

# Anhang

## A.1 Lösungen zum Test

### Lösungen zum Test aus Kapitel 1.6

#### 1.1

$$A \cup B = \{0, \dots, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

#### 1.2

- a) Die beiden Aussagen  $A(x)$  und  $B(x)$  sind äquivalent, denn

$$x^2 = 16 \iff x = 4 \vee x = -4.$$

Somit ist  $A(x) \iff B(x)$ .

- b) Ja, denn:

$$\begin{aligned} A(x) : \quad x^2 - y^2 = 0 &\iff (x - y)(x + y) = 0 \\ &\iff x = y \vee x = -y \end{aligned}$$

und daher ist  $A(x) \iff B(x)$ .

- c) Nein, denn

$$x^2 \geq a \iff |x| \geq \sqrt{a} \iff x \geq \sqrt{a} \vee x \leq -\sqrt{a}.$$

Aus diesem Grund ist  $A(x) \not\iff B(x)$ .

#### 1.3

- a) Eine notwendige Bedingung für einen Gewinn im Lotto ist die Abgabe des Tippzettels. Eine hinreichende Bedingung für den Gewinn ist das Ankreuzen der richtigen Zahlen.
- b) Nein, es gilt  $B(x) \implies A(x)$ , aber  $A(x) \not\implies B(x)$ .

## 1.4

$$\text{a) } \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4}.$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{3x^n + 2x^{n+2}}{x^{n+1} + 3x^n} &= \frac{x^n(3 + 2x^2)}{x^n(x + 3)} \\ &= \frac{3 + 2x^2}{x + 3}. \end{aligned}$$

Dieser Term ist definiert für  $x \neq 0, x \neq -3$ .

c) Wir führen folgende Vereinfachung durch:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^{6n-9}} &= (x^{6n-9})^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{2n-3} \\ &= \frac{x^{2n}}{x^3}. \end{aligned}$$

Dieser Term ist definiert für alle  $x \neq 0$ .

## 1.5 Auflösen von Gleichungen:

a)

$$\begin{aligned} 2x - 7 &= \frac{3}{2}x + \sqrt{3} \\ \iff \frac{1}{2}x &= \sqrt{3} + 7 \\ \iff x &= 2(\sqrt{3} + 7) \approx 17,46. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2x+6} &= 4 \quad (x \neq 3) \\ \iff x-3 &= 4(2x+6) \\ \iff x-3 &= 8x+24 \\ \iff 7x &= -27 \\ \iff x &= -\frac{27}{7}. \end{aligned}$$

c) Die quadratische Gleichung

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3},$$

also:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

d) Die Gleichung

$$x - 3 = \frac{1}{2 + x}$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 7 = 0$$

mit den Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 28}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

e) Quadrieren der Gleichung

$$\sqrt{x} = 1 - x$$

führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Von den beiden Lösungen ist nur  $x = (3 - \sqrt{5})/2$  die Lösung der ursprünglichen Gleichung, da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist.

f)

$$x^5 - 12 = 3$$

$$x^5 = 15$$

$$x = \sqrt[5]{15} \approx 1,7187.$$

g) Zur Lösung der Gleichung

$$x^4 + 4x^2 - 8 = 0$$

substituieren wir:  $x^2 = u$  bzw.  $x = \pm\sqrt{u}$ . Einsetzen liefert die quadratische Gleichung:

$$u^2 + 4u - 8 = 0$$

mit den beiden Lösungen:

$$u_{1/2} = -2 \pm 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Resubstitution ergibt:

$$x_1 = \sqrt{-2 + 2\sqrt{3}}; \quad x_2 = -\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}}.$$

Die Lösung  $u_2 = -2 - 2\sqrt{3}$  liefert keine (reellen) Lösungen für  $x$ .

h)

$$\begin{aligned}
 3^x + 12 &= 24 \\
 3^x &= 12 \\
 x &= \log_3 12 \\
 &= \frac{\ln 12}{\ln 3} \\
 &\approx 2,261.
 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
 3^x + 3^{x+2} &= 110 \\
 3^x + 9 \cdot 3^x &= 110 \\
 10 \cdot 3^x &= 110 \\
 3^x &= 11 \\
 x &= \log_3 11 \\
 &= \frac{\ln 11}{\ln 3} \\
 &\approx 2,18.
 \end{aligned}$$

j) Zur Lösung der Gleichung

$$-2^x + 4 \cdot 2^{2x} = 128$$

substituieren wir:

$$2^x = u, \quad x = \log_2 u, \quad (u > 0), \quad \text{mit } u^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

Einsetzen in die obige Gleichung liefert die quadratische Gleichung:

$$4u^2 - u - 128 = 0$$

mit den beiden Lösungen:

$$u_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{2049}}{8}.$$

Da  $u > 0$ , ist die gesuchte Lösung

$$u_1 = \frac{1 + \sqrt{2049}}{2}.$$

Damit ist

$$x = \log_2 \left( \frac{1 + \sqrt{2049}}{8} \right) \approx 2,531.$$

k)

$$\begin{aligned}\log_2 4x &= 15 \\ 4x &= 2^{15} \\ x &= \frac{1}{4} \cdot 2^{15} = 2^{13} = 8.192.\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}\lg(x+10) - \lg(2x+5) &= 3 && (x > 3 \wedge x > \frac{5}{2}) \\ \lg \frac{x+10}{2x+5} &= 3 \\ \frac{x+10}{2x+5} &= 10^3 \\ x+10 &= 2000x+5000 \\ x &= -\frac{4990}{1999} \approx -2,496.\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}\log_2 3x + \log_4 5x &= 3 \\ \log_2 3x + \frac{\log_2 5x}{\log_2 4} &= 3 \\ \log_2 3x + \frac{1}{2} \log_2 5x &= 3 \\ \log_2 3x + \log_2 \sqrt{5x} &= 3 \\ \log_2(3x\sqrt{5x}) &= 3 \\ 3x\sqrt{5x} &= 2^3 \\ 3\sqrt{5} \cdot x^{3/2} &= 8 \\ x &= \left(\frac{8}{3\sqrt{5}}\right)^{2/3}.\end{aligned}$$

**1.6** Gesucht ist die positive reelle Zahl  $x$ , so dass  $1/x$  um 1 kleiner ist als  $x$ . Das bedeutet,  $x$  ist Lösung der Gleichung:

$$\frac{1}{x} = x - 1$$

oder

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Da die positive Lösung gesucht ist, folgt:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803\dots$$

Aus der quadratischen Gleichung geht hervor, dass das Quadrat dieser Zahl um 1 größer ist als  $x$ . Daher:

$$\begin{aligned} x &= 1,61803\dots \\ \frac{1}{x} &= 0,61803\dots \\ x^2 &= 2,61803\dots \end{aligned}$$

Die Zahl  $x = 1,61803\dots$  heißt auch Goldener Schnitt.

**1.7** Gemäß der binomischen Formel Gl. (1.9) erhält man:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= \sum_{i=1}^4 \binom{n}{k} a^i \cdot b^{n-i} \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

**1.8** Eine Veranschaulichung der Beziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

zwischen den Binomialkoeffizienten ist das Pascalsche Zahlendreieck. Diese Beziehung sagt aus, dass das  $k$ -te Element der  $n$ -ten Zeile die Summe ist aus den Elementen  $k-1$  und  $k$  der vorherigen Zeile.

