Anhang – Lösungen der Übungsaufgaben

L1.1

$$a = 337, \quad b = 683, \quad c = 240 \cdot \frac{1}{4} = 60, \quad d = 1\,000 : \frac{1}{4} = 4\,000, \quad e = 3.$$
$$f = 2\,519{,}16, \quad g = 2\,172{,}28, \quad h = 7\,975{,}448, \quad j = 710{,}8\overline{24}.$$

L1.2 Minus ist nicht kommutativ, es ist $1 - 2 \neq 2 - 1$, und auch nicht assoziativ, $(1-2)-3 \neq 1-(2-3)$. Daher gibt es die „Minusklammer".

Auch die Division ist weder kommutativ, $1 : 2 \neq 2 : 1$, noch assoziativ, $(1 : 2) : 3 \neq 1 : (2 : 3)$. Deswegen ist es bei Doppelbrüchen wichtig, den Hauptbruchstrich durch seine Lage und größere Länge zu kennzeichnen, $\frac{\frac{1}{2}}{3} \neq \frac{1}{\frac{2}{3}}$. Der Ausdruck $1 : 2 : 3$ ist somit ohne Klammern eigentlich gar nicht definiert – auch wenn ein Computerprogramm ihn verstehen mag, weil es einfach von vorne nach hinten vorgeht, diesen Ausdruck somit als $(1 : 2) : 3$ rechnet.

L1.3

$$x_1 = \frac{ab}{a-b}, \text{ nur lösbar für } a \neq b,$$
$$x_2 = \frac{abc}{ab-c}, \text{ nur lösbar für } c \neq ab,$$
$$x_3 = \frac{bd}{d-bc} - a, \text{ nur lösbar für } d \neq bc,$$
$$x_4 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{b}}, \text{ nur lösbar für } \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{b} \geq 0.$$

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018
J. Balla, *Differenzialrechnung leicht gemacht!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57299-3

L1.4 $s = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45$.
Beweis durch vollständige Induktion über n:
Induktionsanfang für $n = 0$: $\sum_{k=1}^{0}(2k-1) = 0$, leere Summe, und $0^2 = 0$.
Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = (n+1)^2.$$

Und wir haben $s = \sum_{k=1}^{7}(2k-1) - \sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 7^2 - 2^2$.

L1.5 Im Induktionsschritt steht zunächst $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$. Dann wird die Induktionsvoraussetzung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ verwendet, um daraus $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$ zu folgern. Das ist aber nur richtig, wenn der zusätzliche Faktor $(1+x)$ in dieser Ungleichung ≥ 0 ist, also $x \geq -1$. Ansonsten müsste das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.

L2.1 Bei einer konvergenten Folge versammeln sich die Folgenglieder in der Nähe des Grenzwerts. Nur endlich viele sind dann beispielsweise weiter als 1 von ihm entfernt. Davon das Größte ist dann die obere und das Kleinste die untere Schranke. Und wenn keines außerhalb der 1-Umgebung liegt, stellt diese Umgebung selbst bereits die Schranken dar.

L2.2 Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

L2.3 Nein, ∞ ist keine reelle Zahl. Die Menge $\mathbb{R}$ besteht zwar aus unendlich vielen Zahlen, und sie ist nicht nach oben beschränkt, d. h., zu jeder Zahl gibt es immer eine noch größere Zahl. Aber ∞ ist keine Zahl.

L2.4 Nein, die Aussage stimmt so nicht. Sofern die Nullfolge alterniert, wechselt auch der Kehrwert stets sein Vorzeichen, und wird dabei dem Betrag nach immer größer. Und eine solche Folge ist nicht bestimmt divergent.

L2.5
(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2 + \frac{(-1)^n}{n}) = \infty$ wegen $n^2 \to \infty$, die Addition einer Nullfolge ändert daran nichts.
(2) $\lim_{n\to\infty}((-1)^n n^2 + \frac{1}{n})$ ist nicht definiert bzw. die Folge ist divergent. Das alternierende Vorzeichen bei n^2 bewirkt einen ständigen Vorzeichenwechsel der immer größer werdenden Folgenglieder.
(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}) = 0$, man hat hier einfach die Summe zweier Nullfolgen.
(4) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-3}{n+7}) = 1$, für große n nähern sich Zähler und Nenner immer mehr an. Das sieht man auch so: $\frac{n-3}{n+7} = \frac{n(1-3/n)}{n(1+7/n)} = \frac{1-3/n}{1+7/n}$, mit $3/n \to 0$ und $7/n \to 0$.

(5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n-3}{n+7}) = 2$, denn $\frac{2n-3}{n+7} = \frac{n(2-3/n)}{n(1+7/n)} = \frac{2-3/n}{1+7/n}$.
(6) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-3}{2n^2+7}) = 0$, denn $\frac{n-3}{2n^2+7} = \frac{n^2(1/n-3/n^2)}{n^2(2+7/n^2)} = \frac{1/n-3/n^2}{2+7/n^2} \to 0$.

L2.6 Die Summe $\sum_{k=0}^{n}(k^2-1)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ einfach nur eine endliche Summe, also eine Summe mit endlich vielen endlichen Summanden. Und als solche natürlich immer endlich.

L2.7 Nein, die Aussage stimmt nicht. Der Zusammenhang lautet umgekehrt: „Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$“. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt somit nicht die Konvergenz der Reihe. Gilt hingegen $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so folgt, dass die Reihe nicht konvergieren kann.

