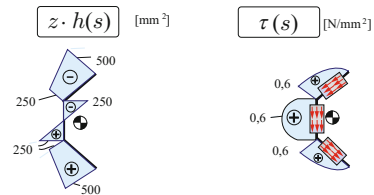


- 6.6 $T_1 = 771,429 \text{ N}$, $e = \frac{T_1}{Q} b = 38,571 \text{ mm}$

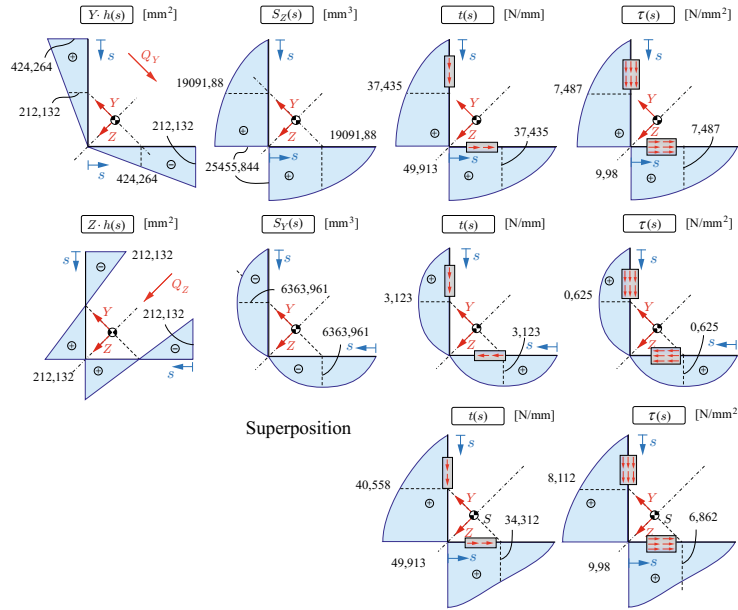
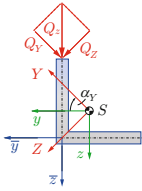
4. $t = 19,286 \text{ N/mm}$, $d_{\text{Klebe}} = \frac{t}{\tau_{\text{zul}}} = 0,964 \text{ mm}$

- 6.7 1. $I_y = \frac{bh^3}{12} = 42,875 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$, $M_{y,\max}(x = \frac{l}{2}) = 20,25 \text{ kNm}$, $\sigma_1(z = \frac{h}{2}) = \frac{M_{y,\max}}{I_y} (\frac{h}{2}) = 8,265 \text{ MPa}$, $\sigma_2(z = -\frac{h}{2}) = -8,265 \text{ MPa}$, $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = 8,265 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_2 = -8,265 \cdot 10^{-4}$ 2. $w_{\max} = \frac{5q_0 l^4}{384EI} = 9,963 \text{ mm}$ 3. $Q_{\max} = 18 \text{ kN}$, $\tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2A} = 0,4286 \text{ MPa}$, $t = \tau_{\max} b = 51,43 \text{ N mm}^{-1}$, $a = \frac{\tau_{\text{zul}} A D}{t} = 274,88 \text{ mm}$ 4. $I_y^* = \frac{b(\frac{h}{2})^3}{12} = 53\,593\,750 \text{ mm}^4$, $w_{\max}^* = \frac{5(q_0/2)l^4}{384EI_y^*} = 39,85 \text{ mm}$

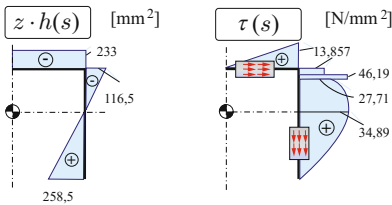
- 6.8 1. $\sigma_1(x = 1,5 \text{ m}, z = 0 \text{ m}) = 0$
 2. $I_y = 2\frac{dh^2l}{12} + 2(\frac{l}{2} + \frac{h}{2})^2 + \frac{dl^3}{12} = 6\,250\,000 \text{ mm}^4$, $Q_z = \frac{F}{2} = 500 \text{ N}$
 4. $e = 29,78 \text{ mm}$



- 6.9 Wegen Voraussetzung (6.16.3) ist das Hauptachsensystem Y, Z zu verwenden. $\bar{y}_S = -30 \text{ mm}$, $\bar{z}_S = -30 \text{ mm}$, $I_y = 1\,801\,250 \text{ mm}^4$, $I_z = 1\,801\,250 \text{ mm}^4$, $I_{yz} = -1\,080\,000 \text{ mm}^4$, $I_Y = 2\,881\,250 \text{ mm}^4$, $I_Z = 721\,250 \text{ mm}^4$, $\alpha_Y = -45^\circ$, $Q_Y = -Q_z \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ kN}$, $Q_Z = Q_z \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ kN}$

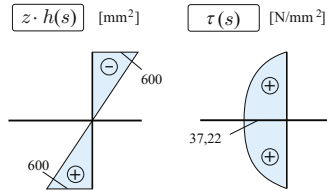


6.10 1./2.



3. $\tau^{Kleb} = 46,19 \text{ MPa} > \tau_{zul}^{Kleb} = 20 \text{ MPa}$
 \Rightarrow Bauteil versagt!

6.12 1. $M_y = \frac{Fl}{4} = 45 \text{ kNm}$, $\sigma_1(z = 0) = 0$, $\sigma_2(z = -60 \text{ mm}) = -1861 \text{ MPa}$
 2.



Lösungen zu Kapitel 7

7.1 1. $\omega = n2\pi/60 = 209,44 \text{ s}^{-1}$, $M_T = P/\omega = 477,4 \text{ Nm}$, $I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$, $D_{erf} = \sqrt[3]{\frac{S_\sigma 16 M_T}{\tau_{krit} \pi(1-0,9^4)}} = 41,35 \text{ mm}$ 2. $\Delta\vartheta = \frac{M_T l}{G I_p} = 1,807^\circ$

7.2 $n_{Ab} = \frac{n A_n}{i} = -317,65$, $M_{Ab} = \frac{60 P}{2\pi n_{Ab}} = -30,06 \text{ kNm}$, $M_{Ab} = \frac{60 P}{2\pi n_{An}} = 17,68 \text{ kNm}$, $d_{Ab} = \sqrt[3]{\frac{16 |M_{Ab}|}{\pi \tau_{zul}}} = 115,25 \text{ mm}$, $d_{An} = 96,56 \text{ mm}$

7.3 Vollquerschnitt: $I_p = \pi R^4/2$, Ringquerschnitt: $I_p = \pi(R_a^4 - R_i^4)/2$

7.4 $\omega = \frac{2\pi n}{60} = 418,88 \text{ s}^{-1}$, $W_T = \pi D^3/16$, $M_T = \frac{P}{W_T} = 14,29 \text{ kNm}$, $D = \sqrt[3]{\frac{16 M_T}{\pi \tau_{zul}}} = 7,86 \text{ cm}$

7.5 1. $I_{p1} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = 73\,087,6 \text{ mm}^4$, $I_{p2} = \frac{\pi d^4}{32} = 15\,708,0 \text{ mm}^4$, $I_{p3} = \frac{\pi D^4}{32} = 79\,521,6 \text{ mm}^4$,
 $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$,

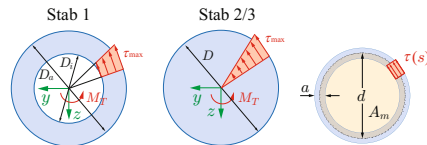
$$\bar{M}_T = \frac{\vartheta G}{\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} + \frac{l_3}{I_{p3}}} = 200,85 \text{ Nm}$$

$$\tau_{\max,1} = 41,23 \text{ MPa}, \tau_{\max,2} = 127,89 \text{ MPa},$$

$$\tau_{\max,3} = 37,89 \text{ MPa}$$

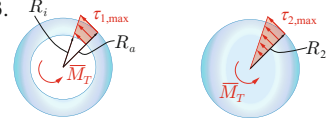
2. Schweißnaht ist dünnwandig und geschlossen.

$$A_m = \pi \left(\frac{d}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 = 121\pi \text{ mm}^2, \tau(s) = \frac{M_T}{2 \cdot a \cdot A_m} = 132,12 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} = \tau_{\text{Schweiß,zul}}$$



- 7.6** 1. $2a^2b^2/(2(a^2 + b^2)a^2) + 2a^2b^2/(2(a^2 + b^2)b^2) = 1$, $\Phi|_{\text{Rand}} = 0$, da $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$
 2. $I_T = -4 \int \Phi dA = \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2)$ 3. $\tau_{xy, \max} = 2M_T / (\pi ab^2)$, $\tau_{xz, \max} = 2M_T / (\pi a^2 b)$ für $b > a$