1		$n = 0$	$k = 0$			
1	1	$n = 1$	$k = 0, 1$			
1	2	1	$n = 2$	$k = 0, 1, 2$		
1	3	3	1	$n = 3$	$k = 0, 1, 2, 3$	
1	4	6	4	1	$n = 4$	$k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Für den formalen Beweis der Beziehung zwischen den Binomialkoeffizienten verwendet man die Gl.(1.10):

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
 &\stackrel{*}{=} \frac{n!k}{nk!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{nk!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!(k+n-k)}{nk!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!n}{nk!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

Im Schritt \* verwenden wir die Definition der Fakultät in der Form:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}.$$

**1.9**

a)

$$\begin{aligned}
 3x + 5 &\geq -2x - 3 \\
 5x &\geq -8.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 x^5 &> 125 \\
 x &> \sqrt[5]{125}.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 -2x^2 + 3x - 1 &< 0 \\
 2x^2 - 3x + 1 &> 0.
 \end{aligned}$$

Zunächst wird die zugehörige Gleichung gelöst; dies führt auf die Lösungen:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Damit kann die Ungleichung geschrieben werden als:

$$(x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn beide Faktoren größer Null oder beide kleiner Null sind. Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich hieraus zu:

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \vee x < \frac{1}{2}\}.$$

**1.10** Multipliziert man die Gleichung

$$x_1 + x_2 = p$$

mit  $x_1$ , ergibt sich

$$x_1^2 + x_1 \cdot x_2 = p \cdot x_1$$

oder mit  $x_1 \cdot x_2 = q$ :

$$x_1^2 - p \cdot x_1 + q = 0.$$

Mit anderen Worten,  $x_1$  ist eine Lösung der quadratischen Gleichung  $x^2 - px + q = 0$ , aus Symmetriegründen gilt das gleiche für  $x_2$ .

Umgekehrt, sind  $x_1, x_2$  Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - px + q = 0,$$

dann ist

$$0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

und

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$



## A.2 Lösungen der Übungsaufgaben

Hier sind die Lösungen der Übungsaufgaben angegeben oder kurz skizziert.

### Kapitel 2

$$2.1 \text{ a) } D_f^{\max} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \vee x \leq 1\}, \text{ b) } D_f^{\max} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < +1 \wedge x \neq 0\}.$$

$$2.2 (f \circ f)(x) = x^4 - 10x^2 + 20, (f \circ g)(x) = \frac{25x^2}{(x^2 - 2)^2} - 5,$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{5x^2 - 25}{(x^2 - 5)^2 - 2}.$$

$$f(g(1)) = 20, \quad g(f(1)) = -\frac{10}{7}.$$

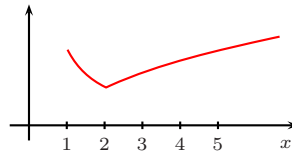
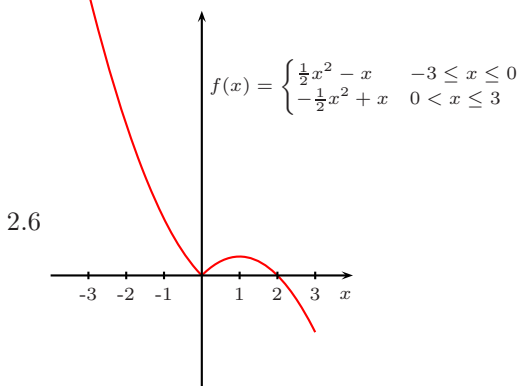
$$2.3 A = 2, b = 3\pi, x = 1/2, \text{ Nullstellen: } x = \frac{1}{6} + \frac{n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2.4 W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq +3\} \subset \mathbb{R}$$

$$2.5 \text{ 1. } D_{\max} = \mathbb{R}$$

$$2. W_f = \begin{cases} \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq c - \frac{b^2}{4a} \right\}, & a > 0, \\ \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq c - \frac{b^2}{4a} \right\}, & a < 0. \end{cases}$$

$$3. \frac{b^2}{4a} + 1 \leq c.$$



$$2.7 k \approx 0,025, x_D \approx 28,07 \text{ Jahre.}$$

- 2.8(a) Wertebereich:  $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq +8\}$ ,  
Umkehrfunktion:  $y = g(x) = 2x - 6$ .
- (b) Wertebereich:  $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ ,  
Umkehrfunktion:  $g(x) = +\frac{1}{2}\sqrt{x-1}$ .
- 2.9 a) nach oben beschränkt, b) nach oben beschränkt, c) nach unten beschränkt, d) beschränkt.
- 2.10 Injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv.
- 2.11 a) Nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv. b) Nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv. c) Injektiv, surjektiv und bijektiv. d) Nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv.
- 2.12  $f(x)$  ist stetig, falls  $a = 3/e$ .
- 2.13 a)  $D_f = \mathbb{R}, P_0 = (\ln 3^{1/3}, 0)$ . b)  $D_f = \mathbb{R}$ , keine Nullstelle. c)  $D_f = \mathbb{R}, P_0 = (0, 0)$ . d)  $D_f = \mathbb{R}, P_{0,1} = (\pm 2, 0)$ . e)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ , keine Nullstellen.
- 2.14
- a) Definitionsbereich:  $D_f = \mathbb{R}$ , Umkehrabbildung existiert für  $x \geq 0$ .  
Nullstellen:  $P_0 = (0, 0)$   
Wertebereich:  $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ .  
Umkehrabbildung:  $g(x) = +\sqrt{\exp\{2x\} - 1}$ .
- b) Definitionsbereich:  $D_g = \mathbb{R}_+$ .  
Nullstellen:  $l = 2$ .  
Wertebereich:  $W_g = \mathbb{R}$ .  
Umkehrabbildung:  $l(y) = 2 \cdot e^y$ .
- c) Definitionsbereich:  $D_f = \mathbb{R}_+$ .  
Nullstellen:  $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .  
Umkehrabbildung:  $g(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4e^x} - 1)$ .
- d) Definitionsbereich:  $D_h = \{b \in \mathbb{R} \mid b > 1\}$ .  
Nullstellen:  $b_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ .  
Umkehrfunktion:  $g(x) = +\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+4e^{2x}} + 1)}$ .
- 2.15  $f(x)$  gerade, dann ist  $f(x) - f(-x) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(-x) &= \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{e^{-x} - 1} + \frac{x}{2} \\
 &= x \left( \frac{e^{-x} - 1 + e^x - 1}{(e^x - 1)(e^{-x} - 1)} + 1 \right) \\
 &= x \left( \frac{e^{-x} + e^x - 2}{-e^x - e^{-x} + 2} + 1 \right) \\
 &= x(-1 + 1) = 0.
 \end{aligned}$$

2.16 Da  $f(x) = \sin x$  auf jedem Intervall

$$-\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

streng monoton und stetig ist, gibt es zwei Mengen unendlich vieler Umkehrfunktionen

$$y = 2n\pi + \arcsin x \quad \text{und} \quad y = (2n + 1)\pi - \arcsin x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Daher erhalten wir die beiden Mengen von Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{b} \left( \arcsin\left(\frac{d}{A}\right) + 2n\pi \right) - c, \quad n \in \mathbb{Z}, \\
 x &= \frac{1}{b} \left( (2n + 1) \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{d}{A}\right) \right) - c, \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

2.17  $f(x) = \frac{U_{max}}{2} \left( \sin\left[\frac{\pi}{6}(x - 3)\right] + 1 \right).$

2.18 a) 0, b) 0, c), d) existiert nicht.

2.19  $c = 10; \quad K_F = 1000.$

2.20 a)  $f_\infty = 32$ , b)  $t_{50\%} = 2.77$ ,  $t_{70\%} = 4.46$ ,  $t_{90\%} = 7.16.$

2.21  $p(x_N) = \frac{x_0}{c} - \frac{1}{c}x_N(p)$ , monoton fallend.