L2.8 Die Divergenz einer Reihe entsteht ggf. immer durch ihre unendlich vielen Glieder. Das Ändern oder Weglassen endlich vieler Glieder hat darauf keinen Einfluss. Allerdings ändert es natürlich bei konvergenten Reihen in der Regel den Reihenwert.

L2.9 Zunächst zu s_1: Es ist offenbar $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \geq 1$. Wir haben es nur mit positiven Reihengliedern zu tun, und alle Summanden von s_1 sind kleiner als die von s. Daher konvergiert auch s_1.

Der Summand der Reihe s_2 wäre für $n = 1$ nicht definiert. Daher geht es hier bei 2 los. Leider ist $\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$, so dass das obige Argument zunächst nicht funktioniert. Trotzdem wird man wohl vermuten, dass auch diese Reihe endlich ist. Wir wandeln das obige Argument leicht ab: Es ist $n^2 - 1 \geq \frac{n^2}{2}$ für alle $n \geq 2$, damit $\frac{1}{n^2-1} \leq \frac{2}{n^2}$, und mit $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist auch $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergent, und somit auch $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

L2.10 Nein, die Reihe kann nicht konvergieren, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{7n^2+17n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+2/n^2)}{n^2(7+17/n)} = \frac{1}{7} \neq 0,$$

so dass das notwendige Kriterium für die Konvergenz von Reihen nicht erfüllt ist.

L3.1 Wegen $c > 0$ ist die gesuchte Parabel nach unten geöffnet. Aufgrund der Nullstellen bei a und b besitzt sie die Form $y(x) = d(x-a)(x-b)$ mit einer noch zu bestimmenden Konstanten d. Ihr Scheitelpunkt liegt in der Mitte zwischen a und b, bei $(a+b)/2$, und es muss offenbar gelten $y((a+b)/2) = c$. Auswerten dieser Gleichung für d ergibt das Ergebnis

$$y = -\frac{4c}{(a-b)^2}(x-a)(x-b).$$

L3.2 $D_1 = \mathbb{R}^*$, man darf nicht durch 0 teilen.

$D_2 = \mathbb{R}_+$, der Radikant einer Quadratwurzel muss nicht-negativ sein.

$D_3 = \mathbb{R}$, hier kann der Radikant aufgrund des Quadrats nie negativ werden.

$D_4 = \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, damit der Nenner nicht 0 wird.

$D_5 = \mathbb{R}$.

$D_6 =]-1, 1[$, das Intervall ohne die Grenzen, weil ansonsten durch 0 geteilt würde.

$D_7 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$, wie sich durch Rechnen ergibt. Es ist zu prüfen, wo der Nenner 0 wird. Dazu hier erste Nullstelle erraten, z. B. 1, Polynomdivision durchführen, und verbleibende quadratische Gleichung lösen.

$D_8 = \mathbb{R}$, die Exponentialfunktion ist für alle reellen Argumente definiert.

L3.3 Nein, eine Parabel kann vollständig oberhalb (oder eine nach unten geöffnete Parabel vollständig unterhalb) der x-Achse liegen, dann besitzt sie keine Nullstelle, oder auf der x-Achse, dann hat sie eine (doppelte) Nullstelle, oder sie schneidet die x-Achse zweimal, dann hat sie zwei Nullstellen.

Ein Polynom dritten Grads besitzt immer mindestens eine Nullstelle, da es von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft, und kann bis zu drei Nullstellen haben.

Allgemein: Ein Polynom vom Grad n kann für gerade n zwischen 0 und n Nullstellen aufweisen, und für ungerade n sind es zwischen 1 und n Nullstellen.

L3.4 Bei gebrochen rationalen Funktionen ist es oft nützlich, Zähler und Nenner bestmöglich zu faktorisieren (Nullstellen raten, Polynomdivision usw., wobei hier die erste Nullstelle 4 des Zählers gegeben ist). Dies ergibt

$$f(x) = 2\frac{(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+2)^2} = 2\frac{(x-4)(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Mit Kürzen des Linearfaktors $x + 2$ wird klar, dass hier keine Nullstelle vorliegt, sondern nur bei $x = 3$, 4 und -1. Die Polstellen liegen an den Nullstellen des Nenners, also bei $x = 1$ und -2. Die Asymptote schließlich ergibt sich, indem man für f die Polynomdivision mit Rest durchführt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 44x + 48) : (x^3 + 3x^2 - 4) \\ &= 2x - 14 + \frac{28x^2 + 52x - 8}{x^3 + 3x^2 - 4}. \end{aligned}$$

Für $x \to \pm\infty$ geht der echt gebrochen rationale Rest gegen 0, so dass sich $y = 2x - 14$ als Asymptote ergibt.

L3.5

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ist nicht definiert. Zwar ist $\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, und $\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, aber das ist eben nicht dasselbe.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$, aufgrund des Quadrats im Nenner stellt sich hier nicht das Problem von (2).
(4) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1/x+1/x^2)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}(1/x+1/x^2) = 0$.
(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-7x+49}{x^3-x-100} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(9/x-7/x^2+49/x^3)}{x^3(1-1/x^2-100/x^3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{9/x-7/x^2+49/x^3}{1-1/x^2-100/x^3} = 0/1 = 0$.
(6) $\lim_{x\to 0}\frac{9x^2-7x+49}{x^3-x-100} = -\frac{49}{100}$, einfach durch Einsetzen von $x = 0$ (stetige Funktion).
(7) $\lim_{x\to\infty}\exp(-x) = 0$, wie wir aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion wissen.
(8) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+x^4+2x^2+1}{\frac{7}{6}x^6+7x^5} = \frac{6}{7}$, wie du durch Ausklammern und Kürzen von x^6 in Zähler und Nenner siehst.
(9) $\lim_{r_1\to\infty}((n-1)\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}) = \frac{1-n}{r_2}$, wie schon mehrfach gehabt einfach eine gebrochen rationale Funktion, nur mit anderen Buchstaben.

