Anhang

A.1 Lösungen zum Test

Lösungen zum Test aus Kapitel 1.6

1.1

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{0, \ldots, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \\ A \cap B &= \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \\ A \setminus B &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

1.2

a) Die beiden Aussagen $A(x)$ und $B(x)$ sind äquivalent, denn

$$x^2 = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4 \ \vee \ x = -4.$$

Somit ist $A(x) \Longleftrightarrow B(x)$.

b) Ja, denn:

$$\begin{aligned} A(x): \quad x^2 - y^2 = 0 &\Longleftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = y \ \vee x = -y \end{aligned}$$

und daher ist $A(x) \Longleftrightarrow B(x)$.

c) Nein, denn

$$x^2 \geq a \ \Longleftrightarrow | \ x \ | \geq \sqrt{a} \ \Longleftrightarrow \ x \geq \sqrt{a} \vee x \leq -\sqrt{a}.$$

Aus diesem Grund ist $A(x) \not\Longleftarrow B(x)$.

1.3

a) Eine notwendige Bedingung für einen Gewinn im Lotto ist die Abgabe des Tippzettels. Eine hinreichende Bedingung für den Gewinn ist das Ankreuzen der richtigen Zahlen.

b) Nein, es gilt $B(x) \Longrightarrow A(x)$, aber $A(x) \not\Longrightarrow B(x)$.

T. Holey, A. Wiedemann, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* BA KOMPAKT,
DOI 10.1007/978-3-662-48143-1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

1.4

a) $\dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2x}{x^2-4}$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{3x^n + 2x^{n+2}}{x^{n+1} + 3x^n} &= \frac{x^n(3+2x^2)}{x^n(x+3)} \\ &= \frac{3+2x^2}{x+3}.\end{aligned}$$

Dieser Term ist definiert für $x \neq 0, x \neq -3$.

c) Wir führen folgende Vereinfachung durch:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^{6n-9}} &= \left(x^{6n-9}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{2n-3} \\ &= \frac{x^{2n}}{x^3}.\end{aligned}$$

Dieser Term ist definiert für alle $x \neq 0$.

1.5 Auflösen von Gleichungen:

a)

$$\begin{aligned} && 2x - 7 &= \tfrac{3}{2}x + \sqrt{3} \\ \Longleftrightarrow && \tfrac{1}{2}x &= \sqrt{3} + 7 \\ \Longleftrightarrow && x &= 2(\sqrt{3}+7) \approx 17,46.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} && \frac{x-3}{2x+6} &= 4 \qquad (x \neq 3) \\ \Longleftrightarrow && x - 3 &= 4(2x+6) \\ \Longleftrightarrow && x - 3 &= 8x + 24 \\ \Longleftrightarrow && 7x &= -27 \\ \Longleftrightarrow && x &= -\frac{27}{7}.\end{aligned}$$

c) Die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3},$$

also:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

d) Die Gleichung

$$x - 3 = \frac{1}{2+x}$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 7 = 0$$

mit den Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

e) Quadrieren der Gleichung

$$\sqrt{x} = 1 - x$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Von den beiden Lösungen ist nur $x = (3 - \sqrt{5})/2$ die Lösung der ursprünglichen Gleichung, da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist.

f)

$$\begin{aligned} x^5 - 12 &= 3 \\ x^5 &= 15 \\ x &= \sqrt[5]{15} \approx 1,7187. \end{aligned}$$

g) Zur Lösung der Gleichung

$$x^4 + 4x^2 - 8 = 0$$

substituieren wir: $x^2 = u$ bzw. $x = \pm\sqrt{u}$. Einsetzen liefert die quadratische Gleichung:

$$u^2 + 4u - 8 = 0$$

mit den beiden Lösungen:

$$u_{1/2} = -2 \pm 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Resubstitution ergibt:

$$x_1 = \sqrt{-2 + 2\sqrt{3}}; \quad x_2 = -\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}}.$$

Die Lösung $u_2 = -2 - 2\sqrt{3}$ liefert keine (reellen) Lösungen für x.

h)

$$\begin{aligned} 3^x + 12 &= 24 \\ 3^x &= 12 \\ x &= \log_3 12 \\ &= \frac{\ln 12}{\ln 3} \\ &\approx 2,261. \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{x+2} &= 110 \\ 3^x + 9 \cdot 3^x &= 110 \\ 10 \cdot 3^x &= 110 \\ 3^x &= 11 \\ x &= \log_3 11 \\ &= \frac{\ln 11}{\ln 3} \\ &\approx 2,18. \end{aligned}$$

j) Zur Lösung der Gleichung

$$-2^x + 4 \cdot 2^{2x} = 128$$

substituieren wir:

$$2^x = u, \quad x = \log_2 u, \quad (u > 0), \qquad \text{mit } u^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

Einsetzen in die obige Gleichung liefert die quadratische Gleichung:

$$4u^2 - u - 128 = 0$$

mit den beiden Lösungen:

$$u_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{2049}}{8}.$$

Da $u > 0$, ist die gesuchte Lösung

$$u_1 = \frac{1 + \sqrt{2049}}{2}.$$

Damit ist

$$x = \log_2\left(\frac{1 + \sqrt{2049}}{8}\right) \approx 2,531.$$

k)

$$\begin{aligned} \log_2 4x &= 15 \\ 4x &= 2^{15} \\ x &= \frac{1}{4} \cdot 2^{15} = 2^{13} = 8.192. \end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned} \lg(x+10) - \lg(2x+5) &= 3 \qquad (x > 3 \wedge x > \frac{5}{2}) \\ \lg \frac{x+10}{2x+5} &= 3 \\ \frac{x+10}{2x+5} &= 10^3 \\ x + 10 &= 2000x + 5000 \\ x &= -\frac{4990}{1999} \approx -2,496. \end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned} \log_2 3x + \log_4 5x &= 3 \\ \log_2 3x + \frac{\log_2 5x}{\log_2 4} &= 3 \\ \log_2 3x + \frac{1}{2} \log_2 5x &= 3 \\ \log_2 3x + \log_2 \sqrt{5x} &= 3 \\ \log_2(3x\sqrt{5x}) &= 3 \\ 3x\sqrt{5x} &= 2^3 \\ 3\sqrt{5} \cdot x^{3/2} &= 8 \\ x &= (\frac{8}{3\sqrt{5}})^{2/3}. \end{aligned}$$

1.6 Gesucht ist die positive reelle Zahl x, so dass $1/x$ um 1 kleiner ist als x. Das bedeutet, x ist Lösung der Gleichung:

$$\frac{1}{x} = x - 1$$

oder

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Da die positive Lösung gesucht ist, folgt:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803\ldots.$$

Aus der quadratische Gleichung geht hervor, dass das Quadrat dieser Zahl um 1 größer ist als x. Daher:

$$\begin{aligned} x &= 1,61803\ldots \\ \frac{1}{x} &= 0,61803\ldots \\ x^2 &= 2,61803\ldots. \end{aligned}$$

Die Zahl $x = 1,61803\ldots$ heißt auch Goldener Schnitt.