2.22  $p_{1/2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4b(a_0 - x_0)}}{2b}$ , wegen  $p > 0$  muss  $a_0 < x_0$  erfüllt sein, damit sich ein Marktgleichgewicht einstellt.

2.23 a)  $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -3$ , b)  $x_1 = 2, x_2 = x_3 = -5, x_4 = 3.$

2.24 a) 2, b) -2, c) 2

### Kapitel 3

$$3.1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \infty \text{ (de L'Hospital nicht anwendbar)}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

3.2 a)  $f'(x) = -3$ , anwenden des Grenzwertverfahrens:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(x + \Delta x) + 8 + 3x - 8}{\Delta x} = -3.$$

b)  $f'(x) = 2x$ , anwenden des Grenzwertverfahrens:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + a^2 - (x^2 + a^2)}{\Delta x} = 2x.$$

c)  $f'(x) = 2a(ax + b)$ , anwenden des Grenzwertverfahrens:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a(x + \Delta x) + b)^2 - (ax + b)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a(ax + b) + a^2 \Delta x) \\ &= 2a(ax + b). \end{aligned}$$

$$3.3 \text{ a) } f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \text{ b) } f'(x) = \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}, \text{ c) } f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}, \text{ d) } f'(x) = 1 + \ln x.$$

3.4

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}. \end{aligned}$$

Mit  $h = \Delta x/x$  ist ( $\Delta x \rightarrow 0$  bedeutet auch  $h \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + h)^{1/h} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + h)^{1/h} \\ &= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

3.5 a) stetig und differenzierbar, b) stetig, nicht differenzierbar.

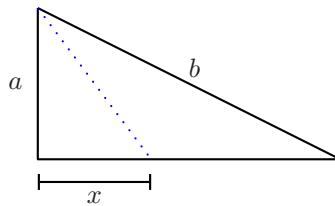
3.6 Die Startlösung  $x_1 = 1$  liefert:

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} = 1 - \frac{e^{-1} - 1}{-e^{-1} - 1} \approx 0,538.$$

3.7  $t_1(x) = \frac{1}{20}(x + 7), t_2(x) = \frac{1}{5}(x + 7).$

3.8 Mit  $K_l$  Verlegekosten pro km an Land,  $K_w$  Verlegekosten pro km im Wasser, ergibt sich die streckenabhängige Kostenfunktion für die Verlegung zu

$$K = K_w \cdot s_w + K_l \cdot s_l.$$



Die an Land verlegte Strecke ist  $s_l = \sqrt{b^2 - a^2} - x$ , die im Wasser ist  $s_w = \sqrt{a^2 + x^2}$ . Erste Ableitung nach  $x$ :

$$K'(x) = \frac{K_w \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - K_l \stackrel{!}{=} 0, \quad x_{min} = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{K_w}{K_l}\right)^2 - 1}}.$$

3.9

a)  $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1, f'(x) = 3x^2 - x + 1, f''(x) = 6x - 1.$

b)  $f(x) = e^{-x^2}, f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2x \cdot f(x), f''(x) = (4x^2 - 2)f(x).$

c)  $f(x) = 2 \sin x + 5 \cos x, f'(x) = 2 \cos x - 5 \sin x, f''(x) = -2 \sin x - 5 \cos x = -f(x).$

3.10  $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 3/2.$

3.11  $b^2 < 3ac.$

3.12a) Nullstellen:  $x_1 = 0, x_{2/3} = t^2 \pm \sqrt{t^4 + t}.$

b) Punkte mit waagrechter Tangente:  $x_{4/5} = \frac{2t^2 \pm \sqrt{4t^4 + 3t}}{3}$ , also 2 Lösungen für  $t > 0$ , 1 Lösung für  $t = 0$ . Der Charakter der Punkte mit waagrechter Tangente ergibt sich aus der Untersuchung der konvexen und konkaven Bereichen und dem Verhalten der Funktion für  $|x| \rightarrow \infty$ .

- c) Symmetrie:  $f_0(-x) = -f_0(x)$ , d.h. für  $t = 0$  Symmetrie zum Ursprung.  
Für  $t \neq 0$  keine Symmetrie erkennbar.
- d) Konvexe und konkave Bereiche:

$$\begin{aligned} \text{Für } x > \frac{2}{3}t^2 : \quad f_t''(x) < 0 & \quad \text{konkav von oben} \\ \text{Für } x < \frac{2}{3}t^2 : \quad f_t''(x) > 0 & \quad \text{konvex von oben} \end{aligned}$$

- e) Asymptotik:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = +\infty$ .

- 3.13 Stetigkeit von  $f(x)$  in  $x_0 = 2$  führt auf:  $4a - 4 = 2b + 1$ .  
Differenzierbarkeit von  $f(x)$  in  $x_0 = 2$  führt auf:  $4a - 2 = b$ .  
Damit ist die Funktion  $f(x)$  stetig differenzierbar, wenn  $b = -3$  und  $a = -\frac{1}{4}$ .
- 3.14  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  mit  $a = 1/8, b = d = 0, c = 3/4, e = 5/8$ . Diese Funktion hat vier reelle Nullstellen:  $x_1 = 1, x_2 = +\sqrt{5}, x_3 = -1, x_4 = -\sqrt{5}$ , und  $f(x)$  hat in  $P_1 = (0, 5/8)$  ein lokales Maximum und in  $P_{2/3} = (\pm\sqrt{3}, -1/2)$  zwei lokale Minima.
- 3.15 Preiselastizität:  $\epsilon_{x,p}(p) = -\frac{p}{10}$ , die Nachfrage steigt um 50 %,  $p = 100$ .
- 3.16 Produkte mit elastischer Preiselastizität: ersetzbare Güter, Genussmittel, Produkte mit unelastischer Preiselastizität: Lebensmittel, Energie.
- 3.17 Stückkosten:  $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ , mit  $k'(x) = 0$ , ergibt sich  $K'(x) = \frac{K(x)}{x}$ .  
Mit  $K(x) = 10 + 2x^2$  sind die Grenzkosten  $K'(x) = 4x$ . Schnittpunkt bei  $x = \sqrt{5}$ .
- 3.18  $K_F = 625$ .
- 3.19 Mit  $E(p) = x_0 \cdot p - c \cdot p^2$  und  $E'(p_{max}) = 0, E(p_{max}) = 100\,000$  ergibt sich  $E(p) = 2\,000p - 10p^2$ .
- 3.20 a)  $[2, \frac{3}{2} + \sqrt{105}/2]$ , b)  $G(10/6 + \sqrt{79/9}) \approx 43,28$ , c)  $p = 14$  €.
- 3.21  $k = \frac{1}{2}, a = e^{1/2}$ .
- 3.22  $p_v = \frac{6}{e^{7/6}}$ .

## Kapitel 4

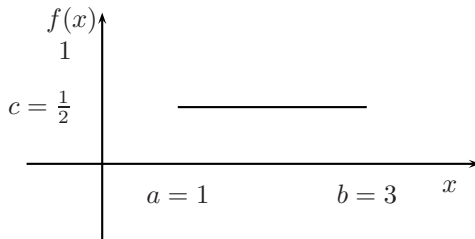
4.1 a)  $F(x) = x^3 + c$ , b)  $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{2x} + c$  c)  $F(x) = \frac{1}{6}(2x - 1)^3 + c$ , d)  
 $F(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax} + c$ , e)  $F(x) = -2\sqrt{1-x} + c$ , f)  $F(x) = -\cos x + c$ .