- 7.7** 1. $I_{p1} = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4)$, $I_{p2} = \frac{\pi}{2}R_2^4$,
 $M_B = -\frac{M_T l_1}{I_{p1}(\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}})} = -4,345 \text{ kNm}$, $M_A = 4,655 \text{ kNm}$,
 $\tau_{\max,1} = 386 \text{ MPa}$, $\tau_{\max,2} = 474 \text{ MPa}$
 2. $\vartheta_C = \frac{M_A l_1}{GI_{p1}} = -\frac{M_B l_2}{GI_{p2}} = 1,51^\circ$

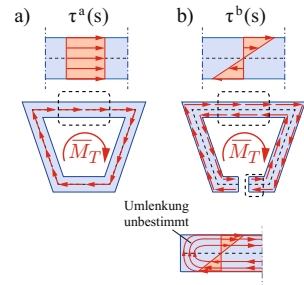


- 7.8** 1. $\tau_{\text{Qua}} = \frac{M_T}{W_{T, \text{Qua}}} = \frac{M_T}{W_{T, \text{Kreis}}} = \tau_{\text{Kreis}} \implies W_{T, \text{Qua}} = 2a^2 h = W_{T, \text{Kreis}} = \frac{\pi d^3 h}{2} \implies d/a = \sqrt[3]{4/\pi}$
 2. $\Delta\vartheta_{\text{Qua}} = \Delta\vartheta_{\text{Kreis}} \implies I_{T, \text{Qua}} = a^3 h = I_{T, \text{Kreis}} = \frac{\pi d^3 h}{4} \implies d/a = \sqrt[3]{4/\pi}$

- 7.9** 1. $I_{p1} = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4)$, $I_{p2} = \frac{\pi}{2}R_2^4$, $\bar{M}_T = M_{T1} + M_{T2}$, $\Delta\vartheta_1 = \Delta\vartheta_2$, $\tau_{\max,1} = \frac{M_{T1}}{I_{p1}} R_a = 521,09 \text{ MPa}$, $\tau_{\max,2} = \frac{M_{T2}}{I_{p2}} R_2 = 493,66 \text{ MPa}$, 2. $\Delta\vartheta_B = \frac{M_{T1} l}{GI_{p1}} = \frac{M_{T2} l}{GI_{p2}} = 2,357^\circ$

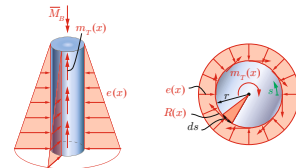
- 7.10** 1. $I_{p1} = \frac{\pi(D^4 - D_i^4)}{32} = 19177,85 \text{ mm}^4$, $I_{p2} = \frac{\pi d^4}{32} = 15707,96 \text{ mm}^4$, $I_{p3} = \frac{\pi D^4}{32} = 79521,56 \text{ mm}^4$, $\Delta\vartheta_{\text{ges}} = \frac{\pi}{80} = \Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta_3$, $\bar{M}_T = \frac{\Delta\vartheta \cdot G}{\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} + \frac{l_3}{I_{p3}}} = 140,71 \text{ kNm}$, $W_{pi} = \frac{I_{pi}}{r}$, $W_{p1} = \frac{\pi(D^4 - D_i^4)}{16D} = 1278,52 \text{ mm}^4$, $W_{p2} = \frac{\pi d^3}{16} = 1570,8 \text{ mm}^4$, $W_{p3} = \frac{\pi D^3}{16} = 5301,4 \text{ mm}^4$, $\tau_i = \frac{M_T r}{I_{pi}} = \frac{M_T}{W_{pi}}$, $\tau_{\max,1} = 110,06 \text{ MPa}$, $\tau_{\max,2} = 89,58 \text{ MPa}$, $\tau_{\max,3} = 26,54 \text{ MPa}$, 2. $\tau_{K1} = 110,06 \text{ MPa} > \tau_{\text{Kleb, zul}}$, $\tau_{K2} = 89,58 \text{ MPa} < \tau_{\text{Kleb, zul}}$

- 7.11** 1. $M_T = 200 \text{ Nm}$, $A_m = 4375 \text{ mm}^2$,
 $I_{T, \text{geschl.}} = \frac{(2A_m)^2}{\sum \frac{l_i}{d_i}} = 550\,654,85 \text{ mm}^4$,
 $I_{T, \text{offen}} = \frac{\eta}{3} \sum l_i d_i^3 = 830,526 \text{ mm}^4$,
 $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80\,769,231 \text{ Nmm}^2$,
 $\tau_{\max,a} = \frac{M_T}{2dA_m} = 11,43 \text{ MPa}$, $\tau_{\max,b} = \frac{M_T d}{I_T} = 481,62 \text{ MPa}$



2. $\tau_{\max,b} / \tau_{\max,a} = 42$, 3. $\Delta\vartheta_a = \frac{M_T^{[1]} \frac{l}{2}}{GI_{T, \text{geschl.}}} + \frac{M_T^{[2]} \frac{l}{2}}{GI_{T, \text{geschl.}}} = 0,19^\circ$, $\Delta\vartheta_b = 128,34^\circ$, $\Delta\vartheta_b / \Delta\vartheta_a = 664,97$
 4. $\tau_{\text{Kleb}} = \frac{M_T}{2d_{\text{Kleb}} A_m} = \tau_{\max,a} < 12 \text{ MPa} = \tau_{\text{Kleb, zul}}$ (kein Versagen)
 5. $\tau_{\text{Kleb}} = 15,24 \text{ MPa} > 12 \text{ MPa} = \tau_{\text{Kleb, zul}}$ (Versagen)

- 7.12** 1. $e_0 = \gamma H K_{ah} = 75,6 \text{ kN/m}^2$,
 $N(x) = e(x) = e_0 x / H = 5,04 \cdot x \text{ kN/m}^3$,
 $R(x) = \mu N(x) = 1,512 \cdot x \text{ kN/m}^3$,
 $m_T(x) = r R(x) \int_{(U)} ds = r R(x) \cdot 2\pi r = 0,213\,754 \text{ kN/m} \cdot x$
 2. $\bar{M}_B = \frac{1}{2} m_T(x = H) H = 24,047 \text{ kNm}$
 3. $I_p = \frac{\pi}{2}(r_a^4 - r_i^4) = 100\,844\,142 \text{ mm}^4$,
 $\tau_{\max} = \frac{\bar{M}_B r_a}{I_p} = 37,77 \text{ MPa}$
 4. $GI_p \vartheta''(x) = -m_T(x) = -k \cdot x$, $GI_p \vartheta(x) = -\frac{1}{6} k x^3 + C_1 x + C_2$, $C_1 = \frac{1}{2} k H^2$, $C_2 = -\frac{1}{3} k H^3$,
 $\vartheta(x) = 4,415 \cdot 10^{-6} \text{ 1/m}^3 (-x^3 + 675 \text{ m}^2 x - 6750 \text{ m}^3)$,
 $\Delta\vartheta = \vartheta(0) = -0,0298 = -1,708^\circ$, $|\Delta\vartheta / H| = 0,114^\circ \text{ m}^{-1}$



- 7.13** 1. $I_{T1} = \frac{b^4}{46,19}$, $I_{T2} = \frac{\pi D_m^3 d_2}{4} = I_{T1} \implies d_2 = 1,93 \text{ mm}$, $I_{T3} = c^3 d_3 = I_{T1} \implies d_3 = 2,41 \text{ mm}$
 2. $A_1 = \frac{1}{2} b \cdot b \sqrt{\frac{3}{4}} = 2121,76 \text{ mm}^2$, $A_2 = \pi((r_a - r_2)^2) = \pi((d_m + d_2)^2 - (d_m - d_2)^2) = 424,43 \text{ mm}^2$, $A_3 = (c + d_3)^2 - (c - d_3)^2 = 577,68 \text{ mm}^2$, $W_{T1} = \frac{b^3}{20} = 17\,150 \text{ mm}^3$, $W_{T2} = \frac{\pi d_m^2 d_2}{2} = 14\,852 \text{ mm}^3$, $W_{T3} = 2c^2 d_3 = 17\,327 \text{ mm}^3$

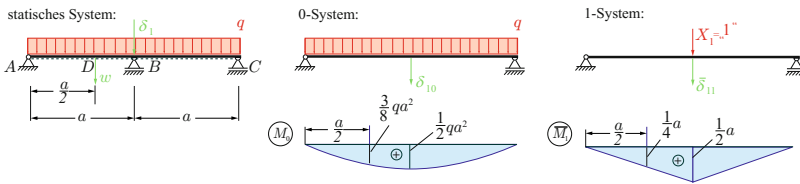
- 7.14** 1./2. $\tau_1 = \frac{M_T}{W_{T, \text{Kreis}}} = 16,83 \text{ MPa} > \tau_{\text{Kleb, zul}}$, $\tau_2 = \frac{M_T}{W_{T, \text{Rechteck}}} = 14,4 \text{ MPa} < \tau_{\text{Kleb, zul}}$.
 Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 7.13.