L3.6 Nein, es kann mehrere Stellen geben, an denen der Zwischenwert angenommen wird. *Dann gibt es „genau ein“ …* ist also nicht richtig.

L4.1 Es ist richtig, dass diese beiden Funktionen jeweils gleich ihren Umkehrfunktionen sind. Aber es sind nicht die beiden Einzigen: Jede Funktion, deren Funktionsgraph unter Spiegelung an der Achse $y = x$ in sich selbst übergeht, besitzt diese Eigenschaft. Und das ist zum Beispiel auch für jede Gerade mit der Steigung -1 der Fall, also für die Geraden $y = -x + a$ mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$. Überzeuge dich durch Auflösen der Funktionsvorschrift nach x.

L4.2
(a) $1-e^{2x^2-3} = 0$: Entweder Exponentialfunktion isolieren und dann ln anwenden, oder hinsehen: Nur e^0 ist gleich 1, also sind die x mit $2x^2 - 3 = 0$ gesucht, d. h. $x = \pm\sqrt{3/2}$.
(b) $2^x = \sqrt{8}$: Wir schreiben $\sqrt{8}$ für unsere Zwecke besser auf: $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$, also $x = 3/2$. Anders ausgedrückt: $\log_2\sqrt{8} = 3/2$.
(c) $\ln(x^2+2x+1) = 2$: Hier haben wir die quadratische Gleichung $x^2+2x+1 = e^2$, also $x^2 + 2x + 1 - e^2 = 0$. Auflösen ergibt $x = -1 \pm e$.
(d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2+3}} - \frac{1}{4} = 0$: Wurzel isolieren, z. B. als $\sqrt[3]{2x^2+3} = 4$, daraus folgt $2x^2 + 3 = 64$, also $x = \pm\sqrt{61/2}$.
(e) $x^5 = -243$: Hier steht $x = \sqrt[5]{-243} = -3$, was gerade noch so im Kopf geht, wenn man weiß, dass ein einfaches Ergebnis herauskommen sollte.
(f) $\sqrt[3]{x^5} = -32$: Hier steht $x = \sqrt[5]{(-32)^3}$, was anders herum einfacher geht: $x = (\sqrt[5]{-32})^3 = (-2)^3 = -8$.

L4.3 Da $x \mapsto x^3$ streng monoton steigend ist, ist die Funktion f streng monoton fallend, und somit umkehrbar. Sie bildet $\mathbb{R}$ bijektiv ab auf $\mathbb{R}_+^*$. Zur Ermittlung der

Funktionsvorschrift von f^{-1} lösen wir die Gleichung $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-4x^3}$ nach x auf:

$$2y = \mathrm{e}^{-4x^3} \quad\Rightarrow\quad \ln(2y) = -4x^3 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}\ln(2y)}.$$

Wir haben also $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}\ln(2x)}$. Und das Bild von f^{-1} ist ganz $\mathbb{R}$, als Formel: $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

L4.4

a) Die maximale Endgeschwindigkeit v_m ergibt sich als Grenzwert:

$$v_\mathrm{m} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t}\right) = \frac{mg}{c},$$

da die Exponentialfunktion gegen 0 läuft. Die halbe Endgeschwindigkeit wird erreicht, wenn gilt $\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t} = 1/2$, also bei $t = \frac{m}{c}\ln 2$.

b) Aus $v_\mathrm{m} = \frac{mg}{c}$ folgt

$$c = \frac{mg}{v_\mathrm{m}} = \frac{100\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{200\cdot 10^3\,\mathrm{m}/(3{,}6\cdot 10^3\,\mathrm{s})} = \frac{3\,600\,\mathrm{kg}}{200\,\mathrm{s}} = 18\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

Die halbe Endgeschwindigkeit wird somit erreicht bei

$$t = \frac{100\,\mathrm{kg}}{18\,\mathrm{kg/s}}\ln 2 \approx 5{,}5\cdot 0{,}7\,\mathrm{s} \approx 4\,\mathrm{s}.$$

L4.5 Richtig ist, dass alle Logarithmusfunktionen nur auf $\mathbb{R}_+^*$ definiert sind. Für $a < 1$ sind die Funktionen $\log_a$ jedoch streng monoton fallend.

Eins als Basis ist nicht erlaubt, weil die Funktion $x \mapsto 1^x = 1$ nicht bijektiv und daher nicht umkehrbar ist. Anders ausgedrückt: „$\log_1 x$“ wäre die Zahl, mit der man 1 potenzieren müsste, um x zu erhalten. Und das funktionierte überhaupt nur für $x = 1$, und dann könnte man alle Zahlen als Potenz verwenden.

L4.6

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2\mathrm{e}^{-x}) = 0$, die fallende Exponentialfunktion setzt sich gegen x^2 durch.

(2) $\lim_{x\to\infty}(x\ln x) = \infty$, hier gibt es gar keinen Konflikt, sowohl x als auch $\ln x$ laufen gegen ∞.

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} = \infty$, x im Zähler setzt sich gegen $\ln x$ im Nenner durch.