4.2

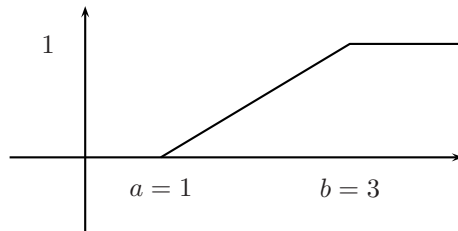
$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x.$$

$$\int_{1/e}^e \ln x dx = \frac{2}{e}.$$

4.3  $c = \frac{1}{b-a}$ ,



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \int_a^x c dx = c(x-a) & \text{für } a \leq x \leq b, \\ c \cdot (b-a) & \text{für } x > b \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{a+b}{2}. \quad \text{für } c = 1/(b-a).$$

4.4  $A = 11/6$ .

4.5  $I = e^2 - 2$ .

4.6  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ .

4.7  $A = \frac{1}{2}$ .

4.8  $x_0 = 3, K = 18, P = 9.$

4.9 Zweimalige partielle Integration liefert:  $I = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x).$

4.10  $I_1 = -\frac{1}{2}e^{-x^2}, I_2 = \frac{1}{2}.$

4.11  $I = \frac{1}{4} \ln(x^4 - 5) + c.$

4.12a)  $t_m = 2\sqrt{3}$  ist der Zeitpunkt, an dem der Kapitalfluss maximal wird.  
Kapitalfluss:  $f(t_m) = 48 \cdot \sqrt{3}.$

b)  $f(t) = 0 \iff -t^3 + 36t = 0 \implies t_1 = 0, t_2 = +6,$  die Lösung  $t = -6$  ist nicht sinnvoll. Maximales Kapital:

$$\int_0^6 f(t) dt = -\frac{1}{4}t^4 + 18t^2 \Big|_0^6 = 324.$$

Damit ist das Gesamtkapital  $K = K_0 + \Delta K = 900.$  (Ausgaben in Tausend Euro)

c)  $\bar{t} = \sqrt{96} \approx 9.8.$

4.13 Maximum:  $A = A_0 + \text{Zugänge} - \text{Abgänge} = 10 + 1,115 - 0.783 = 10,331$  (in Hunderttausend).

4.14  $I_1 = \frac{1}{4}, I_2 = -\frac{16}{3}, I_3 = \frac{65}{27}, I_4 = \frac{11}{3}.$

4.15  $\int_0^a \frac{2x}{1-x^2} dx = -\ln(1-a^2).$  existiert für  $a < 1.$

## Kapitel 5

5.1  $\mathbf{r}$  : Rohstoffe,  $\mathbf{z}$  : Zwischenprodukte,  $\mathbf{e}$  : Endprodukte.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rohstoffverbrauch:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}$$

Mit  $r_1 = 124, r_2 = 98$  folgt  $e_1 = 10, e_2 = 8.$

5.2 a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  existiert nicht, b)  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 4 \\ -17 & 2 & -3 \end{pmatrix},$

c)  $\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}$  existiert nicht, d)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 5 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix},$



e)  $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -11 & 11 & 1 \\ 4 & 8 & -3 \\ -4 & -5 & -13 \end{pmatrix}$ , f)  $\mathbf{B}^2$  existiert nicht, g)  $(\mathbf{B}^\top)^2$  existiert nicht.

5.3 a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 45 \\ -2 & 1 \\ -2 & 34 \end{pmatrix}$ , b)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  existiert nicht, c)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,

d)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 88 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

5.4 a)  $\mathbf{B}^\top (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^\top)^{-1} = \mathbf{B}^\top ((\mathbf{B}^\top)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = (\mathbf{B}^\top (\mathbf{B}^\top)^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ .

b)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top (\mathbf{A}^{-1})^\top &= \mathbf{A}^\top (\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top) (\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{A}^\top (\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top) (\mathbf{A}^\top)^{-1} \\ &= \mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top = (\mathbf{BA})^\top. \end{aligned}$$

5.5 a) Setze  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{M}$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{M} \\ \Leftrightarrow &(\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{A} = \mathbf{M}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1} \\ \Leftrightarrow &(\mathbf{A}^\top)(\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}^\top)^{-1} \\ \Leftrightarrow &(\mathbf{A}^\top)(\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{E} \\ \Leftrightarrow &(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^\top = \mathbf{E} \\ \Leftrightarrow &(\mathbf{E})^\top = \mathbf{E} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{E} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \Leftrightarrow &(\mathbf{AB})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \\ \Leftrightarrow &\mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{BB}^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \Leftrightarrow &\mathbf{E} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

5.6

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^{-1}$  existiert genau dann, wenn  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , also  $ad \neq bc$ .

5.7 Das Pivot-Verfahren führt im zweiten Schritt auf

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

also ist das LGS nicht lösbar.

5.8 Mit dem Pivot Verfahren ergibt sich nach zwei Schritten:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3a - b \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{b-2a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & c - 5a + 2b \end{array}$$

LGS lösbar, wenn  $c - 5a + 2b = 0$ , eine eindeutige Lösung existiert in keinem Fall. Die allgemeine Lösung lautet:  $x_1 = 3a - b - 2x_3$ ,  $x_2 = \frac{b-2a}{2} + \frac{5}{2}x_3$ ,  $x_3 = x_3$  mit  $x_3 \in \mathbb{R}$ .

5.9 a)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b)  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert nicht.

5.10  $\lambda_{1/2} = -2, \lambda_3 = 7$ .

5.11 Betrachte die beiden  $2 \times 2$ -Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist:

$$\det \mathbf{A} = a_1 a_4 - a_2 a_3, \quad \det \mathbf{B} = b_1 b_4 - b_2 b_3.$$

Damit:

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = a_1 a_4 b_1 b_4 - a_1 a_4 b_2 b_3 - a_2 a_3 b_1 b_4 + a_2 a_3 b_2 b_3.$$

Andererseits ist:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (a_1 b_1 + a_2 b_3)(a_3 b_2 + a_4 b_4) - (a_1 b_2 + a_2 b_4)(a_3 b_1 + a_4 b_3) \\ &= a_1 a_4 b_1 b_4 - a_1 a_4 b_2 b_3 - a_2 a_3 b_1 b_4 + a_2 a_3 b_2 b_3 \\ &= \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

5.12 Setze:  $x$  die Anzahl der Äpfel,  $y$  die Anzahl der Bananen,  $z$  die Anzahl der Ananas. Um festzustellen, ob die ME  $A = 16, B = 20, C = 18$  durch eine Mischung aus Obst erhalten werden kann, muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$2x + 3y + z = 16$$

$$2x + 2y + 4z = 20$$

$$2x + y + 3z = 18$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist:

$$x = 6,5, \quad y = 0,5, \quad z = 1,5.$$

5.13

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1150 & 650 & 420 & 1800 \\ 1080 & 580 & 400 & 1800 \\ 1050 & 710 & 420 & 1500 \end{pmatrix}.$$

$K_{ij}$ : Kosten bei der Lieferung der drei Produkte von Lieferant  $i$  an das Werk  $j$ .