1.7 Gemäß der binomischen Formel Gl. (1.9) erhält man:

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= \sum_{i=1}^{4} \binom{n}{k} a^i \cdot b^{n-i} \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

1.8 Eine Veranschaulichung der Beziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

zwischen den Binomialkoeffizienten ist das Pascalsche Zahlendreieck. Diese Beziehung sagt aus, dass das k-te Element der n-ten Zeile die Summe ist aus den Elementen $k-1$ und k der vorherigen Zeile.

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&1&&&& & n=0 & k=0 \\ &&&1&&1&&& & n=1 & k=0,1 \\ &&1&&2&&1&& & n=2 & k=0,1,2 \\ &1&&3&&3&&1& & n=3 & k=0,1,2,3 \\ 1&&4&&6&&4&&1 & n=4 & k=0,1,2,3,4. \end{array}$$

Für den formalen Beweis der Beziehung zwischen den Binomialkoeffizienten verwendet man die Gl.(1.10):

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&\overset{*}{=} \frac{n!k}{nk!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(k+n-k)}{nk!(n-k)!} \\
&= \frac{n!n}{nk!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Im Schritt * verwenden wir die Definition der Fakultät in der Form:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}.$$

1.9

a)

$$\begin{aligned}
3x + 5 &\geq -2x - 3 \\
5x &\geq -8.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x^5 &> 125 \\
x &> \sqrt[5]{125}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
-2x^2 + 3x - 1 &< 0 \\
2x^2 - 3x + 1 &> 0.
\end{aligned}$$

Zunächst wird die zugehörige Gleichung gelöst; dies führt auf die Lösungen:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Damit kann die Ungleichung geschrieben werden als:

$$(x-1) \cdot (x - \frac{1}{2}) > 0.$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn beide Faktoren größer Null oder beide kleiner Null sind. Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich hieraus zu:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \vee x < \frac{1}{2}\}.$$

1.10 Multipliziert man die Gleichung

$$x_1 + x_2 = p$$

mit x_1, ergibt sich

$$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 = p \cdot x_1$$

oder mit $x_1 \cdot x_2 = q$:

$$x_1^2 - p \cdot x_1 + q = 0.$$

Mit anderen Worten, x_1 ist eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - px + q = 0$, aus Symmetriegründen gilt das gleiche für x_2.

Umgekehrt, sind x_1, x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - px + q = 0,$$

dann ist

$$0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

und

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

A.2 Lösungen der Übungsaufgaben

Hier sind die Lösungen der Übungsaufgaben angegeben oder kurz skizziert.

Kapitel 2

2.1 a) $D_f^{\max} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \ \vee \ x \leq 1\}$, b) $D_f^{\max} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < +1 \ \wedge x \neq 0\}$.

2.2 $(f \circ f)(x) = x^4 - 10x^2 + 20, (f \circ g)(x) = \dfrac{25x^2}{(x^2-2)^2} - 5,$

$$(g \circ f)(x) = \frac{5x^2 - 25}{(x^2-5)^2 - 2}.$$

$$f(g(1)) = 20, \qquad g(f(1)) = -\frac{10}{7}.$$

2.3 $A = 2, b = 3\pi, x = 1/2$, Nullstellen: $x = \frac{1}{6} + \frac{n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.

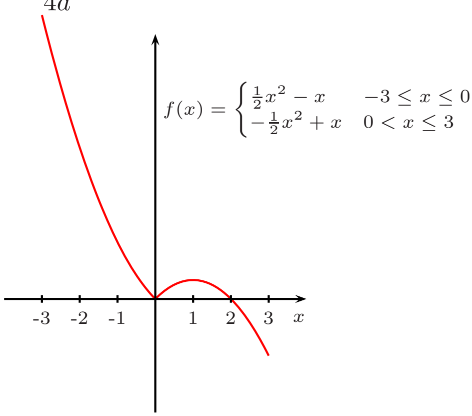
2.4 $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq +3\} \subset \mathbb{R}$

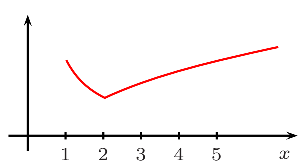
2.5 1. $D_{max} = \mathbb{R}$

2. $W_f = \begin{cases} \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq c - \dfrac{b^2}{4a} \right\}, a > 0, \\ \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq c - \dfrac{b^2}{4a} \right\}, a < 0. \end{cases}$

3. $\dfrac{b^2}{4a} + 1 \leq c.$

2.6





2.7 $k \approx 0,025,\ x_D \approx 28,07$ Jahre.

2.8(a) Wertebereich: $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq +8\}$,
Umkehrfunktion: $y = g(x) = 2x - 6$.

(b) Wertebereich: $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$,
Umkehrfunktion: $g(x) = +\frac{1}{2}\sqrt{x-1}$.

2.9 a) nach oben beschränkt, b) nach oben beschränkt, c) nach unten beschränkt, d) beschränkt.

2.10 Injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv.

2.11 a) Nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv. b) Nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv. c) Injektiv, surjektiv und bijektiv. d) Nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv.

2.12 $f(x)$ ist stetig, falls $a = 3/e$.

2.13 a) $D_f = \mathbb{R}, P_0 = (\ln 3^{1/3}, 0)$. b) $D_f = \mathbb{R}$, keine Nullstelle. c) $D_f = \mathbb{R}, P_0 = (0,0)$. d) $D_f = \mathbb{R}, P_{0,1} = (\pm 2, 0)$. e)$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, keine Nullstellen.

2.14

a) Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$, Umkehrabbildung existiert für $x \geq 0$.
Nullstellen: $P_0 = (0,0)$
Wertebereich: $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.
Umkehrabbildung: $g(x) = +\sqrt{exp\{2x\} - 1}$.

b) Definitionsbereich: $D_g = \mathbb{R}_+$.
Nullstellen: $l = 2$.
Wertebereich: $W_g = \mathbb{R}$.
Umkehrabbildung: $l(y) = 2 \cdot e^y$.

c) Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}_+$.
Nullstellen: $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Umkehrabbildung: $g(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4e^x} - 1)$.

d) Definitionsbereich: $D_h = \{b \in \mathbb{R} \mid b > 1\}$.
Nullstellen: $b_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
Umkehrfunktion: $g(x) = +\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+4e^{2x}} + 1)}$.