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1+\mathrm{e}^x}{x^2+7x} = \infty$, die Exponentialfunktion im Zähler setzt sich gegen x^2 im Nenner durch. Die übrigen Terme spielen im Grenzwert $x \to \infty$ ohnehin keine Rolle.

(5) $\lim_{x\searrow 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x} = 0$, es ist $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\lim_{x\searrow 0}\ln x = -\infty$.

(6) $\lim_{x\searrow 0}(x\ln x) = 0$, hier geht x gegen 0 und $\ln x$ gegen $-\infty$, wobei sich x durchsetzt.

L5.1 Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang und damit auch alle Innenwinkel gleich und gleich 60°.

Ein rechtwinkliges Dreieck weist einen rechten (Innen-) Winkel auf.

Der Thales-Kreis ist ein Halbkreis über einer Strecke. Die Endpunkte der Strecke bilden mit jedem Punkt auf dem Thales-Kreis ein rechtwinkliges Dreieck.

Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden. Eine Seitenhalbierende läuft von einem Eckpunkt zur Mitte der gegenüberliegenden Seite.

Der Mittelpunkt des Umkreises liegt im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Dreieckseiten.

L5.2 Wir verwenden $b = r x_{\text{Bogenmaß}}$, wo r die Entfernung ist. Es ist

$$x_{\text{Bogenmaß}} = \frac{\pi}{180°}\frac{0{,}001 \cdot 1°}{3\,600} = \frac{0{,}001\pi}{180 \cdot 3\,600} \approx 4{,}85 \cdot 10^{-9}$$

und

$$r = 26\,000 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3\,600\,\text{s} \cdot 300\,000\,\text{km/s} \approx 2{,}46 \cdot 10^{17}\,\text{km},$$

so dass wir $b \approx 1{,}19 \cdot 10^9\,\text{km}$ erhalten. Eine astronomische Einheit (das ist die Enfernung Erde – Sonne) entspricht etwa $150 \cdot 10^6$ km, so dass wir es mit etwa acht astronomischen Einheiten zu tun haben.

L5.3 Wahrscheinlich entnimmt man die Werte am einfachsten einer Skizze der Funktionsgraphen. Es ist $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{13\pi}{6} = \sin\frac{17\pi}{6}$, und $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\frac{17\pi}{6} = \cos\frac{19\pi}{6}$.

L5.4

a) Wir verwenden den Cosinussatz:

$$c^2 = 36\,\text{cm}^2 + 4\,\text{cm}^2 - 24\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1}{2} = 28\,\text{cm}^2,$$

also ist $c = \sqrt{28}\,\text{cm}$ die Länge der dritten Seite.

b) Vielleicht sieht man bereits, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, denn es ist $3^2 + 4^2 = 5^2$. Dann ergeben sich die zwei verbleibenden Winkel einfach aus $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ und $\sin\beta = \frac{4}{5}$ zu $\alpha \approx 37°$ und $\beta \approx 53°$ (der dritte Winkel natürlich immer auch schon aus der Innenwinkelsumme).

Sieht man nicht, dass es ein rechtwinkliges Dreieck ist, berechnet man den ersten Winkel über den Cosinussatz via $\cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$. Den zweiten Winkel ebenso, oder über den Sinussatz, und den dritten dann wieder über die Innenwinkelsumme.

L5.5
(1) $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.
(2) $\frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x$.
(3) Der „Trick“ hier ist $3x$ als $2x + x$ zu schreiben und alles auf Sinus zu bringen:

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x \\ &= 2\sin x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

(4) Hier versuchen wir es mit $4x = 2x + 2x$ und auf Cosinus bringen:

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2x + 2x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = \cos^2(2x) - (1 - \cos^2(2x)) \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(4\cos^4 x + 1 - 4\cos^2 x\right) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.\end{aligned}$$

So funktioniert es, aber es gibt auch etliche andere Wege, immer unter wiederholter Anwendung der Additionstheoreme und des trigonometrischen Pythagoras.

L5.6 Nein, es ist $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Bei Arcussinus handelt es sich per Definition um die Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mit der das zentrale Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ des Sinus umgekehrt wird. Winkel außerhalb dieses Intervalls können daher bei Arcussinus nicht herauskommen.

L5.7 Mit $\arctan \infty = \frac{\pi}{2}$ ist gemeint $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. Bei Arcustangens wird der zentrale Zweig des Tangens umgedreht, also die streng monoton steigende und bijektive Funktion $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Daher läuft Arcustangens für $x \to \infty$ gegen $\frac{\pi}{2}$, und für $x \to -\infty$ übrigens gegen $-\frac{\pi}{2}$.

Da der Tangens bei $\frac{\pi}{2}$ nicht definiert ist, würde $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ bedeuten $\lim_{x\to\pi/2} \tan x = \infty$. Das ist jedoch nicht richtig, da der Grenzwert an dieser Stelle nicht definiert ist. Allerdings ist $\lim_{x\nearrow\pi/2} \tan x = \infty$ und $\lim_{x\searrow\pi/2} \tan x = -\infty$.

L5.8 Die Gleichung $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ist gleichbedeutend mit $\tan \frac{\pi}{4} = 1$. Nun ist

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1.$$

L6.1 Die Prozentzahl p gibt an, welchen Anteil einer zurückgelegten horizontalen Strecke h man gleichzeitig vertikal zurücklegt, nennen wir sie v. Es ist also $p = v/h$. Und das ist genau derselbe Begriff der Steigung, wie wir ihn auch in der Mathematik verwenden. Und eine Straße mit 100 % Steigung, d. h. mit Steigung 1, steigt unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen an.