5.14 Die Produktionseinheiten erfüllen das LGS:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Der Vektor  $\mathbf{b}$  beschreibt die auslieferbaren Mengen. Für  $\mathbf{b}$  ergibt sich:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}.$$

Mit den gegebenen Werten erhält man:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 210 \end{pmatrix}.$$

5.15 a) Die Leontief-Inverse  $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  muss existieren und deren Elemente müssen positiv oder Null sein. Für  $a < \frac{4}{5}$  sind diese Eigenschaften erfüllt.  
b) Für die vorgegebenen Werte erhält man:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 125 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

5.16 Das LGS lautet:

$$x_5 = 5$$

$$x_4 = 3x_5 + 6$$

$$x_3 = 2x_5$$

$$x_2 = 3x_3 + 3x_4 + 7x_5$$

$$x_1 = 2x_3 + x_5$$

mit der Lösung:

$$x_5 = 5; x_4 = 21; x_3 = 10; x_2 = 128; x_1 = 25.$$

5.17 Es existieren die Produkte  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{B}^\top$

## Kapitel 6

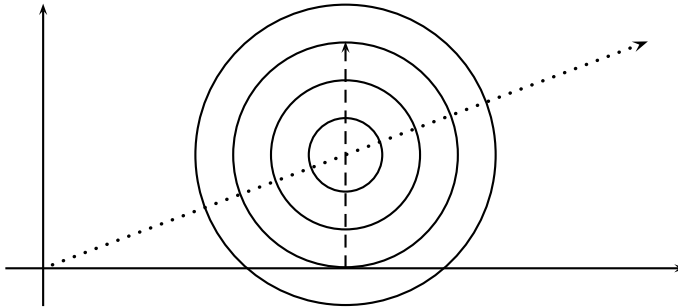
$$6.1 \text{ a) } \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + e^{x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 e^{x_2} + 2x_2 x_3, \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2^2, \text{ b) } \frac{\partial f}{\partial x_1} = \ln(x_2 x_3) - \frac{1}{x_1 + x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1 \cdot x_3}{x_2} - \frac{1}{x_1 + x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3}.$$

6.2

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} -2(x-1) \\ -2(y-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Das Höhenlinienbild konstruiert man aus der Forderung  $f(x, y) = c$ , oder  $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 16-c$  ( $c \leq 16$ ). Die Höhenlinien sind konzentrische Kreise um den Punkt  $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$  mit dem Radius  $\sqrt{16-c}$ .

$$\mathbf{grad} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{grad} f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



6.3 Die Outputfunktion ist:  $x(r_1, r_2, r_3) = 3r_1^2 \cdot \sqrt{r_2} + 5r_1 r_2 r_3^{1/3}$ . Das totale Differential ist:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial x}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial x}{\partial r_3} dr_3 \\ &= (6r_1 \sqrt{r_2} + 5r_2 r_3^{1/3}) dr_1 + \left( \frac{3}{2} \frac{r_1^2}{\sqrt{r_2}} + 5r_1 r_3^{1/3} \right) dr_2 + \left( \frac{5}{3} r_1 r_2 r_3^{-2/3} \right) dr_3. \end{aligned}$$

An der Stelle  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  ergibt sich:

$$dx \Big|_{(1,1,1)} = 11dr_1 + \frac{13}{2}dr_2 + \frac{5}{3}dr_3$$

Für die angegebene Veränderung ergibt sich der Wert:  $dx \approx 2,08$ .

6.4 a) Die Bedingung an die Produktionsfunktion lautet:

$$x(r_1, r_2) = 2\sqrt{r_1} \cdot \sqrt[3]{r_2} \stackrel{!}{=} 216.$$

Mit  $r_2 = 27$  ergibt sich der Wert  $r_1 = 1296$ .

b) Mit  $dx(r_1, r_2) = 0$  ergibt sich:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial r_1}}{\frac{\partial x}{\partial r_2}} = -\frac{3}{2} \frac{r_2}{r_1}.$$

oder  $dr_2 = -\frac{3}{2} \frac{r_2}{r_1} dr_1$ . Mit  $r_1 = 1296, r_2 = 27$  ergibt sich eine Erhöhung von 0,031 Einheiten des 2. Faktors, um die Reduktion des 1. Faktors um eine Einheit zu kompensieren.

6.5 Die Hesse-Matrix für Funktionen zweier Variablen,  $f(x, y)$ , lautet:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix,  $\lambda_{1/2}$  berechnen sich aus der Bedingung:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ c & b - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Dies liefert eine quadratische Gleichung in  $\lambda$  mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}}{2}.$$

Die Bedingung, dass beide Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben ( $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ) führt auf  $ab - c^2 > 0$  oder

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0.$$

Für  $a < 0$  und  $b < 0$  ist:

$$\lambda_1 = \frac{a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}}{2} < 0$$

mit  $ab - c^2 > 0$  gilt dann auch  $\lambda_2 < 0$ , wie oben gezeigt wurde.

Für  $a > 0$  und  $b > 0$  ist:

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}}{2} > 0$$

mit  $ab - c^2 > 0$  gilt dann auch  $\lambda_2 > 0$ , wie oben gezeigt wurde.

6.6

a) Die Hesse-Matrix lautet:

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_{1/2} = \frac{-16 \pm \sqrt{88}}{2} < 0.$$

Daher ist  $f(x, y)$  konkav von oben.

b)

$$\mathbf{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - 4x + 2y \\ 2 - 12y + 2x \end{pmatrix}$$

Damit:

$$|\mathbf{grad}f(0, 0)| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{20} > 0, 5$$

1. Iterationsschritt:

$$f(\mathbf{x}^{(0)} + \mu^{(0)} \cdot \mathbf{grad}f(\mathbf{x}^{(0)})) = f \begin{pmatrix} 4\mu^{(0)} \\ 2\mu^{(0)} \end{pmatrix} = 20\mu^{(0)} - 40(\mu^{(0)})^2$$

$f(\mu^{(0)})$  wird maximal für  $\mu^{(0)} = \frac{1}{4}$ .

Damit

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

und

$$|\mathbf{grad}f \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} > 0, 5$$

2. Iterationsschritt:

$$f(\mathbf{x}^{(1)} + \mu^{(1)} \cdot \mathbf{grad}f(\mathbf{x}^{(1)})) = f \begin{pmatrix} 1 + \mu^{(1)} \\ \frac{1}{2} - 2\mu^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{5}{2} + 5\mu^{(1)} - 30(\mu^{(1)})^2$$

$f(\mu^{(1)})$  wird maximal für  $\mu^{(1)} = \frac{1}{12}$ . Damit

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

und

$$|\mathbf{grad} f\left(\begin{pmatrix} \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right)| = 0,37 < 0,5$$

Damit bricht das Verfahren an dieser Stelle ab.

c) Die exakte Lösung berechnet sich aus:

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Explizit:

$$\begin{aligned} 4 - 4x + 2y &= 0 \\ 2 + 2x - 12y &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$x = \frac{13}{11}; y = \frac{4}{11}.$$

Dies ist zu vergleichen mit der Näherungslösung

$$x^{(2)} = \frac{13}{12}; y^{(2)} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}.$$

d) Substitution der Variablen. Setze dazu  $y = x + 3$  in  $f(x, y)$  ein. Diese Ersetzung führt auf:

$$f(x) = -6x^2 - 24x - 48.$$

Das Maximum dieser Funktion ist bei  $x_M = -2$ , Resubstitution liefert  $y_M = 1$ .