2.15 $f(x)$ gerade, dann ist $f(x) - f(-x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{e^{-x} - 1} + \frac{x}{2} \\ &= x\Big(\frac{e^{-x} - 1 + e^x - 1}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)} + 1\Big) \\ &= x\Big(\frac{e^{-x} + e^x - 2}{-e^x - e^{-x} + 2} + 1\Big) \\ &= x(-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

2.16 Da $f(x) = \sin x$ auf jedem Intervall

$$-\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

streng monoton und stetig ist, gibt es zwei Mengen unendlich vieler Umkehrfunktionen

$$y = 2n\pi + \arcsin x \qquad \text{und } y = (2n+1)\pi - \arcsin x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Daher erhalten wir die beiden Mengen von Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{b}\Big(\arcsin(\frac{d}{A}) + 2n\pi\Big) - c, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{1}{b}\Big((2n+1) \cdot \pi - \arcsin(\frac{d}{A})\Big) - c, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.17 $f(x) = \dfrac{U_{max}}{2}\Big(\sin\big[\frac{\pi}{6}(x-3)\big] + 1\Big)$.

2.18 a) 0, b) 0, c), d) existiert nicht.

2.19 $c = 10$; $\quad K_F = 1\,000$.

2.20 a) $f_\infty = 32$, b) $t_{50\%} = 2.77, t_{70\%} = 4.46, t_{90\%} = 7.16$.

2.21 $p(x_N) = \frac{x_0}{c} - \frac{1}{c}x_N(p)$, monoton fallend.

2.22 $p_{1/2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4b(a_0 - x_0)}}{2b}$, wegen $p > 0$ muss $a_0 < x_0$ erfüllt sein, damit sich ein Marktgleichgewicht einstellt.

2.23 a) $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -3$, b) $x_1 = 2, x_2 = x_3 = -5, x_4 = 3$.

2.24 a) 2, b) -2, c) 2

Kapitel 3

3.1 $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x-1}} = \infty$ (de L'Hospital nicht anwendbar), $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

3.2 a) $f'(x) = -3$, anwenden des Grenzwertverfahrens:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-3(x+\Delta x) + 8 + 3x - 8}{\Delta x} = -3.$$

b) $f'(x) = 2x$, anwenden des Grenzwertverfahrens:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + a^2 - (x^2 + a^2)}{\Delta x} = 2x.$$

c) $f'(x) = 2a(ax+b)$, anwenden des Grenzwertverfahrens:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(a(x+\Delta x)+b)^2 - (ax+b)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} (2a(ax+b) + a^2\Delta x) \\ &= 2a(ax+b). \end{aligned}$$

3.3 a) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, b) $f'(x) = \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}$, c) $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$, d) $f'(x) = 1 + \ln x$.

3.4

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x+\Delta x}{x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \ln\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big)^{1/\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x} \ln\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big)^{x/\Delta x}. \end{aligned}$$

Mit $h = \Delta x/x$ ist ($\Delta x \longrightarrow 0$ bedeutet auch $h \longrightarrow 0$):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \ln\big(1+h\big)^{1/h} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \ln\big(1+h\big)^{1/h} \\ &= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

3.5 a) stetig und differenzierbar, b) stetig, nicht differenzierbar.

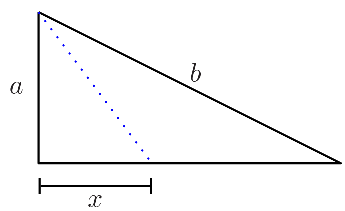
3.6 Die Startlösung $x_1 = 1$ liefert:

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} = 1 - \frac{e^{-1} - 1}{-e^{-1} - 1} \approx 0,538.$$

3.7 $t_1(x) = \dfrac{1}{20}(x+7), t_2(x) = \dfrac{1}{5}(x+7).$

3.8 Mit K_l Verlegekosten pro km an Land, K_w Verlegekosten pro km im Wasser, ergibt sich die streckenabhängige Kostenfunktion für die Verlegung zu

$$K = K_w \cdot s_w + K_l \cdot s_l.$$



Die an Land verlegte Strecke ist $s_l = \sqrt{b^2 - a^2} - x$, die im Wasser ist $s_w = \sqrt{a^2 + x^2}$. Erste Ableitung nach x:

$$K'(x) = \frac{K_w \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - K_l \overset{!}{=} 0, \quad x_{min} = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{K_w}{K_l}\right)^2 - 1}}.$$

3.9

a) $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1, f'(x) = 3x^2 - x + 1, f''(x) = 6x - 1.$

b) $f(x) = e^{-x^2}, f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2x \cdot f(x), f''(x) = (4x^2 - 2)f(x).$

c) $f(x) = 2\sin x + 5\cos x, f'(x) = 2\cos x - 5\sin x, f''(x) = -2\sin x - 5\cos x = -f(x).$

3.10 $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 3/2.$

3.11 $b^2 < 3ac.$

3.12 a) Nullstellen: $x_1 = 0, x_{2/3} = t^2 \pm \sqrt{t^4 + t}.$

b) Punkte mit waagrechter Tangente: $x_{4/5} = \frac{2t^2 \pm \sqrt{4t^4 + 3t}}{3}$, also 2 Lösungen für $t > 0$, 1 Lösung für $t = 0$. Der Charakter der Punkte mit waagrechter Tangente ergibt sich aus der Untersuchung der konvexen und konkaven Bereichen und dem Verhalten der Funktion für $\mid x \mid \longrightarrow \infty$.

c) Symmetrie: $f_0(-x) = -f_0(x)$, d.h. für $t = 0$ Symmetrie zum Ursprung. Für $t \neq 0$ keine Symmetrie erkennbar.

d) Konvexe und konkave Bereiche:

$$\begin{array}{lll} \text{Für } x > \dfrac{2}{3}t^2 : & f_t''(x) < 0 & \text{konkav von oben} \\ \text{Für } x < \dfrac{2}{3}t^2 : & f_t''(x) > 0 & \text{konvex von oben} \end{array}$$

e) Asymptotik: $\lim_{x\to\infty} f_t(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f_t(x) = +\infty$.

3.13 Stetigkeit von $f(x)$ in $x_0 = 2$ führt auf: $4a - 4 = 2b + 1$. Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $x_0 = 2$ führt auf: $4a - 2 = b$. Damit ist die Funktion $f(x)$ stetig differenzierbar, wenn $b = -3$ und $a = -\frac{1}{4}$.

3.14 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a = 1/8, b = d = 0, c = 3/4, e = 5/8$. Diese Funktion hat vier reelle Nullstellen: $x_1 = 1, x_2 = +\sqrt{5}, x_3 = -1, x_4 = -\sqrt{5}$, und $f(x)$ hat in $P_1 = (0, 5/8)$ ein lokales Maximum und in $P_{2/3} = (\pm\sqrt{3}, -1/2)$ zwei lokale Minima.

3.15 Preiselastizität: $\epsilon_{x,p}(p) = -\frac{p}{10}$, die Nachfrage steigt um 50 %, $p = 100$.

3.16 Produkte mit elastischer Preiselastizität: ersetzbare Güter, Genussmittel, Produkte mit unelastischer Preiselastizität: Lebensmittel, Energie.

3.17 Stückkosten: $k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, mit $k'(x) = 0$, ergibt sich $K'(x) = \dfrac{K(x)}{x}$. Mit $K(x) = 10 + 2x^2$ sind die Grenzkosten $K'(x) = 4x$. Schnittpunkt bei $x = \sqrt{5}$.