L6.2

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^3\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^3-4x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-4x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\left(12x^2+12xh+4h^2\right) = 12x^2.\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

L6.3 Wir lassen die Prozent an den Zahlen p weg. Die Steigung der gesuchten Geraden ist $m = \frac{1-4}{100-50} = -\frac{3}{50}$. Bei $p = 50$ geht es mit $n = 4$ los, daher ist

$$n(p) = 4 - \frac{3}{50}(p-50).$$

Dazu sagt man „Punktrichtungsform“, und man hätte stattdessen auch direkt die „Zweipunkteform“ verwenden können. Testen wir kurz die Vorschrift: $n(100) = 4 - \frac{3}{50}\cdot 50 = 1$, $n(50) = 4 - \frac{3}{50}\cdot 0 = 4$.

L6.4 Es ist $\exp = \ln^{-1}$, und wir verwenden den Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion. Er lautet hier:

$$\exp'(x) = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}x)} = \frac{1}{1/(\exp(x))} = \exp(x).$$

L6.5 Die Normalparabel mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^2$ besitzt die Ableitung $f'(x) = 2x$. Die Tangente an der Stelle a hat die Gleichung

$$t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = a^2 + 2a(x-a).$$

Wir haben also $t_{-1}(x) = 1 - 2(x+1) = -2x - 1$, $t_0(x) = 0$ und $t_2(x) = 4 + 4(x-2) = 4x - 4$.

L6.6

$$\begin{aligned}f_1'(x) &= 16x^3.\\ f_2'(x) &= -\frac{9}{x^4}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^2}.\\ f_3'(x) &= \frac{-3x^4+42x^3-9x^2+2x-7}{(3x^3+1)^2}.\\ f_4'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_5'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x \sin x)'\, 3x^2 - \mathrm{e}^x \sin x \left(3x^2\right)'}{9x^4} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x)\, 3x^2 - \mathrm{e}^x \sin x \cdot 6x}{9x^4} \\
&= \frac{x\mathrm{e}^x \sin x + x\mathrm{e}^x \cos x - 2\mathrm{e}^x \sin x}{3x^3} = \frac{\mathrm{e}^x}{3x^3}\,(x \sin x + x \cos x - 2 \sin x)\,. \\
f_6'(x) &= \left(\frac{2\mathrm{e}^x + 4x^2 + 8}{\sin x}\right)' = \frac{(2\mathrm{e}^x + 8x)\sin x - \left(2\mathrm{e}^x + 4x^2 + 8\right)\cos x}{\sin^2 x}.
\end{aligned}
$$

L6.7 Die Funktion arccot ist die Umkehrfunktion des Cotangens, dessen Ableitung wir mit der Quotientenregel ermitteln können:

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

Nun erhalten wir mit dem Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion:

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot} x)} = \frac{1}{-1 - (\cot(\operatorname{arccot} x))^2} = -\frac{1}{1 + x^2},$$

also alles ganz ähnlich wie beim Arcustangens.

L6.8 Die Ableitung der Wurzeln lautet

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Es steht also eine Wurzel im Nenner, so dass der Ausdruck für $x = 0$ „automatisch“ nicht definiert ist.

Zur Ableitung des Betrags greift man entweder auf seine abschnittweise Definition zurück,

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

und wird dazu geführt, die Stelle 0 bzgl. des Ableitungsgrenzwerts separat zu untersuchen (und festzustellen, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert nicht gleich sind), oder man schreibt

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

und hat bei der Ableitung dann wieder eine Wurzel im Nenner.

L6.9

$$f_1'(x) = -3k\sin(kx).$$
$$f_2'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}.$$
$$f_3'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$
$$f_4'(x) = 2x\ln x + x.$$
$$f_5'(x) = 2^x \ln 2.$$
$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \left(\left(1+\cos^2(kx)\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2(kx)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\cos^2(kx)\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\sin^2(kx)\right)^{-\frac{1}{2}} 2\cos(kx)(-\sin(kx))k = -\frac{k\sin(kx)\cos(kx)}{\sqrt{1+\cos^2(kx)}}. \end{aligned}$$
$$f_7'(x) = 8\tan(4x)\cdot\frac{1}{\cos^2(4x)}\cdot 4 = 32\frac{\sin(4x)}{\cos^3(4x)}.$$
$$f_8'(x) = \left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$
$$\begin{aligned} f_9'(x) &= \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot(-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right). \end{aligned}$$

L6.10 Es ist alles in Ordnung. Macht man sich $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ klar, so sieht man, dass der Graph von $x \mapsto \ln(2x)$ nur um $\ln 2$ höher liegt als der Graph von $x \mapsto \ln x$ und daher die Ableitungen gleich sind.

L6.11 Nein, 2^x lässt sich keinesfalls so ableiten. Bei der Formel für x^n ist die Variable x in der Basis der Potenz, und bei 2^x im Exponenten. Und das sind zwei grundverschiedene Dinge.

L6.12 Die Nullstellen der ersten Ableitung befinden sich bei 0 und $\pm\sqrt{3/5}$, und die Nullstellen der zweiten Ableitung bei 0 und $\pm\sqrt{3/10}$. Die Tangenten sind $t_1(x) = 2x - 2$ und $t_{-1}(x) = 2x + 2$.