Die Lagrange-Funktion lautet:

$$\mathcal{L} = 4x - 2x^2 + 2y - 6y^2 + 2xy - \lambda(x + 3 - y)$$

Die drei Bedingungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

liefern ein LGS für die drei Variablen  $x, y, \lambda$  mit der Lösung

$$x = -2, y = 1, \lambda = 14.$$

6.7  $f(x, y) = x^{-2}e^{-y} + x^2y^3 = 0$ , dann ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{-2x^{-3}e^{-y} + 2xy^3}{-x^{-2}e^{-y} + 3x^2y^2}.$$

6.8 Der Abstand  $d$  eines beliebigen Punktes  $P = (x, y)$  vom Ursprung der  $x - y$ -Ebene ist:  $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Nebenbedingung:

$$g(x, y) = x^2 - 3x + 3 - y$$

Lagrange Funktion:

$$\mathcal{L} = \sqrt{x^2 + y^2} - \lambda(x^2 - 3x + 3 - y).$$

Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremas ist:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} = 0, \quad z_i = x, y, \lambda$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lambda(2x - 3) \text{ oder } \lambda = \frac{x}{(2x - 3)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{(2x - 3)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \text{ oder } y = -\frac{x}{2x - 3}.$$

Einsetzen in die dritte Gleichung liefert:

$$x^2 - 3x + 3 + \frac{x}{2x - 3} = 0 \text{ oder } 2x^3 - 9x^2 + 16x - 9 = 0.$$

Diese Gleichung hat die einzige reelle Lösung  $x = 1$ . Damit:  $P = (1, 1)$  ist derjenige Punkt der Parabel  $y = x^2 - 3x + 3$ , der den geringsten Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems hat.

6.9 1. Die Auflösung der Nebenbedingung

$$g(x, y) = -\frac{3}{2}x + 3y + 6 = 0.$$

nach  $y(x)$  liefert

$$y = -2 + \frac{x}{2}.$$

Einsetzen in die Funktion  $f(x, y)$  führt auf die Elimination der Variablen  $y$ , wir erhalten eine Funktion  $f(x)$  mit



$$\overline{f(x)} = x^2 + 2x\left(2 + \frac{x}{2}\right) = 2x^2 - 4x.$$

Differentiation nach  $x$  ergibt:

$$\frac{d\overline{f(x)}}{dx} = 4x - 4 \stackrel{!}{=} 0 \implies x = 1.$$

Da

$$\frac{d^2\overline{f(x)}}{dx^2} = 4 > 0$$

handelt es sich dabei um ein Minimum. Also, der Punkt  $x = 1$  ist ein Minimum der Funktion  $\overline{f(x)}$ , da

$$y = -2 + \frac{x}{2} \Big|_{x=1} = -\frac{3}{2}$$

erhalten wir, dass die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 2xy$$

im Punkt  $P = (1, -3/2)$  ein Minimum hat.

2. Die Lagrange Funktion lautet:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) = x^2 + 2xy + \lambda \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 3y + 6\right).$$

Die notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremums ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Wir erhalten die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2x + 2y - \frac{3}{2}\lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2x + 3\lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -\frac{3}{2}x + 3y + 6. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist

$$x = 1, y = -3/2, \lambda = -2/3.$$

6.10 Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \lambda) = ar_1^\alpha r_2^\beta + \lambda(b - k_1 r_1 + k_2 r_2).$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} = \alpha \cdot a \cdot r_1^{\alpha-1} r_2^\beta - \lambda \cdot k_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = \beta \cdot a \cdot r_1^\alpha r_2^{\beta-1} - \lambda \cdot k_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = b - k_1 r_1 + k_2 r_2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir durch Auflösen nach  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{a \cdot \alpha}{k_1} \cdot r_1^{\alpha-1} \cdot r_2^\beta,$$

aus der zweiten Bedingung:

$$\lambda = \frac{a \cdot \beta}{k_2} \cdot r_1^\alpha \cdot r_2^{\beta-1}.$$

Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen eliminiert den Lagrange Multiplikator  $\lambda$ , wir erhalten:

$$\frac{a \cdot \alpha}{k_1} \cdot r_1^{\alpha-1} \cdot r_2^\beta = \frac{a \cdot \beta}{k_2} \cdot r_1^\alpha \cdot r_2^{\beta-1}$$

oder

$$r_2 = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot r_1.$$

Einsetzen dieser Beziehung in die dritte Bedingung ergibt:

$$b - k_1 \cdot r_1 - k_2 \cdot r_2 = 0$$

oder

$$b - k_1 \cdot r_1 - \frac{\beta}{\alpha} k_2 \cdot r_1 = 0.$$

Auflösen nach  $r_1$  ergibt:

$$r_1 = \frac{\alpha \cdot b}{k_1(\alpha + \beta)}.$$

Einsetzen in die obige Beziehung zwischen  $r_1$  und  $r_2$  liefert:

$$r_2 = \frac{\beta \cdot b}{k_2(\alpha + \beta)}.$$

6.11a) Das Volumen eines Zylinders ist:

$$V(r, h) = r^2 \pi \cdot h.$$

Die Oberfläche des Zylinders ist:

$$O = 2 \cdot r^2 \pi + 2\pi \cdot r \cdot h.$$

Zu maximieren ist das Volumen unter der Nebenbedingung, dass die Oberfläche  $2\text{m}^2$  beträgt. Daher

$$O = 2 \cdot r^2 \pi + 2\pi \cdot r \cdot h \stackrel{!}{=} 2$$

Diese Nebenbedingung lösen wir nach  $h(r)$  auf und erhalten:

$$h(r) = \frac{1 - r^2 \pi}{\pi \cdot r}.$$

Damit:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h(r) = r - r^3 \cdot \pi.$$

Die Bedingung dafür, dass das Volumen maximal wird ist

$$\frac{dV(r)}{dr} = 0 \iff 1 - 3r^2 \pi = 0 \implies r_m = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}.$$

Die negative Lösung ist nicht sinnvoll und es bleibt damit die eindeutige Lösung  $r_m$ .

b) Damit ist

$$V(r_m) = r_m - r_m^3 \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3\pi}}.$$

Die Höhe des Zylinders mit maximalem Inhalt ist dann

$$h(r_m) = \frac{1 - r_m^2 \cdot \pi}{\pi \cdot r_m} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

c) In diesem Fall muß die Oberfläche minimiert werden unter der Nebenbedingung, dass das Volumen konstant ist, respektive den Wert  $1 \text{ m}^3$  hat.

$$V = 1 \text{ m}^3 \implies r^2 \cdot \pi \cdot h = 1,$$

also

$$h(r) = \frac{1}{r^2 \pi}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für die Oberfläche des Zylinders ein, erhält man:

$$O(r) = 2r^2 \cdot \pi + \frac{2}{r}.$$

Dies wird minimal, wenn

$$O'(r) = 4\pi \cdot r - \frac{2}{r^2} \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Lösung ist

$$r_{min} = \frac{1}{(2\pi)^{1/3}}.$$

Dann ist

$$h(r_{min}) = \frac{(2\pi)^{2/3}}{\pi},$$

und

$$O(r_{min}) = 3 \cdot (2\pi)^{1/3}$$

d) Der Körper mit dem 'günstigeren' Verhältnis ist die Kugel. Es gilt

$$V_k = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

und

$$O_k = 4\pi \cdot r^2$$

Eine Kugel mit Volumen von 1 m<sup>3</sup> hat den Radius:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1 \quad \implies \quad r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \approx 0.62 \text{ m.}$$

Die Oberfläche der Kugel mit diesem Radius ist:

$$O_k = 4\pi \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \approx 4,83 \text{ m}^2.$$

Die Oberfläche des Zylinders mit dem Volumen von einem Kubikmeter ist

$$O_z = 3 \cdot (2\pi)^{1/3} \approx 5,536 \text{ m}^2,$$

*i.e.* die Kugel benötigt nur 87.25% des Blechs wie der Zylinder.

## Kapitel 7

7.1  $K_{163} = 5067,92\text{€}.$

7.2  $p = 17,59 \text{ \%}.$

7.3  $K_0 = 9737,10 \text{ €}.$

7.4  $n = 0.625$  oder 225 Tage.