3.18 $K_F = 625$.

3.19 Mit $E(p) = x_0 \cdot p - c \cdot p^2$ und $E'(p_{max}) = 0, E(p_{max}) = 100\,000$ ergibt sich $E(p) = 2\,000p - 10p^2$.

3.20 a) $[2, \dfrac{3}{2} + \sqrt{105}/2]$, b) $G(10/6 + \sqrt{79/9}) \approx 43{,}28$, c) $p = 14$ €.

3.21 $k = \dfrac{1}{2}, a = e^{1/2}$.

3.22 $p_v = \dfrac{6}{e^{7/6}}$.

Kapitel 4

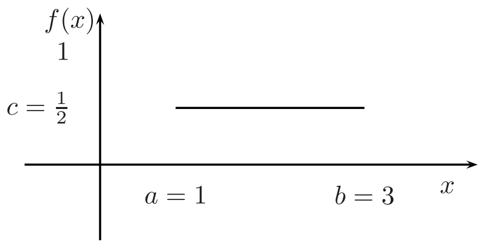
4.1 a) $F(x) = x^3 + c$, b) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{2x} + c$ c) $F(x) = \frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$, d) $F(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax} + c$, e) $F(x) = -2\sqrt{1-x} + c$, f) $F(x) = -\cos x + c$.

4.2

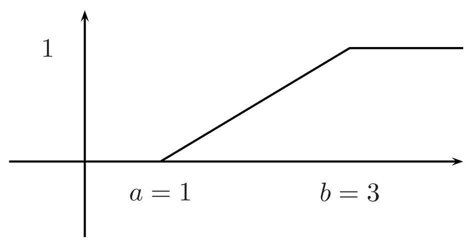
$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x.$$

$$\int_{1/e}^{e} \ln x dx = \frac{2}{e}.$$

4.3 $c = \frac{1}{b-a}$,



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le a \\ \int_a^x c\, dx = c(x-a) & \text{für } a \le x \le b, \\ c \cdot (b-a) & \text{für } x > b \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{a+b}{2}. \quad \text{für } c = 1/(b-a).$$

4.4 $A = 11/6$.

4.5 $I = e^2 - 2$.

4.6 $\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$.

4.7 $A = \frac{1}{2}$.

4.8 $x_0 = 3, K = 18, P = 9.$

4.9 Zweimalige partielle Integration liefert: $I = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x).$

4.10 $I_1 = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, $I_2 = \frac{1}{2}$.

4.11 $I = \frac{1}{4}\ln\left(x^4 - 5\right) + c.$

4.12 a) $t_m = 2\sqrt{3}$ ist der Zeitpunkt, an dem der Kapitalfluss maximal wird. Kapitalfluss: $f(t_m) = 48 \cdot \sqrt{3}$.

b) $f(t) = 0 \iff -t^3 + 36t = 0 \implies t_1 = 0, t_2 = +6$, die Lösung $t = -6$ ist nicht sinnvoll. Maximales Kapital:

$$\int_0^6 f(t)\,dt = -\frac{1}{4}t^4 + 18t^2\Big|_0^6 = 324.$$

Damit ist das Gesamtkapital $K = K_0 + \Delta K = 900$. (Ausgaben in Tausend Euro)

c) $\overline{t} = \sqrt{96} \approx 9.8$.

4.13 Maximum: $A = A_0 +$ Zugänge $-$ Abgänge $= 10 + 1{,}115 - 0.783 = 10{,}331$ (in Hunderttausend).

4.14 $I_1 = \frac{1}{4}, I_2 = -\frac{16}{3}, I_3 = \frac{65}{27}, I_4 = \frac{11}{3}.$

4.15 $\int_0^a \frac{2x}{1-x^2}dx = -\ln(1-a^2)$. existiert für $a < 1$.

Kapitel 5

5.1 $\mathbf{r}$: Rohstoffe, $\mathbf{z}$: Zwischenprodukte, $\mathbf{e}$: Endprodukte.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rohstoffverbrauch:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}$$

Mit $r_1 = 124$, $r_2 = 98$ folgt $e_1 = 10, e_2 = 8$.

5.2 a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existiert nicht, b) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 4 \\ -17 & 2 & -3 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}$ existiert nicht, d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 5 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -11 & 11 & 1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -4 & -5 & -13 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{B}^2$ existiert nicht, g) $(\mathbf{B}^\top)^2$ existiert nicht.

5.3 a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 45 \\ -2 & 1 \\ -2 & 34 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existiert nicht, c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 88 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5.4 a) $\mathbf{B}^\top\big(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\top\big)^{-1} = \mathbf{B}^\top\big((\mathbf{B}^\top)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\big) = \big(\mathbf{B}^\top(\mathbf{B}^\top)^{-1}\big) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$.
b)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\top(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top(\mathbf{A}^{-1})^\top &= \mathbf{A}^\top(\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top)(\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{A}^\top(\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top)(\mathbf{A}^\top)^{-1} \\ &= \mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top = (\mathbf{B}\mathbf{A})^\top. \end{aligned}$$

5.5 a) Setze $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{M}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} & & (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{M} \\ &\Longleftrightarrow & (\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ &\Longleftrightarrow & \mathbf{E} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ &\Longleftrightarrow & \mathbf{A} &= \mathbf{M}. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & & (\mathbf{A}^{-1})^\top &= (\mathbf{A}^\top)^{-1} \\ &\Longleftrightarrow & (\mathbf{A}^\top)(\mathbf{A}^{-1})^\top &= \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}^\top)^{-1} \\ &\Longleftrightarrow & (\mathbf{A}^\top)(\mathbf{A}^{-1})^\top &= \mathbf{E} \\ &\Longleftrightarrow & (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^\top &= \mathbf{E} \\ &\Longleftrightarrow & (\mathbf{E})^\top &= \mathbf{E} \\ &\Longleftrightarrow & \mathbf{E} &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} & & (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ &\Longleftrightarrow & (\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \\ &\Longleftrightarrow & \mathbf{E} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ &\Longleftrightarrow & \mathbf{E} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ &\Longleftrightarrow & \mathbf{E} &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

5.6

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ existiert genau dann, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$, also $ad \neq bc$.

5.7 Das Pivot-Verfahren führt im zweiten Schritt auf

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	-3	4	-2
0	1	4	-5	5
0	0	0	0	-4

also ist das LGS nicht lösbar.

5.8 Mit dem Pivot Verfahren ergibt sich nach zwei Schritten:

x_1	x_2	x_3	
1	0	2	$3a-b$
0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{b-2a}{2}$
0	0	0	$c-5a+2b$

LGS lösbar, wenn $c-5a+2b=0$, eine eindeutige Lösung existiert in keinem Fall. Die allgemeine Lösung lautet: $x_1 = 3a-b-2x_3, x_2 = \frac{b-2a}{2} + \frac{5}{2}x_3, x_3 = x_3 \qquad$ mit $x_3 \in \mathbb{R}$.