Lösungen zu Kapitel 8

Lösungen zu Abschnitt 8.3 und 8.4

- 8.1** $W = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k F_j f_{jk} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k F_j \bar{\delta}_{jk} F_k$ **8.2** $f_C = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \frac{Fl^3}{EI} \sqrt{(\frac{141}{500})^2 + (\frac{1}{4})^2} = 0,3769 \frac{Fl^3}{EI}$

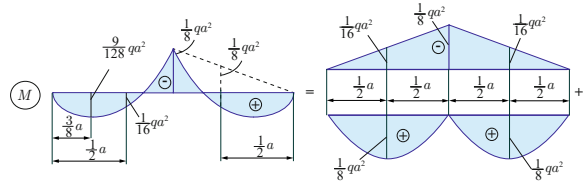
8.3 Grad der statischen Unbestimmtheit $n_s = 1$, Wahl eines statischen Hauptsystems: Bindung am Auflager B entfernen, Statisch Unbestimmte $\bar{X}_1 = „1”$.



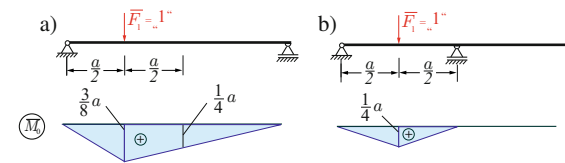
$$\delta_{10} \frac{5qa^4}{24EI}, \quad \bar{\delta}_{11} = \frac{a^3}{6EI}, \quad \text{Kompatibilitätsbedingung: } \delta_1 = \delta_{10} + \bar{\delta}_{11} X_1 = 0 \implies X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\bar{\delta}_{11}} = -\frac{5qa}{4}$$

Kraft- und Verformungsgrößen durch Superposition: Auflagerreaktionen: $A_x = A_{x0} + X_1 \bar{A}_{x1} = 0$, $A_z = A_{z0} + X_1 \bar{A}_{z1} = aq + (-\frac{5qa}{4} \cdot 0,5) = \frac{3qa}{8}$, $C_z = C_{z0} + X_1 \bar{C}_{z1} = aq + (-\frac{5qa}{4} \cdot 0,5) = \frac{3qa}{8}$,

Momente: $M(x) = M_0(x) + X_1 \bar{M}_1(x) = aqx - \frac{qx^2}{2} + (-\frac{5qa}{4}) \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3qax}{8}$, $x_{\max} = \frac{3}{8}a \implies M(x_{\max}) = \frac{9}{128}qa^2$, Zweckmäßige Superposition in „Dreieck“ und „Parabel“-Anteile zur Anwendung des Reduktionssatzes.



3. Zwei (beliebige) statisch bestimmte Systeme für den Reduktionssatz: Fall b) erfordert deutlich (!) weniger Rechenaufwand.



$$\text{a): } w = \int_{(2a)} \frac{\bar{M}_0 M}{EI} dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\bar{M}_0 M}{EI} dx + \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{\bar{M}_0 M}{EI} dx + \int_a^{2a} \frac{\bar{M}_0 M}{EI} dx = \frac{3qa^4}{512EI} - \frac{1}{1536} \frac{qa^4}{EI} + 0 = \frac{1}{192} \frac{qa^4}{EI}$$

$$\text{b): } w = \int_{(a)} \frac{\bar{M}_0 M}{EI} dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\bar{M}_0 M}{EI} dx + \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{\bar{M}_0 M}{EI} dx = \frac{5qa^4}{384EI} - \frac{3qa^4}{384EI} = \frac{1}{192} \frac{qa^4}{EI}$$

8.5 $A_x = 0$, $A_y = \frac{1}{10} F_1$, $M_A = \frac{7}{10} F_1 l$

8.6 Grad der statischen Unbestimmtheit $n_s = 1$, Statisches Hauptsystem: Bindung am Auflager B entfernen,

a) Lastfall q

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{5}{8} qa^4, \quad \bar{\delta}_{11} = \frac{1}{EI} \frac{4}{3} a^3,$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + \bar{\delta}_{11} X_1 = 0,$$

$$\implies X_1 = \frac{15}{32} qa,$$

Auflagerreaktionen

$$A_H = A_{H0} + X_1 \bar{A}_{H1} = 0,$$

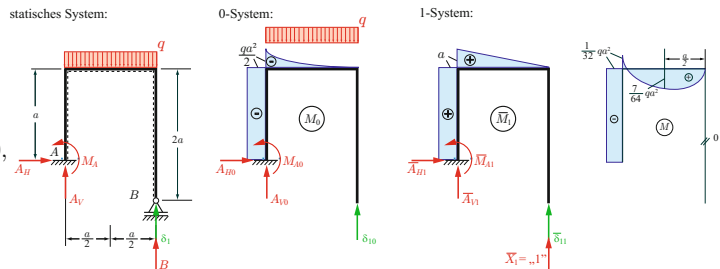
$$A_V = A_{V0} + X_1 \bar{A}_{V1} =$$

$$qa + (-1) \frac{15}{32} qa = \frac{17}{32} qa,$$

$$B = B_0 + X_1 \bar{B}_1 = \frac{15}{32} qa,$$

$$M_A = M_{A0} + X_1 \bar{M}_{A1} =$$

$$-\frac{qa^2}{2} + aX_1 = -\frac{1}{32} qa^2,$$



Momentenverläufe: Vertikaler Bereich: $M_1(x) = -\frac{qa^2}{2} + a \cdot \frac{15}{32} qa = -\frac{1}{32} qa^2$, Horizontaler Bereich:

$$M_2(x) = -\frac{qx^2}{2} + qax - \frac{qa^2}{2} + (a-x) \frac{15}{32} qa, \quad \text{Extremwert: } x_{\max} = \frac{17}{32} a, \quad M_2(x_{\max}) = \frac{685}{2048} qa^2$$

b) Lastfall F

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \frac{29}{48} Fa^3, \quad \bar{\delta}_{11} = \frac{1}{EI} \frac{4}{3} a^3 \implies X_1 = \frac{29}{64} F$$

Auflagerreaktionen

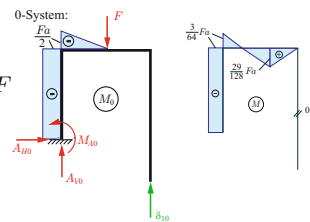
$$A_H = A_{H0} + X_1 \bar{A}_{H1} = 0, \quad A_V = A_{V0} + X_1 \bar{A}_{V1} = F + (-1) \frac{29}{64} F = \frac{35}{64} F$$

$$B_V = B_0 + X_1 \bar{B}_1 = \frac{29}{64} F, \quad M_A = M_{A0} + X_1 \bar{M}_{A1} = -\frac{Fa}{2} + aX_1 = -\frac{3}{64} Fa$$

Momentenverläufe:

$$\text{Vertikaler Bereich: } M_1(x) = -\frac{Fa}{2} + a \cdot \frac{29}{64} F = -\frac{3}{64} Fa$$

$$\text{Horizontaler Bereich: } M_2(x) = \frac{35}{64} Fx - \frac{3}{64} Fa$$



8.8 1. $\varphi_B = F_C a^2 / (2EI)$ 2. $w(x) = M_B x^2 / (2EI)$

8.12 $f_{F_1} = 17Fa^3/(24EI)$, $f_{F_2} = 5Fa^3/(3EI)$, $f_{F_3} = 39Fa^3/(8EI)$, $f_{ges} = 52Fa^3/(10EI)$

8.19 $I_{p1} = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4) = 265\,024,76\text{ mm}^4$, $I_{p2} = \frac{\pi}{2}R^4 = 164\,895,915\text{ mm}^4$, $M_B = -\frac{M_T l_1}{I_{T_1}(l_1/I_{p1} + l_2/I_{p2})} = -4,345\text{ kNm}$, $M_A = M_T + M_B = 4,655\text{ kNm}$, $\vartheta_C = \frac{M_A l_1}{GI_{p1}} = -\frac{M_B l_2}{GI_{p2}} = 1,51^\circ$