L6.13 Die Nullstellen von f_a ergeben sich aus

$$f_a(x) = ax^3 + x^2 - \frac{x}{a} = x\left(ax^2 + x - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Der Klammerausdruck wird 0 für

$$x = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2}} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{5}{4a^2}} = -\frac{1}{2a} \pm \frac{1}{|a|}\frac{\sqrt{5}}{2}$$

und ergibt neben $x = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}^*$ zwei weitere Nullstellen.

Die stationären Punkte sind die Nullstellen der ersten Ableitung

$$f_a'(x) = 3ax^2 + 2x - \frac{1}{a}$$

und liegen bei

$$x = -\frac{1}{3a} \pm \sqrt{\frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2}} = -\frac{1}{3a} \pm \frac{2}{3|a|}.$$

L6.14

a) Die Nullstelle der Funktion „sieht" man entweder, sie liegt bei $x = -2$, oder man löst die Gleichung $f(x) = x/2 + 2/x + 2 = 0$, was nach Multiplikation mit x auf eine quadratische Gleichung führt. Die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$

ist bei -2 auch gleich 0, so dass die Tangente durch $t_{-2}(x) = 0$ gegeben wird.

b) Es ist $f'(x) = 0$ für $x = -2$ und $x = 2$. Die zweite Ableitung $f''(x) = 4/x^3$ ist bei -2 kleiner 0, dort liegt also ein lokales Maximum, und bei 2 größer 0, so dass wir dort ein lokales Minimum haben. Da die Funktion bei Null eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt, sind dies aber nur lokale und keine globalen Extrema. Außerdem ist $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

L6.15 Bezeichnen wir die Seitenlänge der Quadrate mit x, so wird das zu optimierende Volumen der Schachtel gegeben durch

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - x^2(2a + 2b) + abx.$$

Die Funktion V ist offenbar zwischen $x = 0$ und $b/2$ definiert, und es ist $V(0) = 0 = V(b/2)$. Wir suchen stationäre Punkte:

$$V'(x) = 12x^2 - x(4a + 4b) + ab = 0$$

ist gleichbedeutend mit

$$x = \frac{a+b}{6} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{36} - \frac{ab}{12}},$$

also mit $a = 16$ und $b = 10$

$$x = \frac{13}{3} \pm \frac{7}{3}.$$

Somit liegt bei $x = 2$ der einzige stationäre Punkt im Definitionsbereich, die Funktion V ist differenzierbar und positiv, so dass hier das Maximum zwischen den zwei Nullstellen am Rand des Definitionsbereichs liegen muss. Die auszuschneidenden Quadrate müssen also eine Seitenlänge von 2 cm haben.

L6.16 Die zu optimierende Funktion ist die Fläche

$$F = 2rl.$$

Dabei hängen r und l zusammen über

$$400 = 2l + 2\pi r,$$

das heißt $r = (200 - l)/\pi$. Einsetzen ergibt

$$F = \frac{2}{\pi}(200 - l)l.$$

Wir haben jetzt F als Funktion von l mit $l \in [0, 200]$ und $F(0) = 0 = F(200)$. Bei dieser nach unten geöffneten Parabel liegt das Maximum zwischen den Nullstellen bei $l = 100\,\text{m}$. Dazu gehört der Radius $r = 100\,\text{m}/\pi \approx 32\,\text{m}$.

L6.17 Wir betrachten einen zu langen Baumstamm, der am Eckpunkt der beiden Kanäle und den beiden jeweils gegenüberliegenden Kanalrändern hängen bleibt und dabei den Winkel α mit der ersten Kanalseite einschließt. Seine Länge beträgt

$$l = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} = l(\alpha).$$

Ein Baumstamm kann nun vollständig in den zweiten Kanal gelangen, wenn er alle Winkel α durchlaufen kann. Wir suchen daher das Minimum der Funktion l, die definiert ist für $\alpha \in\,]0, \pi/2[$, die differenzierbar ist und für die gilt $\lim_{\alpha\searrow 0} l(\alpha) = \infty = \lim_{\alpha\nearrow \pi/2} l(\alpha)$. Also:

$$l' = -a\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + b\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0.$$

Dies führt über $a\cos^3\alpha = b\sin^3\alpha$ auf

$$\tan^3\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arctan\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Für $a = 10\,\text{m}$ und $b = 20\,\text{m}$ und mit einem Taschenrechner führt dies auf die maximal mögliche Länge von $41{,}62\,\text{m}$.

L6.18

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{3x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3} = \infty$.

(2) $\lim_{x\searrow 0}(x\ln(2x)) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(2x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0}(-x) = 0$.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{2} = \frac{3}{2}$.

(4) $\lim_{x\searrow \pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\searrow\pi/2} \tan x = -\infty$, und hier dürfte die Regel von l'Hospital auch gar nicht angewendet werden.

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\tan^2 x} = 1$.

(6) Wir wenden die Regel von l'Hospital mehrfach an, bis der Nenner nicht mehr Unendlich wird:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+2^{2x}}{2x^3+\ln x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x+1+2^{2x}\cdot 2\ln 2}{6x^2+1/x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6+2^{2x}\cdot 4(\ln 2)^2}{12x-1/x^2}$$
$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2^{2x}\cdot 8(\ln 2)^3}{12+2/x^3} = \infty.$$

L7.1 Es muss also gelten $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$ und $p''(x_0) = f''(x_0)$. Dabei ist

$$p'(x_0) = 2ax_0 + b \qquad \text{und} \qquad p''(x_0) = 2a.$$

Also muss zunächst $a = f''(x_0)/2$ gewählt werden. Ferner muss gelten

$$b = f'(x_0) - 2ax_0 = f'(x_0) - f''(x_0)x_0.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} c &= f(x_0) - ax_0^2 - bx_0 = f(x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 - \left[f'(x_0) - f''(x_0)x_0\right]x_0 \\ &= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2. \end{aligned}$$

Wir haben somit

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 + \left[f'(x_0) - f''(x_0)x_0\right]x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\left(\frac{1}{2}x^2 - x_0x + \frac{1}{2}x_0^2\right) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2. \end{aligned}$$

Und das ist natürlich nichts anderes als das Taylor-Polynom zweiter Ordnung.