5.9 a)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{A}^{-1}$ existiert nicht.

5.10 $\lambda_{1/2} = -2, \lambda_3 = 7$.

5.11 Betrachte die beiden 2×2-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist:

$$\det \mathbf{A} = a_1a_4 - a_2a_3, \quad \det \mathbf{B} = b_1b_4 - b_2b_3.$$

Damit:

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = a_1a_4b_1b_4 - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3.$$

Andererseits ist:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (a_1b_1 + a_2b_3)(a_3b_2 + a_4b_4) - (a_1b_2 + a_2b_4)(a_3b_1 + a_4b_3) \\ &= a_1a_4b_1b_4 - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3 \\ &= \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

5.12 Setze: x die Anzahl der Äpfel, y die Anzahl der Bananen, z die Anzahl der Ananas. Um festzustellen, ob die ME $A = 16, B = 20, C = 18$ durch eine Mischung aus Obst erhalten werden kann, muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 16 \\ 2x + 2y + 4z &= 20 \\ 2x + y + 3z &= 18 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist:

$$x = 6,5, \quad y = 0,5, \quad z = 1,5.$$

5.13

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1150 & 650 & 420 & 1800 \\ 1080 & 580 & 400 & 1800 \\ 1050 & 710 & 420 & 1500 \end{pmatrix}.$$

K_{ij}: Kosten bei der Lieferung der drei Produkte von Lieferant i an das Werk j.

5.14 Die Produktionseinheiten erfüllen das LGS:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Der Vektor $\mathbf{b}$ beschreibt die auslieferbaren Mengen. Für $\mathbf{b}$ ergibt sich:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}.$$

Mit den gegebenen Werten erhält man:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 210 \end{pmatrix}.$$

5.15 a) Die Leontief–Inverse $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ muss existieren und deren Elemente müssen positiv oder Null sein. Für $a < \frac{4}{5}$ sind diese Eigenschaften erfüllt.
b) Für die vorgegebenen Werte erhält man:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 125 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

5.16 Das LGS lautet:

$$\begin{aligned} x_5 &= 5 \\ x_4 &= 3x_5 + 6 \\ x_3 &= 2x_5 \\ x_2 &= 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 \\ x_1 &= 2x_3 + x_5 \end{aligned}$$

mit der Lösung:

$$x_5 = 5; x_4 = 21; x_3 = 10; x_2 = 128; x_1 = 25.$$

5.17 Es existieren die Produkte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}, \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}, \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{B}^\top$

Kapitel 6

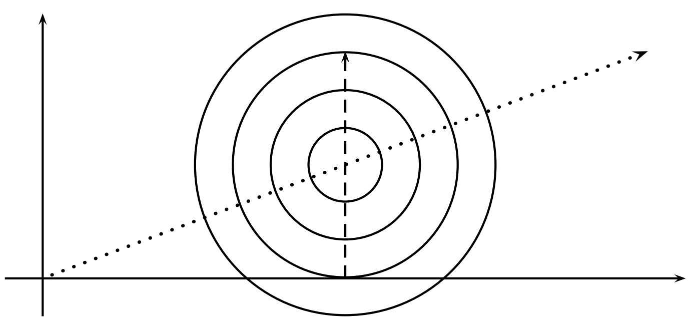
6.1 a) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + e^{x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 e^{x_2} + 2x_2x_3$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2^2$, b) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ln(x_2x_3) - \frac{1}{x_1+x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1 \cdot x_3}{x_2} - \frac{1}{x_1+x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3}$.

6.2

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2(x-1) \\ -2(y-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Das Höhenlinienbild konstruiert man aus der Forderung $f(x,y) = c$, oder $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 16-c \qquad (c \le 16)$. Die Höhenlinien sind konzentrische Kreise um den Punkt $(x,y) = (1, \frac{1}{2})$ mit dem Radius $\sqrt{16-c}$.

$$\mathbf{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{grad} f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



6.3 Die Outputfunktion ist: $x(r_1,r_2,r_3) = 3r_1^2 \cdot \sqrt{r_2} + 5r_1r_2r_3^{\frac{1}{3}}$. Das totale Differential ist:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial x}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial x}{\partial r_3} dr_3 \\ &= (6r_1\sqrt{r_2} + 5r_2r_3^{1/3})dr_1 + (\frac{3}{2}\frac{r_1^2}{\sqrt{r_2}} + 5r_1r_3^{1/3})dr_2 + (\frac{5}{3}r_1r_2r_3^{-2/3})dr_3. \end{aligned}$$

An der Stelle $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ ergibt sich:

$$dx\Big|_{(1,1,1)} = 11dr_1 + \frac{13}{2}dr_2 + \frac{5}{3}dr_3$$

Für die angegebene Veränderung ergibt sich der Wert: $dx \approx 2,08$.

6.4 a) Die Bedingung an die Produktionsfunktion lautet:

$$x(r_1, r_2) = 2\sqrt{r_1} \cdot \sqrt[3]{r_2} \overset{!}{=} 216.$$

Mit $r_2 = 27$ ergibt sich der Wert $r_1 = 1296$.
b) Mit $dx(r_1, r_2) = 0$ ergibt sich:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial r_1}}{\frac{\partial x}{\partial r_2}} = -\frac{3}{2}\frac{r_2}{r_1}.$$

oder $dr_2 = -\frac{3}{2}\frac{r_2}{r_1}dr_1$. Mit $r_1 = 1296, r_2 = 27$ ergibt sich eine Erhöhung von $0,031$ Einheiten des 2. Faktors, um die Reduktion des 1. Faktors um eine Einheit zu kompensieren.

6.5 Die Hesse–Matrix für Funktionen zweier Variablen, $f(x, y)$, lautet:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Hesse–Matrix, $\lambda_{1/2}$ berechnen sich aus der Bedingung:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ c & b - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Dies liefert eine quadratische Gleichung in λ mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2}.$$

Die Bedingung, dass beide Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$) führt auf $ab - c^2 > 0$ oder

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) > 0.$$

Für $a < 0$ und $b < 0$ ist:

$$\lambda_1 = \frac{a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2} < 0$$

mit $ab - c^2 > 0$ gilt dann auch $\lambda_2 < 0$, wie oben gezeigt wurde.

Für $a > 0$ und $b > 0$ ist:

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2} > 0$$

mit $ab - c^2 > 0$ gilt dann auch $\lambda_2 > 0$, wie oben gezeigt wurde.

6.6

a) Die Hesse-Matrix lautet:

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_{1/2} = \frac{-16 \pm \sqrt{88}}{2} < 0.$$

Daher ist $f(x, y)$ konkav von oben.

b)

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - 4x + 2y \\ 2 - 12y + 2x \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\mid \mathbf{grad} f(0, 0) \mid = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{20} > 0,5$$

<u>1. Iterationsschritt:</u>

$$f(\mathbf{x}^{(0)} + \mu^{(0)} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{x}^{(0)}) = f \begin{pmatrix} 4\mu^{(0)} \\ 2\mu^{(0)} \end{pmatrix} = 20\mu^{(0)} - 40(\mu^{(0)})^2$$

$f(\mu^{(0)})$ wird maximal für $\mu^{(0)} = \frac{1}{4}$.