8.20 Grad der statischen Unbestimmtheit $n_s = 1$, Statisches Hauptsystem: Pendelstab entfernen. $\delta_{10} = -\frac{8Fl^3}{3EI}$, $\bar{\delta}_{11} = \frac{23l^3}{EI} + \frac{l}{2EA} \implies X_1 = \frac{8Fl^3}{3EI} / (\frac{23l^3}{EI} + \frac{l}{2EA}) = \frac{F}{10} \implies A = \frac{3I}{22l^2}$

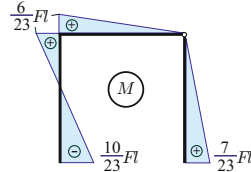
Lösungen zu Abschnitt 8.5

8.21 $w_1 = 27,49 \frac{Fa}{EA}$, $w_2 = 5 \frac{Fa}{EA}$,
 $f = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = 27,94 \frac{Fa}{EA}$

8.22 $f = \frac{8Fl^3}{3EI}$

8.23 $S = 0,1158F$

8.24



8.25 1. $\hat{u} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x)] + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)$
 2. $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \neq 0$ (!), $\gamma_{yz} = 0$, $\implies \hat{u} = E\varepsilon_x^2/2 + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2)/2$

Lösungen zu Abschnitt 8.6

8.26 $w_1 = 23,49 \frac{Fa}{EA}$, $w_2 = 14 \frac{Fa}{EA}$, $f = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = 30,85 \frac{Fa}{EA}$ **8.27** $f = \frac{8Fl^3}{3EI}$

8.28 1./2. $\varphi = \frac{ql^3}{48EI}$ **8.29** siehe Aufg. 8.12

Lösungen zu Abschnitt 8.7

8.30 1. $\underline{f}^e = [\frac{3}{20}q_0l \quad \frac{1}{30}q_0l^2 \quad \frac{7}{20}q_0l \quad -\frac{1}{20}q_0l^2]^T$ 2. $M_l^{\text{ges}} = -\frac{7}{120}q_0l^2$, $M_r^{\text{ges}} = 0$,
 $Q_l^{\text{ges}} = -\frac{9}{40}q_0l$, $Q_r^{\text{ges}} = -\frac{11}{40}q_0l$ **8.31** $Q_l^{\text{ges},1} = 6,63F$, $Q_r^{\text{ges},1} = Q_l^{\text{ges},2} = 0,78F$, $Q_r^{\text{ges},2} = -12F$,
 $M_l^{\text{ges},1} = 1,66Fl$, $M_r^{\text{ges},1} = M_l^{\text{ges},2} = 3,4Fl$, $M_r^{\text{ges},2} = 7,8Fl$

Lösungen zu Abschnitt 8.8

8.32 1. $B = \frac{2R_m}{\varepsilon_m}$, $C = -\frac{R_m}{\varepsilon_m^2}$, $\sigma(\varepsilon) = \frac{2R_m}{\varepsilon_m} \varepsilon - \frac{R_m}{\varepsilon_m^2} \varepsilon^2$, Gl.(8.30.1.3): $\hat{u}(\varepsilon) = \int(\varepsilon) d\hat{u} = \int(\varepsilon) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{R_m}{\varepsilon_m} \varepsilon^2 - \frac{R_m}{3\varepsilon_m^2} \varepsilon^3$, Gl.(8.30.7): $U(\varepsilon) = \hat{u}V = \frac{R_m}{\varepsilon_m} \varepsilon^2 Al - \frac{R_m}{3\varepsilon_m^2} \varepsilon^3 Al$, $\varepsilon = \Delta l/l = u/l : U(u) = \frac{R_m}{l\varepsilon_m} u^2 A - \frac{R_m}{3l^2\varepsilon_m^2} u^3 A$, 3. Gl.(8.155): $\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)}$, $\Pi^{(i)} = U$, $\Pi^{(a)} = -\hat{W} = -Fu$, Gl.(8.160): $\delta\Pi = \delta\Pi^{(i)} + \delta\Pi^{(a)} = \frac{2R_m}{l\varepsilon_m} uA - \frac{R_m}{6l^2\varepsilon_m^2} u^2 A - F = 0 \implies F(u) = \frac{2R_m Au}{l\varepsilon_m} - \frac{AR_m u^2}{l^2\varepsilon_m^2}$, 4. Für $B = E$, $C = 0$ folgt die „Flea“-Formel (2.28) für linear elastisches Verhalten.

8.33 1. Zwei unabhängige Lageparameter

φ_1, φ_2 :

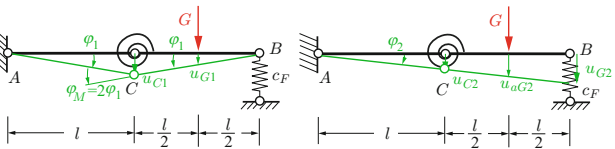
$u_B = u_{B1} + u_{B2} = 0 + \varphi_2 2l$,

$u_G = u_{G1} + u_{G2} = \varphi_1 l/2 + \varphi_2 3l/2$,

$\varphi_M = 2\varphi_1$,

Gesamtpotenzial $\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} =$

$U - \hat{W} = (\frac{1}{2}c_F l^2 4\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c_F 4l^2 \varphi_2^2) - (G\varphi_1 \frac{l}{2} + G\varphi_2 \frac{3l}{2})$, Variation: $\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1} = c_F l^2 4\varphi_1 - G\frac{l}{2} = 0 \implies \varphi_1 = \frac{G}{8lc_F}$, $\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2} = c_F 4l^2 \varphi_2 - G\frac{3l}{2} = 0 \implies \varphi_2 = \frac{3G}{8lc_F}$, Verschiebungen: $u_B = \varphi_2 2l = \frac{3G}{4c_F}$, $u_C = \varphi_1 l + \varphi_2 l = \frac{G}{2c_F}$, 2. Federkraftgrößen: $B = c_F u_B = \frac{3G}{4}$, $M_C = C_M \varphi_M = \frac{G}{4}$



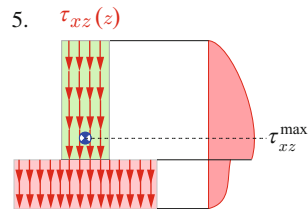
8.34 1. $w(x; w_F) = \frac{w_F}{l}(3x - \frac{4x^3}{l^2})$, $0 \leq x \leq l/2$, 2. $w''(x; w_F) = -\frac{24w_F x}{l^3}$, $0 \leq x \leq l/2$, Gl.(8.103):
 $U = \frac{1}{2} \int_{(l)} EI w''^2(x) dx = 2 \frac{1}{2} \int_0^{l/2} EI \frac{24^2 w_F^2 x^2}{l^6} dx = 24EI \frac{w_F^2}{l^3}$, $\hat{W} = Fw_F$, Gesamtpotenzial $\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} = U - \hat{W} = 24EI \frac{w_F^2}{l^3} - Fw_F$, 3. Variation: $\frac{\partial\Pi}{\partial w_F} = 48EI \frac{w_F}{l^3} - F = 0 \implies F(w_F) = 48EI \frac{w_F}{l^3}$ 4. $\Pi''(w_F) = \frac{48EI}{l^3} > 0$: Potenzial hat Minimum in der Gleichgewichtslage.