7.5 Zinsfuß: 5%, Zinsfaktor:  $q = 1.05$ , Aufzinsungsfaktor für 10 Jahre:  
 $1.05^{10} = 1.629$ , Endkapital nach 10 Jahren:  $K_{10} = 13031 \text{ €}.$

7.6  $K_3 = 2282,33\text{€}, K_7 = 2747,86\text{€}.$

7.7  $n = 53,6$  Jahre

7.8 a)  $A = 16.759,56 \text{ €}$ , b)  $T_{19} = 15.375,74 \text{ €}$ , c)  $K_5 = 130.492,48 \text{ €}$ ,  
d)  $T_8 = 5.958,60 \text{ €}$ , e) Für  $A = 14.000 \text{ € p.a.}$ :  $n = 38,66$  Jahre, für  
 $A = 13.600 \text{ € p.a.}$ :  $n = 57,34$  Jahre, für  $A = 13.000 \text{ € p.a.}$  keine Lösung.

7.9 42,06 Jahre, 30,73 Jahre.

7.10  $i = 5,128\%$ .

7.11 a) Gesamtbetrag = 420.165,34 €, b) Gesamtbetrag = 386.958,82 €  
Tilgungsplan ohne Sondertilgung:

- $K_0 = 250.000 \text{ €}$
- $i = 0,04$
- $q = 1,04$
- $A = 15.000 \text{ €}$
- $n = 28,01$

Periode	Zins	Tilgung	Kosten	Restschuld
0	0,00	0,00	0,00	250.000,00
1	10.000,00	5.000,00	15.000,00	245.000,00
2	9.800,00	5.200,00	30.000,00	239.800,00
3	9.592,00	5.408,00	45.000,00	234.392,00
4	9.375,68	5.624,32	60.000,00	228.767,68
5	9.150,71	5.849,29	75.000,00	222.918,39
6	8.916,74	6.083,26	90.000,00	216.835,12
7	8.673,40	6.326,60	105.000,00	210.508,53
8	8.420,34	6.579,66	120.000,00	203.928,87
9	8.157,15	6.842,85	135.000,00	197.086,02
10	7.883,44	7.116,56	150.000,00	189.969,46
11	7.598,78	7.401,22	165.000,00	182.568,24
12	7.302,73	7.697,27	180.000,00	174.870,97
13	6.994,84	8.005,16	195.000,00	166.865,81
14	6.674,63	8.325,37	210.000,00	158.540,44
15	6.341,62	8.658,38	225.000,00	149.882,06
16	5.995,28	9.004,72	240.000,00	140.877,34
17	5.635,09	9.364,91	255.000,00	131.512,44
18	5.260,50	9.739,50	270.000,00	121.772,94
19	4.870,92	10.129,08	285.000,00	111.643,85
20	4.465,75	10.534,25	300.000,00	101.109,61
21	4.044,38	10.955,62	315.000,00	90.153,99
22	3.606,16	11.393,84	330.000,00	78.760,15
23	3.150,41	11.849,59	345.000,00	66.910,56
24	2.676,42	12.323,58	360.000,00	54.586,98
25	2.183,48	12.816,52	375.000,00	41.770,46
26	1.670,82	13.329,18	390.000,00	28.441,28
27	1.137,65	13.862,35	405.000,00	14.578,93
28	583,16	14.416,84	420.000,00	162,09

Tilgungsplan mit Sonderzahlung:

- $K_0 = 250.000 \text{ €}$
- $i = 0,04$
- $q = 1,04$
- $A = 15.000 \text{ €}$
- $n = 24,13$

Periode	Zins	Tilgung	Kosten	Restschuld
0	0,00	0,00	0,00	250.000,00
1	10.000,00	5.000,00	15.000,00	245.000,00
2	9.800,00	5.200,00	30.000,00	239.800,00
3	9.592,00	5.408,00	45.000,00	234.392,00
4	9.375,68	5.624,32	60.000,00	228.767,68
5	9.150,71	5.849,29	<b>100.000,00</b>	<b>197.918,39</b>
6	7.916,74	7.083,26	115.000,00	190.835,12
7	7.633,40	7.366,60	130.000,00	183.468,53
8	7.338,74	7.661,26	145.000,00	175.807,27
9	7.032,29	7.767,71	160.000,00	167.839,56
10	6.713,58	8.286,42	175.000,00	159.553,14
11	6.382,13	8.617,87	190.000,00	150.935,27
12	6.037,41	8.962,59	205.000,00	141.972,68
13	5.678,91	9.321,09	220.000,00	132.651,59
14	5.306,06	9.693,94	235.000,00	122.957,65
15	4.918,31	10.081,69	250.000,00	112.875,95
16	4.515,04	10.484,96	265.000,00	102.390,99
17	4.095,64	10.904,36	280.000,00	91.486,63
18	3.659,47	11.340,53	295.000,00	80.146,10
19	3.205,84	11.794,16	310.000,00	68.351,94
20	2.734,08	12.265,92	325.000,00	56.086,02
21	2.243,44	12.756,56	340.000,00	43.329,46
22	1.733,18	13.266,82	355.000,00	30.062,64
23	1.202,51	13.797,49	370.000,00	16.265,14
24	650,61	14.349,39	385.000,00	1.915,75

7.12  $t = 1\%$ ,  $n = 41,03$  Jahre,  $t = 2,5\%$ ,  $n = 24,36$  Jahre.

7.13 Der Zinssatz für das Darlehen darf höchstens  $7,93\%$  sein, damit die Darlehenssumme von  $10\,000\text{ €}$  bei einer Annuität von  $2\,000\text{ €}$  im Jahr innerhalb von fünf Jahren zurückgezahlt werden kann.

# Literaturverzeichnis

- Alten H.-W., Djafari Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H. Wußing, H. (2003): 4000 Jahre Algebra, Geschichte Kulturen Menschen, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Anderson, I. (2001): A First Course in Discrete Mathematics, SUMS, Springer, London.
- Apostol, T. (1971): Mathematical Analysis, A Modern Approach to Advanced Calculus, Addison Wesley, Reading Massachusetts.
- Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, Ch., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. (2012): Mathematik, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Bardi, J.S. (2006): The Calculus Wars, Newton, Leibniz and the greatest mathematical clash of all time, Thunder's Mouth Press, New York.
- Basieux, P. (2000): Die Architektur der Mathematik, Denken in Strukturen, Rowohlt, Hamburg.
- Bosch, K. (2010): Brückenkurs Mathematik, Eine Einführung mit Beispielen und Übungsaufgaben, 14. Auflage, Oldenbourg, München.
- Bronstein, I.N. et al. (2005): Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch.
- Bröcker, T. (1980): Analysis in mehreren Variablen, B.G. Teubner, Stuttgart.
- Courant, R. (1971a): Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, I. Funktionen einer Veränderlichen. Vierte Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Courant, R. (1971b): Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, II. Funktionen mehrerer Veränderlichen. Vierte Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Courant, R., Robbins, H. (2000): Was ist Mathematik?, Fünfte, unveränderte Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Dean, N. (2003): Diskrete Mathematik, Pearson Education, München.
- Deiser, O. (2004): Einführung in die Mengenlehre, 2., verbesserte und erweiterte Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Dieudonné, J. (1985): Geschichte der Mathematik 1700 – 1900, Vieweg, Braunschweig.
- Derbyshire, J. (2006): Unknown Quantity, A Real and Imaginary History of Algebra, Penguin Books, New York.