Damit

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

und

$$\mid \mathbf{grad} f \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} > 0,5$$

<u>2. Iterationsschritt:</u>

$$f(\mathbf{x}^{(1)} + \mu^{(1)} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{x}^{(1)}) = f \begin{pmatrix} 1 + \mu^{(1)} \\ \frac{1}{2} - 2\mu^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{5}{2} + 5\mu^{(0)} - 30(\mu^{(0)})^2$$

$f(\mu^{(1)})$ wird maximal für $\mu^{(1)} = \frac{1}{12}$. Damit

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

und

$$\mid \mathbf{grad} f \begin{pmatrix} \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mid = 0,37 < 0,5$$

Damit bricht das Verfahren an dieser Stelle ab.

c) Die exakte Lösung berechnet sich aus:

$$\mathbf{grad}\ f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Explizit:

$$\begin{aligned} 4 - 4x + 2y &= 0 \\ 2 + 2x - 12y &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$x = \frac{13}{11}; y = \frac{4}{11}.$$

Dies ist zu vergleichen mit der Näherungslösung

$$x^{(2)} = \frac{13}{12}; y^{(2)} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}.$$

d) Substitution der Variablen. Setze dazu $y = x + 3$ in $f(x,y)$ ein. Diese Ersetzung führt auf:

$$f(x) = -6x^2 - 24x - 48.$$

Das Maximum dieser Funktion ist bei $x_M = -2$, Resubstitution liefert $y_M = 1$.

Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathcal{L} = 4x - 2x^2 + 2y - 6y^2 + 2xy - \lambda(x + 3 - y)$$

Die drei Bedingungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

liefern ein LGS für die drei Variablen x, y, λ mit der Lösung

$$x = -2, y = 1, \lambda = 14.$$

6.7 $f(x,y) = x^{-2}e^{-y} + x^2y^3 = 0$, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{-2x^{-3}e^{-y} + 2xy^3}{-x^{-2}e^{-y} + 3x^2y^2}.$$

6.8 Der Abstand d eines beliebigen Punktes $P = (x,y)$ vom Ursprung der $x-y$–Ebene ist: $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Nebenbedingung:

$$g(x,y) = x^2 - 3x + 3 - y$$

Lagrange Funktion:

$$\mathcal{L} = \sqrt{x^2+y^2} - \lambda\big(x^2 - 3x + 3 - y\big).$$

Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremas ist:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} = 0, \quad z_i = x, y, \lambda$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda(2x-3) \text{ oder } \lambda = \frac{x}{(2x-3)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{(2x-3)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ oder } y = -\frac{x}{2x-3}.$$

Einsetzen in die dritte Gleichung liefert:

$$x^2 - 3x + 3 + \frac{x}{2x-3} = 0 \text{ oder } 2x^3 - 9x^2 + 16x - 9 = 0.$$

Diese Gleichung hat die einzige reelle Lösung $x = 1$. Damit: $P = (1,1)$ ist derjenige Punkt der Parabel $y = x^2 - 3x + 3$, der den geringsten Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems hat.

6.9 1. Die Auflösung der Nebenbedingung

$$g(x,y) = -\frac{3}{2}x + 3y + 6 = 0.$$

nach $y(x)$ liefert

$$y = -2 + \frac{x}{2}.$$

Einsetzen in die Funktion $f(x,y)$ führt auf die Elimination der Variablen y, wir erhalten eine Funktion $\overline{f(x)}$ mit

$$\overline{f(x)} = x^2 + 2x\big(2 + \frac{x}{2}\big) = 2x^2 - 4x.$$

Differentiation nach x ergibt:

$$\frac{d\overline{f(x)}}{dx} = 4x - 4 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \; x = 1.$$

Da

$$\frac{d^2\overline{f(x)}}{dx^2} = 4 > 0$$

handelt es sich dabei um ein Minimum. Also, der Punkt $x = 1$ ist ein Minimum der Funktion $\overline{f(x)}$, da

$$y = -2 + \frac{x}{2}\Big|_{x=1} = -\frac{3}{2}$$

erhalten wir, dass die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 2xy$$

im Punkt $P = (1, -3/2)$ ein Minimum hat.

2. Die Lagrange Funktion lautet:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) = x^2 + 2xy + \lambda \cdot \big(-\frac{3}{2}x + 3y + 6\big).$$

Die notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremums ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Wir erhalten die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + 2y - \frac{3}{2}\lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2x + 3\lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\frac{3}{2}x + 3y + 6.$$

Die Lösung dieses lineraen Gleichungssystems ist

$$x = 1, y = -3/2, \lambda = -2/3.$$

6.10 Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \lambda) = ar_1^{\alpha} r_2^{\beta} + \lambda\big(b - k_1 r_1 + k_2 r_2\big).$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} = \alpha \cdot a \cdot r_1^{\alpha-1} r_2^{\beta} - \lambda \cdot k_1 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = \beta \cdot a \cdot r_1^{\alpha} r_2^{\beta-1} - \lambda \cdot k_2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = b - k_1 r_1 + k_2 r_2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir durch Auflösen nach λ:

$$\lambda = \frac{a \cdot \alpha}{k_1} \cdot r_1^{\alpha-1} \cdot r_2^{\beta},$$

aus der zweiten Bedingung:

$$\lambda = \frac{a \cdot \beta}{k_2} \cdot r_1^{\alpha} \cdot r_2^{\beta-1}.$$

Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen eliminiert den Lagrange Multiplikator λ, wir erhalten:

$$\frac{a \cdot \alpha}{k_1} \cdot r_1^{\alpha-1} \cdot r_2^{\beta} = \frac{a \cdot \beta}{k_2} \cdot r_1^{\alpha} \cdot r_2^{\beta-1}$$

oder

$$r_2 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot r_1.$$

Einsetzen dieser Beziehung in die dritte Bedingung ergibt:

$$b - k_1 \cdot r_1 - k_2 \cdot r_2 = 0$$

oder

$$b - k_1 \cdot r_1 - \frac{\beta}{\alpha} k_1 \cdot r_1 = 0.$$

Auflösen nach r_1 ergibt:

$$r_1 = \frac{\alpha \cdot b}{k_1(\alpha + \beta)}.$$

Einsetzen in die obige Beziehung zwischen r_1 und r_2 liefert:

$$r_2 = \frac{\beta \cdot b}{k_2(\alpha + \beta)}.$$

6.11a) Das Volumen eines Zylinders ist:

$$V(r, h) = r^2 \pi \cdot h.$$

Die Oberfläche des Zylinders ist:

$$O = 2 \cdot r^2\pi + 2\pi \cdot r \cdot h.$$

Zu maximieren ist das Volumen unter der Nebenbedingung, dass die Oberfläche $2\mathrm{m}^2$ beträgt. Daher

$$O = 2 \cdot r^2\pi + 2\pi \cdot r \cdot h \stackrel{!}{=} 2$$

Diese Nebenbedingung lösen wir nach $h(r)$ auf und erhalten:

$$h(r) = \frac{1 - r^2\pi}{\pi \cdot r}.$$

Damit:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h(r) = r - r^3 \cdot \pi.$$