Lösungen zu Kapitel 9

- 9.1** $B = F_k = \pi^2 \frac{EI}{s_k^2} = 19\,897,12\text{ N}$ $s_k = \sqrt{4,5}a$, $B = F \cdot 3,46a / (\sin \alpha \cdot 2a + \cos \alpha \cdot 1,15a)$, $\alpha = 26,5651^\circ$ aus Aufgabe 2.4 $\implies F = 5137,72\text{ N}$
- 9.2** 1. Aus Aufgabe 2.6 und Fallunterscheidung: $F_{k_3} = \frac{\pi^2(EI)_3}{s_{K_3}^2} = S_3 = \frac{15}{16}F_3$, $s_{K_3} = l_3 = l$, $F_{k_4} = \frac{\pi^2(EI)_4}{s_{K_4}^2} = S_4 = \frac{5}{8}F_4$, $s_{K_4} = l_4 = 3l/4$, $\implies F_{\max} = \min\{F_3, F_4\} = 1,06 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 2. Nur Stab 4 ist Druckstab: $F_{k_4} = \frac{\pi^2(EI)_4}{s_{K_4}^2} = S_4 = \frac{\Delta s(EA)_4}{l}$ (aus Aufgabe 2.6) $\implies \Delta s = \frac{16\pi^2 I}{9EA}$, 3. Nur Stab 4 ist Druckstab: $F_{k_4} = \frac{\pi^2(EI)_4}{s_{K_4}^2} = S_4 = \frac{3}{4}\alpha_T \Delta T(EA)_4$ (aus Aufgabe 2.6) $\implies \Delta T = \frac{64\pi^2 I}{27\alpha_T A l^2}$
- 9.3** Ersatzfedersteifigkeit für Balken: Tabelle 4.4, Fall 2: $c_B = \frac{48(EI)_1}{(2l)^3} = \frac{6(EI)_1}{l^3}$, Ersatzsystem mit Reihenschaltung für Stab und Feder, vgl. (2.33): $\Delta l_2 \stackrel{!}{=} -\Delta l_B$, $\Delta l_B = -N_B/c_B$, $-N_2 = F_{krit} = \frac{(EI)_2 \pi^2}{l_2^2}$, $\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{(EA)_2} + \alpha_T \Delta T l_2$, $\Delta T = -\frac{N_2}{\alpha_T l_2} \left(\frac{1}{c_B} + \frac{l_2}{(EA)_2} \right) = \frac{\pi^2}{9\alpha_T}$
- 9.4** 1. $\dot{w}(x) = B(\cos(\frac{2\pi x}{l}) - 1)$ 2. $EI \int_{(l)} w''(x)^2 dx = \frac{-2B^2 \pi^3 (4\pi - \sin(4\pi)) EI}{l^3}$, $\int_{(l)} w'(x)^2 dx = \frac{-4B^2 \pi + B^2 \pi \sin(4\pi)}{2l}$, $F_{RQ} = \frac{\int_{(l)} EI w''(x)^2 dx}{\int_{(l)} w'(x)^2 dx} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = F_k$
- 9.5** $w(x) = B(\cos(\frac{\pi x}{2l}) - 1)$, $w'(x) = -\frac{\pi B}{2l} \sin(\frac{\pi x}{2l})$, $w''(x) = -\frac{\pi^2 B}{4l^2} \cos(\frac{\pi x}{2l})$, Gl.(9.29): $\Pi^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{(l)} EI w''^2(x) dx = \frac{EI \pi^4 B^2}{64l^3}$, $\Pi^{(a)} = -\frac{1}{2} F \int_{(l)} w'(x)^2 dx = -\frac{F \pi^2 B^2}{16l}$, $\Pi(B) = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)}$, $\Pi'(B) = \frac{B \pi^2}{32l} (F_k - F) = 0$, $\Pi''(B) = \frac{\pi^2 (F_k - F)}{32l}$, weiter mit (9.25) und wie in Abb. 9.20.b.
- 9.6** 1. $C_F = 0$: kein Euler Fall (KEF), $C_F = \infty$: 2.EF, 2. $C_F = 0$: 1.EF, $C_F = \infty$: 3.EF, 3. $C_M = 0$: 2.EF, $C_M = \infty$: 3.EF, 4. $C_M = 0$: KEF, $C_M = \infty$: KEF, 5. $C_M = 0$: 1.EF, $C_M = \infty$: KEF, 6. $C_M = 0$: 3.EF, $C_M = \infty$: 4.EF
- 9.9** 1. $w(x) = e(\sin(\kappa x)/\sin(\kappa l) - x/l)$ 2. $F_k = EI \pi^2 / l^2$ **9.10** $C_M = EI/l$
- 9.16** 1. $C_M = \frac{3EI}{l^2}$, $\bar{C}_M = 6$, $\alpha_M = \frac{1}{7}$, Fall 5: $\bar{s}_K = 1 + 1,2\alpha_M - 0,2\alpha_M^2 = 1,167$, $F_k^{ant.} = 0,7342 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, 2. $C_M = \frac{2EI}{l}$, $\bar{C}_M = \frac{C_M L}{EI} = 2$, $\alpha_M = \frac{1}{3}$, Fall 6: $\bar{s}_K = 0,5 + 0,5\alpha_M - 0,3\alpha_M^2 = 0,633$, $F_k^{sym.} = 2,493 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$
- 9.12** $F_k = 4EI \pi^2 / l^2$ **9.13** $q_{krit} = 2c$, $c = 3EI(\sqrt{2}l^3)$
- 9.14** 1. $\dot{w}(x) = q(x^4 - 4lx^3 + 8l^3x)$ 2. $F_k = 2,497EI/l^2 = 0,2530EI \pi^2 / l^2$
- 9.15** 1. $\dot{w}(x) = q(x^4 - 2lx^3 + l^3x)$ 2. $F_k = 1,0013EI \pi^2 / l^2$

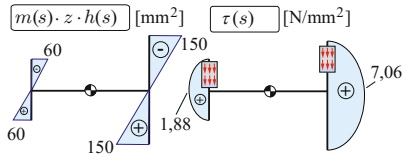
Lösungen zu Kapitel 10

- 10.1** 1. $\bar{y}_S = 0$, $\bar{z}_S = 1,7\text{ cm}$ 2. $\hat{I}_y = 22\,473,32\text{ cm}^4$, $\hat{I}_z = 24\,429,02\text{ cm}^4$ 3. $\hat{\sigma}_{unten} = -7,33\text{ MPa}$, $\hat{\sigma}_{oben} = 9,75\text{ MPa}$, $\hat{\sigma}_{unten} = -14,67\text{ MPa}$, $\hat{\sigma}_{oben} = 9,75\text{ MPa}$ 4. $f = \frac{F l^3}{3EI_y} = 0,7594\text{ mm}$ $\hat{I}_y = \int_{-z_s}^{h-z_s} (e^{a(z+z_s)} \cdot z^2) dz = bh^3 \cdot (0,138 \cdot e^2 - 0,7935)$, $\hat{I}_z = \int_{-z_s}^{h-z_s} (e^{a(z+z_s)} \cdot \frac{b^3}{12}) dz = \frac{hb^3}{24} (e^2 - 1)$
- 10.5** 1. $\bar{y}_S = 0$, $\bar{z}_S = 19,38\text{ mm}$
 2. $\hat{S}_y 1(z) = \int_{-z_s}^{z_1} (m_1 b_1 z) dz = 10\text{ mm} \cdot (\frac{1}{2} z_1^2 - 187,79\text{ mm}^2)$ mit $-\bar{z}_S \leq z \leq h_1 - \bar{z}_S$,
 $\hat{S}_y 2(z) = \hat{S}_y 1(z) + \int_{h_1 - z_s}^{z_2} (m_2 b_2 z) dz = -1876\text{ mm}^3 + 33,34\text{ mm} \cdot (\frac{1}{2} z^2 - 0,19\text{ mm}^2)$
 mit $h_1 - \bar{z}_S \leq z \leq (h_1 - \bar{z}_S) + h_2$
 3. $\hat{I}_y = 37\,572,12\text{ mm}^4$,
 4. $\tau(z_{P_1}) = 0$, $\tau(z_{P_2}) = 15,31\text{ MPa}$,
 $\tau(z_{P_3}) = 19,97\text{ MPa}$, $\tau(z_{P_4}) = 0$

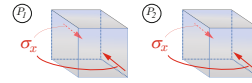


- 10.6 1. $\bar{y}_s = 17,10 \text{ mm}$, $\bar{z}_s = 0$, $\hat{I}_y = 106\,130,5 \text{ mm}^4$, $\hat{I}_z = 258\,556,29 \text{ mm}^4$, $\hat{\sigma}_{P_1} = \sigma_{P_1} = -282,67 \text{ MPa}$, $\hat{\sigma}_{P_2} = -424,01 \text{ MPa}$, $\sigma_{P_2} = -706,82 \text{ MPa}$

2.



3.