L7.2 Es ist $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos''' = \sin$ und $\cos'''' = \cos$. Somit gilt für den Entwicklungspunkt $a_1 = 0$

$$\cos x = 1 + 0\cdot x + \frac{-1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + \frac{1}{24}x^4 + R_5^1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_5^1(x).$$

Für den Entwicklungspunkt $a_2 = \pi/2$ haben wir

$$\begin{aligned}\cos x &= 0 + (-1)(x-\pi/2) + 0\cdot(x-\pi/2)^2 + \frac{1}{6}(x-\pi/2)^3 + 0\cdot(x-\pi/2)^4 \\ &\quad + R_5^2(x) \\ &= -(x-\pi/2) + \frac{1}{6}(x-\pi/2)^3 + R_5^2(x).\end{aligned}$$

L7.3 Wir haben die Funktion arcsin um $a = 0$ zu entwickeln. Es ist $\arcsin 0 = 0$, ferner

$$\begin{aligned}\arcsin' 0 &= \left.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0} = 1, \\ \arcsin'' 0 &= \left((1-x^2)^{-1/2}\right)'\Big|_{x=0} = x(1-x^2)^{-3/2}\Big|_{x=0} = 0, \\ \arcsin''' 0 &= \left[(1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}\right]_{x=0} = 1.\end{aligned}$$

Somit haben wir das gewünschte Ergebnis mit

$$\arcsin x \approx x + \frac{1}{6}x^3.$$

L7.4 Das Lagrange-Restglied erlaubt eine Abschätzung des Fehlers, den man mit einer Näherungsformel macht.

L7.5 Es ist

$$\sqrt{\pi + 2x} = \sqrt{\pi\left(1 + \frac{2}{\pi}x\right)} = \sqrt{\pi}\sqrt{1 + \frac{2x}{\pi}},$$

und damit unter Verwendung der Formel

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi + 2x} &\approx \sqrt{\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{\pi}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 \pm \ldots\right] \\ &= \sqrt{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}x - \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}x^2 \pm \ldots\end{aligned}$$

Eine Näherung von $\sqrt{x}$ für kleine x würde bedeuten, dass man um 0 entwickelt. Da $\sqrt{x}$ bei 0 nicht differenzierbar ist, ist das nicht möglich.

L7.6 Die Taylor-Formel besteht aus endlich vielen Summanden und einem Restglied. Hier stellt sich somit keine Frage nach Konvergenz, sondern allenfalls die Frage nach der Größe des Restglieds und damit des Fehlers, den man bis zu einer gegebenen Ordnung macht.

Die Taylor-Reihe ist eine unendliche Reihe. Man muss sich daher nach Konvergenz fragen. Und man kann fragen, ob die Reihe mit der Funktion übereinstimmt.

L7.7 Es ist

$$e^x = e e^{x-1} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k,$$

und möchte man sich auf die ersten zehn Glieder beschränken, so schreibt man

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{9} \frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

L7.8 Man verwendet zunächst die Taylor-Formel mit der Ordnung n und dem Restglied $R_{n+1}(x)$. Und muss nun zeigen, dass das Restglied für $n \to \infty$ gegen Null läuft. Für alle x, für die dies der Fall ist, ist die Taylor-Reihe gleich der Funktion.

L8.1 Nein, für komplexe Zahlen stimmt beides nicht. Zum Beispiel ist $i^2 = -1 < 0$. Im Allgemeinen ist z^2 aber wieder eine komplexe Zahl, z. B. $(2+i)^2 = 3 + 4i$, so dass gar keine Größer-kleiner-Relationen bestehen.

L8.2

$$z_1 = -i, \qquad z_2 = i, \qquad z_3 = -2 - i, \qquad z_4 = 1,$$
$$z_5 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i, \qquad z_6 = 3 - 4i, \qquad z_7 = 0, \qquad z_8 = 0.$$

L8.3 Die Gleichung $z^2 + 2az + 1 = 0$ wird gelöst durch

$$z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Für $|a| > 1$ ergibt dies zwei reelle Lösungen, für $a = \pm 1$ die reelle Lösung ∓ 1, und für $|a| < 1$ die zwei komplexen Lösungen

$$z = -a \pm \sqrt{-(1-a^2)} = -a \pm i\sqrt{1-a^2},$$

die offensichtlich konjugiert komplex zueinander sind. Ihr Betrag ist

$$|z| = \sqrt{(-a)^2 + \left(\pm\sqrt{1-a^2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 1 - a^2} = 1.$$

L8.4

(1) Wir haben es mit einer einfachen linearen Gleichung in z zu tun. Auflösen ergibt $z = -1 - i$.