Die Bedingung dafür, dass das Volumen maximal wird ist

$$\frac{dV(r)}{dr} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 3r^2\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_m = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}.$$

Die negative Lösung ist nicht sinnvoll und es bleibt damit die eindeutige Lösung r_m.

b) Damit ist

$$V(r_m) = r_m - r_m^3 \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3\pi}}.$$

Die Höhe des Zylinders mit maximalem Inhalt ist dann

$$h(r_m) = \frac{1 - r_m^2 \cdot \pi}{\pi \cdot r_m} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

c) In diesem Fall muß die Oberfläche minimiert werden unter der Nebenbedingung, dass das Volumen konstant ist, respektive den Wert 1 m^3 hat.

$$V = 1\ \mathrm{m}^3 \quad \Longrightarrow \quad r^2 \cdot \pi \cdot h = 1,$$

also

$$h(r) = \frac{1}{r^2\pi}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für die Oberfläche des Zylinders ein, erhält man:

$$O(r) = 2r^2 \cdot \pi + \frac{2}{r}.$$

Dies wird minimal, wenn

$$O'(r) = 4\pi \cdot r - \frac{2}{r^2} \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Lösung ist

$$r_{min} = \frac{1}{(2\pi)^{1/3}}.$$

Dann ist

$$h(r_{min}) = \frac{(2\pi)^{2/3}}{\pi},$$

und

$$O(r_{min}) = 3 \cdot (2\pi)^{1/3}$$

d) Der Körper mit dem 'günstigeren' Verhältnis ist die Kugel. Es gilt

$$V_k = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

und

$$O_k = 4\pi \cdot r^2$$

Eine Kugel mit Volumen von 1 $\,\mathrm{m}^3$ hat den Radius:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \approx 0.62 \text{ m}.$$

Die Oberfläche der Kugel mit diesem Radius ist:

$$O_k = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \approx 4,83 \text{ m}^2.$$

Die Oberfläche des Zylinders mit dem Volmen von einem Kubikmeter ist

$$O_z = 3 \cdot (2\pi)^{1/3} \approx 5,536 \text{ m}^2,$$

i.e. die Kugel benötigt nur 87.25% des Blechs wie der Zylinder.

Kapitel 7

7.1 $K_{163} = 5067,92$€.

7.2 $p = 17,59$ %.

7.3 $K_0 = 9737,10$ €.

7.4 $n = 0.625$ oder 225 Tage.

7.5 Zinsfuß: 5%, Zinsfaktor: $q = 1.05$, Aufzinsungsfaktor für 10 Jahre: $1.05^{10} = 1.629$, Endkapital nach 10 Jahren: $K_{10} = 13031$ €.

7.6 $K_3 = 2\,282,33$€, $K_7 = 2\,747,86$€.

7.7 $n = 53.6$ Jahre

7.8 a) $A = 16.759,56$ €, b) $T_{19} = 15.375,74$ €, c) $K_5 = 130.492,48$ €, d) $T_8 = 5.958,60$ €, e) Für $A = 14.000$ € p.a.: $n = 38,66$ Jahre, für $A = 13.600$ € p.a.: $n = 57,34$ Jahre, für $A = 13.000$ € p.a. keine Lösung.

7.9 42,06 Jahre, 30,73 Jahre.

7.10 $i = 5,128\%$.

7.11 a) Gesamtbetrag = 420.165,34 €, b) Gesamtbetrag = 386.958,82 €
Tilgungsplan ohne Sondertilgung:

- $K_0 = 250.000$ €
- $i = 0,04$
- $q = 1,04$
- $A = 15.000$ €
- $n = 28.01$

Periode	**Zins**	**Tilgung**	**Kosten**	**Restschuld**
0	0,00	0,00	0,00	250.000,00
1	10.000,00	5.000,00	15.000,00	245.000,00
2	9.800,00	5.200,00	30.000,00	239.800,00
3	9.592,00	5.408,00	45.000,00	234.392,00
4	9.375,68	5.624,32	60.000,00	228.767,68
5	9.150,71	5.849,29	75.000,00	222.918,39
6	8.916,74	6.083,26	90.000,00	216.835,12
7	8.673,40	6.326,60	105.000,00	210.508,53
8	8.420,34	6.579,66	120.000,00	203.928,87
9	8.157,15	6.842,85	135.000,00	197.086,02
10	7.883,44	7.116,56	150.000,00	189.969,46
11	7.598,78	7.401,22	165.000,00	182.568,24
12	7.302,73	7.697,27	180.000,00	174.870,97
13	6.994,84	8.005,16	195.000,00	166.865,81
14	6.674,63	8.325,37	210.000,00	158.540,44
15	6.341,62	8.658,38	225.000,00	149.882,06
16	5.995,28	9.004,72	240.000,00	140.877,34
17	5.635,09	9.364,91	255.000,00	131.512,44
18	5.260,50	9.739,50	270.000,00	121.772,94
19	4.870,92	10.129,08	285.000,00	111.643,85
20	4.465,75	10.534,25	300.000,00	101.109,61
21	4.044,38	10.955,62	315.000,00	90.153,99
22	3.606,16	11.393,84	330.000,00	78.760,15
23	3.150,41	11.849,59	345.000,00	66.910,56
24	2.676,42	12.323,58	360.000,00	54.586,98
25	2.183,48	12.816,52	375.000,00	41.770,46
26	1.670,82	13.329,18	390.000,00	28.441,28
27	1.137,65	13.862,35	405.000,00	14.578,93
28	583,16	14.416,84	420.000,00	162,09

Tilgungsplan mit Sonderzahlung:

- $K_0 = 250.000$ €
- $i = 0,04$
- $q = 1,04$
- $A = 15.000$ €
- $n = 24.13$

Periode	Zins	Tilgung	Kosten	Restschuld
0	0,00	0,00	0,00	250.000,00
1	10.000,00	5.000,00	15.000,00	245.000,00
2	9.800,00	5.200,00	30.000,00	239.800,00
3	9.592,00	5.408,00	45.000,00	234.392,00
4	9.375,68	5.624,32	60.000,00	228.767,68
5	9.150,71	5.849,29	**100.000,00**	**197.918,39**
6	7.916,74	7.083,26	115.000,00	190.835,12
7	7.633,40	7.366,60	130.000,00	183.468,53
8	7.338,74	7.661,26	145.000,00	175.807,27
9	7.032,29	7.767,71	160.000,00	167.839,56
10	6.713,58	8.286,42	175.000,00	159.553,14
11	6.382,13	8.617,87	190.000,00	150.935,27
12	6.037,41	8.962,59	205.000,00	141.972,68
13	5.678,91	9.321,09	220.000,00	132.651,59
14	5.306,06	9.693,94	235.000,00	122.957,65
15	4.918,31	10.081,69	250.000,00	112.875,95
16	4.515,04	10.484,96	265.000,00	102.390,99
17	4.095,64	10.904,36	280.000,00	91.486,63
18	3.659,47	11.340,53	295.000,00	80.146,10
19	3.205,84	11.794,16	310.000,00	68.351,94
20	2.734,08	12.265,92	325.000,00	56.086,02
21	2.243,44	12.756,56	340.000,00	43.329,46
22	1.733,18	13.266,82	355.000,00	30.062,64
23	1.202,51	13.797,49	370.000,00	16.265,14
24	650,61	14.349,39	385.000,00	1.915,75

7.12 $t = 1\%, n = 41,03$ Jahre, $t = 2,5\%, n = 24,36$ Jahre.

7.13 Der Zinssatz für das Darlehen darf höchstens 7,93% sein, damit die Darlehenssumme von 10 000 € bei einer Annuität von 2 000 € im Jahr innerhalb von fünf Jahren zurückgezahlt werden kann.

Literaturverzeichnis

Alten H.-W., Djafari Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H. Wußing, H. (2003): 4000 Jahre Algebra, Geschichte Kulturen Menschen, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Anderson, I. (2001): A First Course in Discrete Mathematics, SUMS, Springer, London.

Apostol, T. (1971): Mathematical Analysis, A Modern Approach to Advanced Calculus, Addison Wesley, Reading Massachusetts.

Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, Ch., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. (2012): Mathematik, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Bardi, J.S. (2006): The Calculus Wars, Newton, Leibniz and the greatest mathematical clash of all time, Thunder's Mouth Press, New York.

Basieux, P. (2000): Die Architektur der Mathematik, Denken in Strukturen, Rowohlt, Hamburg.

Bosch, K. (2010): Brückenkurs Mathematik, Eine Einführung mit Beispielen und Übungsaufgaben, 14. Auflage, Oldenbourg, München.

Bronstein, I.N. et al. (2005): Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch.

Bröcker, T. (1980): Analysis in mehreren Variablen, B.G. Teubner, Stuttgart.

Courant, R. (1971a): Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, I. Funktionen einer Veränderlichen. Vierte Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Courant, R. (1971b): Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, II. Funktionen mehrerer Veränderlichen. Vierte Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Courant, R., Robbins, H. (2000): Was ist Mathematik?, Fünfte, unveränderte Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

Dean, N. (2003): Diskrete Mathematik, Pearson Education, München.

Deiser, O. (2004): Einführung in die Mengenlehre, 2., verbesserte und erweiterte Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg.

Dieudonné, J. (1985): Geschichte der Mathematik 1700 – 1900, Vieweg, Braunschweig.

Derbyshire, J. (2006): Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra, Penguin Books, New York.

T. Holey, A. Wiedemann, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* BA KOMPAKT,
DOI 10.1007/978-3-662-48143-1,

Domschke, W., Drexl, A. (2011): Einführung in Operations Research, 8. Auflage, Springer, Berlin.

Dunham, W. (1990): Journey through Genius, The Great Theorems of Mathematics. Penguin Books, New York.

Erwe, F. (1962): Differential- und Integralrechnung I, II. Bibliographisches Institut, Mannheim.

Fischer, G. (2010): Lineare Algebra, 17. akt. Auflage, Vieweg + Teubner, Braunschweig.

Fuchs, D., Tabachnikov, S, (2011): Ein Schaubild der Mathematik, Springer Verlag, Berlin.

Führer, C. (2006): Kompakt–Training Wirtschaftsmathematik, Kiehl, Ludwigshafen.

Garnier, R.; Taylor, J. (2002): Discrete Mathematics for New Technology, Bristol, Philadelphia.

Goebbels, S., Ritter, S. (2011): Mathematik verstehen und anwenden, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. (1994), Concrete Mathematics, Second Edition, Addison–Wesley, Boston.

Gregg, J. R. (1998): Ones and Zeros, Understanding Boolean Algebra, Digital Circuits and the Logic of Sets, IEEE Press, New York.

Hall, R. (2002): Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz, Cambridge University Press.

Hilgert I., Hilgert J. (2012): Mathematik — ein Reiseführer, Springer Spektrum, Heidelberg.

Katz, V. J. (2009): A History of Mathematics, An Introduction, 3rd Edition, Addison–Wesley, Boston.

Kelly, J. (2003): Logik im Klartext, Pearson Studium, München.

Koop, A., Moock, H. (2008): Lineare Optimierung, Eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Koshy, T. (2004): Discrete Mathematics with Applications, Elsevier, Amsterdam.

Kreuzer, M.; Kühling, S. (2006): Logik für Informatiker, Pearson Studium, München.

Lang, S. (1986): A First Course in Calculus, Fifth Edition, Springer Verlag, New York.

Lang, S. (1987): Linear Algebra, Third Edition, UTM, Springer Verlag, New York.

Lang, S. (1988): Basic Mathematics, Springer Verlag, New York.

Maor, E. (1991): To Infinity and Beyond, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Maor, E. (1994): e: The Story of a Number, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Maor, E. (2010): The Pythagorean Theorem, A 4000–Year History, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Maor, E. (2013): Trigonometric Delights, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Marsden, J., Weinstein, A (1985) Calculus I, Second Edition, Springer, New York.

Marsden, J., Weinstein, A (1985) Calculus II, Second Edition, Springer, New York.

Marsden, J., Weinstein, A (1985) Calculus III, Second Edition, Springer, New York.

Pesic, P. (2005): Abels Beweis, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Purkert, W. (2014): Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 8. aktualisierte Auflage, Springer–Gabler.

Rommelfanger H. (2010): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 1 und 2, 6. bzw. 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Schäfer, W., Georgi, K., Trippler, G. (2002): Mathematik–Vorkurs, Übungs– und Arbeitsbuch für Studienanfänger, 5. Auflage, Teubner, Stuttgart.

Spivak, M. (2008): Calculus, Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

Staab, F. (2007): Logik und Algebra, Oldenbourg.

Stillwell, J. (2002): Mathematics and its History, Second Edition, Springer Verlag, New York.

Stöppler, S. (1982): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 3. Auflage, Gabler.

Tietze, J. (2006a): Einführung in die Finanzmathematik, 8. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Braunschweig.

Tietze, J. (2006b): Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik 13. Auflage Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden.

Toenniessen, F. (2010): Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Winter, R. (2001): Grundlagen der formalen Logik, 2. überarbeitete Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt.

Index

T. Holey, A. Wiedemann, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* BA KOMPAKT,
DOI 10.1007/978-3-662-48143-1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016