4. $d_{kleb} = \frac{t_s}{\tau_{zul}} = 1,06 \text{ mm}$

Literaturverzeichnis

1. ASSMANN, B.; SELKE, P.: *Technische Mechanik: Band 1 Statik*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 18. Auflage, 2006
2. BALKE, H.: *Einführung in die Technische Mechanik, Festigkeitslehre*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2010
3. BÖGE, A.: *Technische Mechanik, Statik, Dynamik, Fluidmechanik, Festigkeitslehre*, 25. Auflage, Viewegs Fachbücher der Technik, Vieweg, Braunschweig, 2001
4. BRONSTEIN, I.N.; SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*, 16. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Zürich, 1976
5. BRUHNS, O.: *Elemente der Mechanik II, Elastostatik*, Shaker Verlag, 2002
6. DINKLER, D.: *Grundlagen der Baustatik: Modelle und Berechnungsmethoden für ebene Stabtragwerke*, 3. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014
7. GROTE, K.-H.; FELDHUSEN, J. (HRSG.): *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*, 22. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 2007
8. ESCHENAUER, H., SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie I, Grundlagen, Scheiben und Platten*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1986
9. GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHRÖDER, J.; WALL, A.: *Technische Mechanik 2 – Elastostatik*, 10. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 2009
10. HABERHAUER, H.; BODENSTEIN, F.: *Maschinenelemente*, Springer-Verlag, Berlin, 2006
11. HAUPT, P.: *Einführung in die Mechanik*, Vorlesungskript, Universität Kassel, 1994
12. HIBBELER, R.C.: *Technische Mechanik 2, Festigkeitslehre*, 5. Auflage, Pearson Studium, München, 2005
13. HILL, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1998
14. HOLZMANN, G.; MEYER, H.; SCHUMPICH, G.: *Technische Mechanik 3 Festigkeitslehre*, 8. Auflage, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 2008
15. ISSLER, L.; RUOSS, H.; HÄFELE, P.: *Festigkeitslehre - Grundlagen*, Springer-Verlag, Berlin, 1995
16. KINDMANN, R.; KRÜGER, U.: *Stahlbau, Teil 1: Grundlagen, mit Beispielen nach Eurocode 3*, Ernst & Sohn, 2013
17. KREISSIG, R.: *Einführung in die Plastizitätstheorie: mit technischen Anwendungen*, Fachbuchverlag, Leipzig-Köln, 1992
18. MAHNKEN, R.: *Identification of material parameters for constitutive equations*, in: Encyclopedia of Computational Mechanics, Vol. 2, Chapter 19, Eds. E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, 2. Auflage November 2017, 4024 Seiten, Hardcover, Wiley and Sons Ltd, ISBN: 978-1-119-00379-3
19. MAHNKEN, R.: *Lehrbuch der Technischen Mechanik - Band 1: Starrkörperstatik*, Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 2016
20. MAHNKEN, R.: *Lehrbuch der Technischen Mechanik, Dynamik*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2011
21. MAYR, M.: *Technische Mechanik: Statik - Kinematik - Kinetik - Schwingungen - Festigkeitslehre*, 3. Auflage, Hanser-Verlag, 2002
22. PESTEL, E.; WITTENBURG, J.: *Technische Mechanik: Band 2 Festigkeitslehre*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992
23. PFLÜGER, A.: *Statik der Stabtragwerke*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1978

24. PFLÜGER, A.: *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1975
25. RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R.: *Description of stress-strain curves by three parameters*, Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC, 1943
26. RECKLING, K.-A.: *Mechanik II, Festigkeitslehre*, Vieweg 1974
27. WITTEL, H.; MUHS, D.; JANNASCH, D.; VOßIEK, J.: *Roloff/Matek Maschinenelemente*, 19. Auflage, Vieweg und Teubner, Wiesbaden, 2009
28. SCHNEIDER, K.J.: *Bautabellen für Ingenieure*, 19. Auflage, Werner Verlag, 2010
29. STEIN, E.: *Vorlesungen über Technische Mechanik - Elastostatik*, Universität Hannover, 1996
30. SURESH, S.: *Fatigue of Materials*, Cambridge University Press, Sec. Edition, Cambridge, 1998
31. SZABO, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996
32. TIMOSHENKO, SP.: *History of Strength of Materials*, Dover, 1983
33. VISMANN, U. (HRSG.): *Wendehorst Bautechnische Zahlentafeln*, 24. Auflage, Vieweg und Teubner, 2011
34. WEBER, C.; GÜNTHER, W.: *Torsionstheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1958
35. WELLER, R.; SHORTLEY, G. H.; FRIED, B.: *The Solution of Torsion Problems by Numerical Integration of Poisson's Equation*, J. Appl. Phys. 11, 283, 1940
36. WINKLER, J.; AURICH, H.: *Taschenbuch der Technischen Mechanik*, 8. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, Carl Hanser Verlag, 2006
37. WRIGGERS, P.; NACKENHORST, U.; BEUERMANN, S.; SPIESS, H.; LÖHNERT, S.: *Technische Mechanik kompakt*, 1. Auflage, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 2005
38. ZURMÜHL, R.; FALK, S.: *Matrizen I, Grundlagen*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1992

Index

- Äquivalenzbedingungen, 38, 102, 104, 137, 159, 183, 259, 274, 303
- Übergangsbedingungen, 40, 42, 43, 46, 106, 116, 122, 262, 275, 290
- Überlagerungstabellen, 350
- Abzählkriterium, 22, 26, 29
- Annahmen, 6
- zum Schub, 234, 243
 - zum Zug/Druck-Stab, 10, 14, 37
 - zur Biegung, 99
 - zur schubweichen Biegung, 259
 - zur Torsion, 272, 273, 286, 287, 297, 302
- Arbeit
- Äußere, 327
 - Eigen-, 331, 332, 400
 - Endwert-, 328
 - Formänderungs-, 331, 400
 - Fremd-, 332
 - komplementäre, 328
 - passive, 332
 - Verschiebungs-, 332
 - Wegintegral, 329
- Arbeitssatz, 337
- der Elastostatik für Stabsysteme, 341
 - für linear-elastisches Materialverhalten, 337
 - komplementärer, 337
- Aufschumpfen, 219
- Ausdehnungskoeffizient
- chemischer Längen-, 192
 - chemischer Volumen-, 192
 - thermischer Längen-, 18, 192
 - thermischer Volumen-, 192
- Ausgangszustand, 183, 406, 408
- Axiale Flächenmomente 2. Ordnung
- für einfache Flächen, 72, 73
- Axialsymmetrie, *siehe* Rotationssymmetrie
- Balken, 95
- achse, 95, 101
 - gekrümmter, 97, 347
 - gerader, 97
 - Gesamtpotenzial für den elastischen, 421
 - Krümmung, 96
 - Krag-, 261
 - schubstarrer, 238, 259, 312
 - schubweicher, 259
 - schwach gekrümmter, 97, 347
 - statisch bestimmter, 105
 - statisch unbestimmter, 115
 - Symmetrie- und Antisymmetriebedingungen, 125
- Bauteilsicherheit, 19, 20
- Bemessung, *siehe* Dimensionierung
- Bernoulli
- Annahmen nach, 101, 136
 - Jakob, 4, 96
- Beton, Schwinden von, 192, 227
- Betti, Satz von, 332
- Beulen, 405
- Biege
- balken, 95
 - knicken, 426
 - linie, 96
 - linie, Differentialgleichung der, 105
 - stab, 95
 - steifigkeit, 105, 408
 - steifigkeit, ideelle, 462
 - theorie, technische, 95
- Biegung, 312
- Äquivalenzbedingungen, 102
 - Annahmen, 99–101
 - gerade, 99
 - gerade, mit Normalkraft, 121
 - Grundgleichungen, 103
 - Hybridbalken, 443
 - Kinematik infolge, 101
 - reine, 96, 100
 - schiefe, 135