(2) Diese Gleichung lässt sich nicht ohne weiteres nach z auflösen. Wir setzen daher $z = x + iy$ ein: Dies führt auf

$$x^2 - y^2 + 2ixy + x - iy = x^2 - y^2 + x + iy(2x - 1) = 0.$$

Es müssen also Real- und Imaginärteil 0 sein. Das heißt zunächst anhand des Imaginärteils $y = 0$ oder $x = 1/2$. Mit $y = 0$ ergibt der Realteil $x^2 + x = x(x+1) = 0$, also insgesamt die Lösungen $z_1 = 0$ und $z_2 = -1$. Mit $x = 1/2$ folgt aus dem Realteil $y = \pm\sqrt{3}/2$, wir haben also die weiteren Lösungen $z_{3,4} = 1/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2$.

(3) Auch hier setzt man $z = x + \mathrm{i}y$ ein und erhält so nach kurzer Rechnung die Lösungen $z_1 = 0$ und $z_{2,3} = \pm 2\mathrm{i}$.

(4) Betrag einer komplexen Zahl gleich 1 bedeutet, dass sie auf dem Einheitskreis liegt. Es ist daher

$$z + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi[,$$

so dass die Menge aller Lösungen gegeben wird durch

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1 \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi[.$$

(5) Hier haben wir ein „normales“ lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Lösung kann auf gewöhnliche Weise erfolgen, zum Beispiel mit Hilfe der Cramer-Regel. Man erhält $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = \mathrm{i}$.

L8.5

(I) Richtig. Eine Zahl mit Imaginärteil Null ist eine reelle Zahl.

(II) Richtig. Komplexe Konjugation bewirkt das Umdrehen des Vorzeichens am Imaginärteil. Ist somit der Imaginärteil nicht Null, ändert sich die Zahl.

(III) Richtig. Betrachten wir $z = \mathrm{i}x$ mit $x \in \mathbb{R}$: Der Kehrwert lautet $1/z = 1/\mathrm{i}x = -\mathrm{i}/x$.

(IV) Falsch. Richtig ist zwar, dass jedes Polynom n-ten Grads über $\mathbb{C}$ in n Linearfaktoren zerfällt. Diese müssen aber nicht alle verschieden sein.

(V) Richtig. Wir rechnen nach:

$$\left((1+\mathrm{i})/\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - 1 + 2\mathrm{i}) = \mathrm{i}.$$

Wobei wir $\sqrt{\mathrm{i}}$ hier verstehen wollen als eine Zahl, deren Quadrat gleich i ist. Davon gibt es noch eine zweite.

(VI) Richtig. Dies ergibt sich aus der Funktionalgleichung wie folgt:

$$\mathrm{e}^0 = 1 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z}.$$

Ein Produkt, das nicht 0 ist, kann keinen Faktor 0 enthalten. Also ist $\mathrm{e}^z \neq 0$.

(VII) Falsch. Erstens sind ja darin auch die reellen Argumente mit reellen Funktionswerten enthalten. Und zweitens besitzen auch andere Argumente reelle Funktionswerte, etwa $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$.

(VIII) Richtig. Denn es ist

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

und damit $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \cos y$ und $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \sin y$.

L8.6 Es wäre offenbar viel zu aufwändig, hier etwa mit Hilfe des Pascal-Dreiecks hoch 12 oder gar hoch 100 zu rechnen. Das Potenzieren fällt aber leicht, wenn man die Basis in Polarkoordinaten schreibt, was für die ersten zwei Zahlen ohne Rechenaufwand gelingt: So ist

$$z_1 = \left(\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = \left(\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6}\right)^{12} = \mathrm{e}^{10\pi\mathrm{i}} = 1$$

und

$$z_2 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)^{100} = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right)^{100} = \left(2\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}\right)^{100} = 2^{100}\mathrm{e}^{-100\pi\mathrm{i}/6}.$$

Nun ist $100 = 8 \cdot 12 + 4$, also

$$\begin{aligned} z_2 &= 2^{100}\underbrace{\mathrm{e}^{-8\cdot 12\pi\mathrm{i}/6}}_{=1}\mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}/6} = 2^{100}\mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}/6} = 2^{100}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3} = 2^{100}\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -2^{99} - \mathrm{i}2^{99}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nun zu z_3, was man auch durch geschicktes Aufschreiben löst:

$$z_3 = \frac{(1+\mathrm{i})^{2n+1}}{(1-\mathrm{i})^{2n-1}} = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2n}(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}^{2n} \cdot 2 = 2(-1)^n.$$

L8.7

(1) Wir verwenden die Logik analog zu den n-ten Einheitswurzeln. Es ist $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, so dass wir $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ als erste Lösung erhalten. Die zweite Lösung ist $z_2 = -1$, und die dritte liegt symmetrisch im Einheitskreis bei $z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3}$.

(2) Die Gleichung $z^3 = 8\mathrm{i}$ ist gleichbedeutend mit $(z/2)^3 = \mathrm{i} = w^3$ mit $w = z/2$. Aufgrund von $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ ist die offensichtliche erste Lösung $w_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$. Aufgrund der Symmetrie erraten wir die zweite Lösung bei $w_2 = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}$; tatsächlich ist $3 \cdot 5\pi/6 = 15\pi/6 = 2\pi + \pi/2$. Die dritte Lösung schließlich ist $w_3 = -\mathrm{i}$.

(3) Wir haben $(z/2)^6 = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. Eine Lösung lautet daher $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$. Und die weiteren fünf Lösungen sind dazu jeweils um $\pi/3$ weitergedreht: $z_k = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6 + k\pi/3)}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Sachverzeichnis

Springer springer.com

Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:
  aktuell *** kostenlos *** passgenau *** flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/die über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Information zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: springer.com/alert

A14445 | Image: Tashatuvango/iStock