- schubstarre, 98
- schubweiche, 98
- Temperaturbelastung, 95, 159
- Voraussetzungen zur, 98
- Boltzmann, Superpositionsprinzip nach, 467
- Bredt
 - sche Formel, 1., 290, 343
 - sche Formel, 2., 290, 343
- Castigliano
 - 1. Satz von, 368
 - 2. Satz von, 375
- Cauchy, 10, 17
- chemische Verzerrungen
 - Alterung, 209
 - Aushärten, 196
 - Schwinden, 192
- Coulomb, 5, 272, 276
- Dachbinder, 134, 364
- Dehnmessstreifen-Rosette, 212, 228
- Dehnung, 14, 186
 - örtliche, 38
 - chemische, 192
 - homogene, 14
 - logarithmische, 15, 31
 - plastische, 17
 - Quer-, 188
 - Stauchung, 14
 - technische, 14, 31
 - thermische, 18, 40, 192
 - Umfangs-, 214
 - wahre, 15, 31
- Deviationsmoment, 57, 58
- Differentialgleichung(en) für
 - Verdrehung infolge Torsion, 275, 290, 300
 - Verschiebung der geraden Biegung, 105
 - Verschiebung der schubweichen, geraden Biegung, 262
 - Verschiebung des inhomogenen Zug/Druck-Stabes, 41
 - Verschiebungen der geraden Biegung mit Normalkraft, 122
 - Verschiebungen der schiefen Biegung mit Normalkraft, 139
- Dimensionierung, 19–21, 24, 107, 291, 454, 456
 - des Dübelabstandes, 456
 - von Wellen, 282
 - Vor-, 20, 94, 116
- Drehmittelpunkt, 270, 334
- Drillung, 269, 275, 295, 298
- Durchbiegung, 96
- Eigenform, 407
- Eigenwert, 407, 408, 462
- Eigenwertproblem, 407, 409
- Einflusszahl, 156, 333, 369
- Einschnürung, 11, 16
- Elastizität
 - gesetz für Schub, 189
 - gesetz für eine Volumendehnung, 191
 - grenze, 16
 - modul, 18, 188–190
- Energie, 335
 - Formänderungs-, 335
 - komplementäre Formänderungs-, 335
 - spezifische Formänderungsenergie, 335
- Engesser, Satz von, 368
- Ergänzungsarbeit, *siehe* komplementäre Arbeit
- Ergänzungsenergie, *siehe* komplementäre Formänderungsenergie
- Ersatzsystem, statisches, 126, 410, 413
- Euler, 4, 96
 - Fälle, vier, 412
 - Fall, der 1., 431
 - Fall, der 2., 406
 - Fall, der 3., 411
 - Fall, der 4., 429
 - Hyperbel, 418
 - sche Knickspannung, 418
 - sche Knickstab, der, 406
- Fachwerk, 342, 349
- Feder, 330
 - steifigkeit, 21, 28, 285
 - Dreh-, 341, 399, 413–415
 - Ersatz-, 413
 - Schrauben-, 284, 341, 399, 413, 415
- Festigkeits
 - kriterium, 3, 19
 - nachweis, 12, 220
- Finite-Elemente-Methode, 98, 197, 380, 386
 - Assemblierung, 391
 - Diskretisierung, 386
 - Elementlastmatrix, 388
 - Rückrechnung, 394
 - Steifigkeitsmatrix, 390
- Fläche, 57
 - Hohl-, 289, 297
 - schwach veränderliche, 37, 96, 271
- Flächen
 - momente, 57
 - momente, ideelle, 434
 - trägheitsmatrix, 58, 76
 - trägheitsmoment, axiales, 57
 - trägheitsmoment, ideales polares, 435
 - trägheitsmoment, polares, 57, 58, 274
 - trägheitsmomente, 57
- Flächenmomente 2. Ordnung

- Satz von Steiner, 75
 Verdrehung der Achsen, 83
 Verschiebung der Achsen, 75
 Fließgelenktheorie, 99
 Fließgrenze, 16, 19, 221
- Galilei, 4, 13
 Gaussscher Integralsatz, 472, 473
 Gebrauchsfähigkeit, 19
 geometrisch Unbestimmte, 167
 geometrische Bestimmtheit, 167
 Gleichgewichtslage, 420
 indifferente, 420
 instabile, 420
 stabile, 420
 Gleitung, 98, 185, 186, 189, 259, 260, 274, 288, 290
 mittlere, 259
 grafo-analytisch, 24, 246, 256, 455, 458
 Grundgleichungen, 6, 238
 der geraden Biegung, 103
 der geraden Biegung mit Normalkraft und Temperatur, 159
 der schiefen Biegung des Hybridbalkens, 443
 der schiefen Biegung mit Normalkraft, 137
 der Torsion, 274, 289, 460
 der Torsion beliebiger Querschnitte, 304
 der Torsion dünnwandiger geschlossener Querschnitte, 289
 der Torsion von Kreis- und Kreisringquerschnitten, 274
 des inhomogenen Zug/Druck-Stabes, 40
 des Thermo-Chemo-Elastizitätsproblems, 197
 homogenen Zug/Druck-Stabes
 des statisch bestimmten, 21
 des statisch unbestimmten, 25
- Haupt
 -dehnungen, 210
 -deviationsmomente, 89
 -normalspannungen, 200
 -normalspannungsrichtungen, 200
 -schubspannungen, 202
 -schubspannungsrichtungen, 202
 Hauptachsen, *siehe* Hauptträgheitsachsen
 Hauptsystem
 geometrisch bestimmtes, 167, 170
 geometrisch unbestimmtes, 170
 statisch bestimmtes, 51, 52, 154, 371
 statisch unbestimmtes, 156
 Hauptträgheits
 -achsen, 85, 86
 -achsen, Winkel der, 86
 -achsen, ideelle, 440
 -momente, 86
 -momente, ideelle, 440
 Hencky, 224
 Hermite-Polynome, 388
 Hilfskräfte, Methode der, 344, 347
 homogener Dehnungszustand, 14
 Hooke, 17, 18, 39
 -sche Gerade, 17
 -sches Gesetz, 17, 39, 188, 336
 -sches Gesetz, dreidimensionales, 188
 -sches Gesetz, verallgemeinertes, 193
 Huber, 224
 Hybrid
 -balken, Querkraft in, 454
 -balken, Stabilität elastischer, 462
 -balken, Torsion in, 459
 -balken, schiefe Biegung von, 443
 -querschnitte, 433
 -querschnitte, ideelle Querschnittswerte, 434
 -strukturen, 433
 Hypothese
 der größten Gestaltänderungsenergie, 224
 Deviatorspannungs- nach Mises, 224
 Normalspannungs- nach Rankine, 222
 Oktaederschub-, 224
 Schubspannungs- nach Tresca, 222
- ideelle Flächenmomente 2. Ordnung
 Verdrehung der Achsen, 439
 Imperfektionen, 426
 Invarianten
 der Flächenhauptträgheitsmatrix, 86
 der Spannungsmatrix, 199, 200, 205
 der Verzerrungsmatrix, 211
- Joule, 329
- Kelvin, William Thomson, 18, 307
 Kerben, 11
 Kerbspannungsfaktor, *siehe* Formzahl
 Kernfläche, 149
 Kesselformel, 216, 219
 Kinematik
 der Bernoulli-Biegetheorie, 101, 136
 der Torsionstheorie, 272, 286, 287, 302
 des inhomogenen Zug/Druck-Stabes, 37
 des homogenen Zug/Druck-Stabes, 14
 des schubweichen Balkens, 259
 im Raum, 183
 von Festkörpern, 14
 kinematische Variable, 38, 102, 122, 137, 260, 273, 287
 Kippen, 405
 Knicken, 405
 Biege-, 426
 Knickform, 407

- Knicklänge, 408, 409, 412, 462
- Kombinierte Beanspruchung, 312
- Kompatibilitätsbedingung, 22, 25, 26, 52, 154–156
- Komplementarität, 376, 379, 381
- Kompressionsmodul, 191
- Koordinate, Umlauf-, 285
- Koordinaten
 - kartesische, 60
 - Polar-, 60
- Kraft
 - größenverfahren, 51, 154, 353
 - komponente, 329
 - Temperatur-, 41
 - virtuelle, 378
- Kragträger, 262, 342, 346
- kritische Last, 408, 462

- Leistung, 282
 - Abtriebs-, 282
 - Antriebs-, 282
 - Verlust-, 282
- lineare Näherung, 37, 38, 180, 239, 272, 408, 469
- Material
 - gleichungen, *siehe* Stoffgesetze
 - prüfung, 15
 - probe, 15
 - funktional gradiertes, 434
- Materialparameter, 18, 19, 188, 189, 191
 - Bestimmung der, 18, 217, 231
- Materialverhalten
 - chemisches, 192
 - duktils, 220
 - elastisch-plastisches, 17
 - Idealisierung, 17
 - isotropes, 188
 - linear-elastisches, 9, 17, 190, 368
 - plastisches, 400
 - sprödes, 220
 - thermisches, 192
- Maxwell, Satz von, 333
- Mehrbereichsaufgabe, 42, 45, 105, 275
- Menabrea, Satz von, 372
- Minimum
 - der komplementären Formänderungsenergie, 372
- Mohr
 - scher Dehnungskreis, 211
 - scher Spannungskreis, 204
- Momentanzustand, 183
- Nachbarzustand, 406–408
- neutrale
 - Ebene, 100, 101
 - Faser, 100, 104
- Normal
 - kraft, 9
 - spannung, 10
- Nulllinie, 100

- Parallelschaltung, 26–28, 46
- Periodizitätsbedingungen, 84, 199
- Plastomechanik, 18
- Poisson, 188, 305
 - sche Differentialgleichung, 305
 - sche Zahl, *siehe* Querkontraktionszahl
- Polplan, 22, 26
- Potenzial, 398
 - funktionen, 398
 - für den elastischen Balken, 421
 - Minimum der potenziellen Energie, 372
- Prandtl
 - Membrangleichnis von, 307
- Prinzip
 - der virtuellen Kräfte, 378, 381, 473
 - der virtuellen Verschiebungen, 378, 379, 386, 472
 - von de Saint-Venant, 11, 234
- Projektion
 - einer Kraft, 374
 - einer Verschiebung, 329, 341, 345, 368
- Proportionalitätsgrenze, 16

- Querkontraktion, 100, 101
- Querkontraktionszahl, 189, 190
 - Bedingung für die, 191
- Querschnitte
 - dünnwandige, 83, 242, 273, 285, 289, 291, 296, 297, 300, 301, 454, 455, 457, 459
 - dickwandige, 236, 456
- Querschubzahl, 260, 340

- Ramberg und Osgood, 17
- Randbedingungen
 - kinematische, 39, 40, 43, 45, 106, 116, 122, 262, 275, 290, 394, 472, 473
 - statische, 40, 42, 43, 45, 106, 116, 122, 262, 275, 290, 472, 473
- Rankine, Hypothese nach, 222
- Rayleigh-Quotient, 424
- Reduktionssatz, 345, 348, 358, 383
- Referenzmodul, 434
- Reißlänge, 48
- Reihenschaltung, 26, 46
- reine(r)
 - Biegung, 96, 312
 - Druck, 10, 312
 - Schub, 190, 204, 208
 - Torsion, 269, 301, 312
 - Zug, 10, 204, 208, 220, 312
- Reziprozitätssätze, 332, 333
- Ringintegral, 289

- Rohr, 36
 -dünnwandiges, 230
 -dickwandiges, 44
 Rotationssymmetrie, 214, 272
- Scheibe, 190, 197, 198
 Scherung, *siehe* Gleitung
 Schiebung, *siehe* Gleitung
 Schlankheitsgrad, 418
 Schnitt
 -ebene, 177
 -fläche, 11
 -richtung, 12
 -ufer, 180
 Schräg-, 12
 Schub
 -mittelpunkt, 252–254, 334, 457
 -mittelpunkt, grafo-analytisch, 256
 -modul, 189, 190
 -steifigkeit, 262
 -verformung, 98, 248
 Schubfluss, 237, 239, 243–245, 247, 253, 254
 Schubkorrekturfaktor, *siehe* Querschubzahl
 Schubkraft, Teil-, 253
 Schubspannung
 -sring, 182, 236
 -strajektorien, 237, 239, 240
 grafo-analytische Berechnung, 246
 in dünnwandigen Querschnitten, 242
 in dickwandigen Querschnitten, 236, 239
 in orthogonalen Schnitten, 182
 mittlere, 233
 Momentengleichgewicht, 181
 Vorzeichenregelung, 243
 Schubspannungs
 -Trajektorien, 248
 Schwerpunkt, 9, 57
 elastischer, 434
 ideeller, 434
 Sicherheit, 19, 21, 25
 Simpsonsche Regel, 256
 Skalarprodukt, 329
 Spannung
 Druck-, 11
 inhomogene, 43, 46
 Kerb-, 11
 kritische, 19, 20
 lokale, 10
 mittlere, 10, 180
 Nenn-, 11
 Normal-, 10, 12, 40, 261, 444
 Radial-, 214
 Schub-, 12, 233, 455, 456
 Umfangs-, 214
 Vergleichs-, 220
 Vorzeichenregelung, 180
 wahre, 11, 16
 Zug-, 11
 zulässige, 19
 Spannungen
 Drehung des Koordinatensystems, 198
 Eigen-, 196
 Kräftegleichgewicht, 181
 Thermo-, 195, 212
 Spannungs
 -Dehnungsdiagramm, 16
 -koeffizienten, 179
 -matrix, 179
 -matrix, Zerlegung, 224
 -nachweis, 19, 43, 106, 107, 220
 -nachweis in einer Klebschicht, 247
 -nachweis in einer Schweißnaht, 247
 -vektor, 178
 Spannungsfunktion, *siehe* Torsionsfunktion
 Spannungszustand
 deviatorischer, 224
 ebener, 197, 209
 homogener, 10
 hydrostatischer, 194, 204, 208, 224
 räumlicher, 177
 volumetrischer, *siehe* hydrostatischer
 St.-Venant, 5, 11, 269, 302
 Stabachse, 9
 Stabilität, 19, 420, 429–431
 Ersatzsystem, 410
 Kriterium, 420
 kritische Last, 406
 Starrkörperverschiebung, 38, 39, 183, 302, 391
 statisch Unbestimmte, 51, 154, 353, 358, 371, 372
 statisches Moment, 57, 239, 240, 244, 246, 247
 Stauchung, 15
 Steifigkeit
 Biege-, 105
 Dehn-, 17, 21, 41, 42
 Ersatzfeder-, 410
 Feder-, 17, 285
 Schub-, 262
 Torsions-, 275
 Steiner, Satz von, 75
 Stoffgesetze, 17, 39, 188
 Streckgrenze, 16
 Substitution, 60
 Superposition, 24, 40, 51, 121, 154, 167, 332, 467
 das Boltzmannsche -sprinzip, 467
 Taylor-Reihe, 15, 469
 Temperatur
 -belastung, 95, 159, 347

- kraft, 41, 160
- moment, 160
- gleichförmige Erwärmung, 18, 20
- Temperaturdehnung, *siehe* thermische Dehnung
- Temperaturdehnungs-Gesetz, 18, 19, 192
- Theorie
 - 1. Ordnung, 97, 331
 - 2. Ordnung, 97, 99, 405, 406
 - 3. Ordnung, 97
- Thomson, Strömungsgleichnis nach, 307
- Torsion, 269, 312
 - Annahmen, 272, 273, 286, 287, 297, 302
 - beliebiger Querschnitte, 302
 - dünnwandiger geschlossener Querschnitte, 285
 - dünnwandiger offener Querschnitte, 296
 - Grundgleichungen der, 274, 289, 460
 - in Schraubenfedern, 284
 - ohne Wölbbehinderung, 271
 - Rand- und Übergangsbedingungen, 276
 - reine, 269, 301
 - von Wellen, 282
 - Voraussetzungen zur, 271, 272
- Torsions
 - funktion, 304, 305
 - steifigkeit, 275
 - theorie, technische, 269
 - trägheitsmoment, 290, 291, 298–300, 306
 - widerstandsmoment, 291, 300
- Träger, 95
 - Bogen-, 347
- Trägheitsradius, 58, 418
- Traglasttheorie, 99
- Tresca, Hypothese nach, 222
- Tymoschenko, 4, 259
- Umformgrad, *siehe* Dehnung, wahre
- Umwandlungen, 192
- Verformung, 1
 - große, 97
 - kleine, 97, 99, 102, 136
 - kritische, 20
 - zulässige, 19
- Verformungs
 - ebene, 96, 97, 99, 135, 140, 142
 - kriterium, 3, 19
 - nachweis, 19
- Vergleichsspannung, 220, 222, 224
- Verlustfaktor, 282
- Versagen, 220
- Verschiebung, 183
 - Axial-, 291
 - resultierende, 121, 140, 142, 446
 - Starrkörper-, 38, 39, 183, 391
 - virtuelle, 378
- Verschiebungs
 - differential, 329
 - plan, 22, 24, 26, 30
 - vektor, 183
- Verwölbung, 271
 - Berechnung der, 291
- Verwindung, 269
- Verzerrungen, 186
 - Dehnungen, 185
 - Drehung des Koordinatensystems, 210
 - Winkel-, 185
- Verzerrungsmatrix, 186
- Verzerrungszustand
 - ebener, 210, 211
 - räumlicher, 184
- Verzweigungspunkt, 407, 423
- virtuelle
 - Kräfte, 378, 379, 381–383
 - Verschiebungen, 378–380
- Volumendehnung, 187
 - chemische, 192
 - elastische, 191
 - thermische, 192
- Volumendifferential, 11, 177, 179–181, 184, 236, 237
- von Mises, 224
- Voraussetzung, 5
- Wärmedehnung, *siehe* thermische Dehnung
- Wölbfreiheit, Bedingung für, 291
- Weggrößenverfahren, 166
- Werkstoff
 - homogener, 39, 188
 - inhomogener, 39, 188
 - isotroper, 188
- Widerstandsmoment
 - Biege-, 106
 - Torsions-, 276, 291
- Wirkungsgrad, 282
- Zentrifugalkräfte, 49
- Zentrifugalmoment, 57
- Zug/Druck, 9, 37, 312
 - reiner, 10
- Zug/Druck-Stab
 - Annahmen, 10, 14, 37
 - Dehnungen, 38
 - der statisch bestimmte, 21, 41
 - der statisch unbestimmte, 25, 45
 - Gleichgewichtsbedingung, 37
 - Spannungen, 38
 - Stoffgesetze, 39
 - Voraussetzungen zum homogenen, 20
 - Voraussetzungen zum inhomogenen, 37
- Zugfestigkeit, 16
- Zugversuch, 15, 16
 - von Kunststoffproben, 15
 - von Metallproben, 15