- Domschke, W., Drexl, A. (2011): Einführung in Operations Research, 8. Auflage, Springer, Berlin.
- Dunham, W. (1990): Journey through Genius, The Great Theorems of Mathematics. Penguin Books, New York.
- Erwe, F. (1962): Differential- und Integralrechnung I, II. Bibliographisches Institut, Mannheim.
- Fischer, G. (2010): Lineare Algebra, 17. akt. Auflage, Vieweg + Teubner, Braunschweig.
- Fuchs, D., Tabachnikov, S. (2011): Ein Schaubild der Mathematik, Springer Verlag, Berlin.
- Führer, C. (2006): Kompakt-Training Wirtschaftsmathematik, Kiehl, Ludwigshafen.
- Garnier, R.; Taylor, J. (2002): Discrete Mathematics for New Technology, Bristol, Philadelphia.
- Goebbels, S., Ritter, S. (2011): Mathematik verstehen und anwenden, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. (1994), Concrete Mathematics, Second Edition, Addison-Wesley, Boston.
- Gregg, J. R. (1998): Ones and Zeros, Understanding Boolean Algebra, Digital Circuits and the Logic of Sets, IEEE Press, New York.
- Hall, R. (2002): Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz, Cambridge University Press.
- Hilgert I., Hilgert J. (2012): Mathematik — ein Reiseführer, Springer Spektrum, Heidelberg.
- Katz, V. J. (2009): A History of Mathematics, An Introduction, 3rd Edition, Addison-Wesley, Boston.
- Kelly, J. (2003): Logik im Klartext, Pearson Studium, München.
- Koop, A., Moock, H. (2008): Lineare Optimierung, Eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Koshy, T. (2004): Discrete Mathematics with Applications, Elsevier, Amsterdam.
- Kreuzer, M.; Kühling, S. (2006): Logik für Informatiker, Pearson Studium, München.
- Lang, S. (1986): A First Course in Calculus, Fifth Edition, Springer Verlag, New York.
- Lang, S. (1987): Linear Algebra, Third Edition, UTM, Springer Verlag, New York.
- Lang, S. (1988): Basic Mathematics, Springer Verlag, New York.

- Maor, E. (1991): *To Infinity and Beyond*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Maor, E. (1994): *e: The Story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Maor, E. (2010): *The Pythagorean Theorem, A 4000-Year History*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Maor, E. (2013): *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Marsden, J., Weinstein, A (1985) *Calculus I, Second Edition*, Springer, New York.
- Marsden, J., Weinstein, A (1985) *Calculus II, Second Edition*, Springer, New York.
- Marsden, J., Weinstein, A (1985) *Calculus III, Second Edition*, Springer, New York.
- Pesic, P. (2005): *Abels Beweis*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Purkert, W. (2014): *Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 8. aktualisierte Auflage, Springer-Gabler.
- Rommelfanger H. (2010): *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Band 1 und 2, 6. bzw. 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Schäfer, W., Georgi, K., Trippler, G. (2002): *Mathematik-Vorkurs, Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger*, 5. Auflage, Teubner, Stuttgart.
- Spivak, M. (2008): *Calculus*, Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- Staab, F. (2007): *Logik und Algebra*, Oldenbourg.
- Stillwell, J. (2002): *Mathematics and its History*, Second Edition, Springer Verlag, New York.
- Stöppler, S. (1982): *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 3. Auflage, Gabler.
- Tietze, J. (2006a): *Einführung in die Finanzmathematik*, 8. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Braunschweig.
- Tietze, J. (2006b): *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik* 13. Auflage Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden.
- Toenniessen, F. (2010): *Das Geheimnis der transzendenten Zahlen*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Winter, R. (2001): *Grundlagen der formalen Logik*, 2. überarbeitete Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt.

# Index

- N, 4
- Q, 5
- $\mathbb{R}$ , 5
- $\mathbb{R}^+$ , 5
- $\mathbb{R}^n$ , 7
- $\mathbb{Z}$ , 4
- $e$ -Funktion, 31, 227
  
- Ableitung
  - einer Funktion, 79–83
  - elementarer Funktionen, 83–87
  - partielle, 196
- Ableitungsfunktion, 82
- Ableitungsregeln, 87–91
  - Kettenregel, 89
  - Linearität, 87
  - Produktregel, 88
  - Quotientenregel, 88
- Abszisse, 24
- Achsensymmetrie, 47
- Algebraische Struktur, 9
- Angebotsfunktion, 53
- Annuität, 228
- Asymptotik, 59, 108
- Aufzinsungsfaktor, 223
- Aussage, 1
  - allgemeingültige, 2
  - Negation, 2
  - unlösbare, 2
- Aussageform, 1
- Aussagenlogik, 1–3
  - Äquivalenz, 3
  - Implikation, 3
  - ODER-Verknüpfung, 2
  - UND-Verknüpfung, 2
- Axiom, 9
  
- Barwert, 219
- Bedingung
  - hinreichende, 3
  - notwendige, 3
  
- Beschränktheit, 46
- Bestimmtes Integral, 124, 127
- Betrag, 18
- Betragsfunktion, 92
- Bijektivität, 50
- Bildmenge, 23
- Binomialkoeffizient, 13, 20
- Binomische Formeln, 13
  
- Cantor, Georg, 4
- Cauchy, Augustin, 58
- Cauchy-Kriterium, 59
- Charakteristische Gleichung, 185
- Cobb–Douglas Produktionsfunktion, 195, 214
- Cosinusfunktion, 34
  
- Definitionsbereich, 23
  - maximal zulässiger, 24
- Determinante, 179, 184
- Diagonalelemente, 152
- Differential, 199
  - totales, 199–201
- Differentialquotient, 83
- Differenzenquotient, 81, 83
- Differenzmenge, 8
- Disjunkte Mengen, 7
- Disjunktion, 2
- Distributivgesetz, 156
  
- Effektivzins, 226
- Eigenvektor, 184
- Eigenwert, 184
  - Definition, 184
- Eigenwertgleichung, 184
- Eindeutigkeit, 191
- Einfache Verzinsung, 219
- Einheitsmatrix, 154, 161
- Einheitsvektor, 145
- Elastizität, 114
  - Definition, 115

- Endogener Input, 182
- Endverbrauch, 182
- Endwert, 219
- Entscheidungsvariable, 51
- Entwicklungssatz von Laplace, 180
- Erlösfunktion, 53, 110, 114
- Ertragsfunktion, 53
- Eulersche Zahl, 13, 62
- Exponentialfunktion, 31, 62
  - Ableitung, 85
  - Basis, 31
- Extremwerte
  - globale, 97
  - lokale, 96, 203
- Extremwerte mit Nebenbedingungen
  - Eliminationsverfahren, 210
  - Lagrange Multiplikatorverfahren, 210–216
- Faktorzerlegung, 102
- Finanzierung, 222
- Fixkosten, 56, 138
- Funktion, 191
  - Beschränktheit, 46
  - Definition, 22
  - ganze rationale, 27, 63
  - gebrochen rationale, 64, 108
  - gerade, 47
  - implizite, 200
  - konstante, 25
  - lineare, 24
  - Monotonie, 46–47
  - quadratische, 26
  - Symmetrie, 47–49
  - ungerade, 48
- Funktionen mit mehreren Variablen
  - Extrema, 203
  - lokale Maxima, 204
  - lokale Minima, 205
  - Sattelpunkte, 207
  - stationäre Punkte, 207
- Gaußsche Normalverteilung, 69, 112
- Geometrische Reihe, 224
- Geradengleichung
  - Punkt–Steigungsform, 26
  - Zwei–Punkte–Form, 26
- Gesamtproduktion, 182
- Gewinn
  - maximal erzielbarer, 114
- Gewinnfunktion, 113
- Gewinnzone, 114
- Gläubiger, 228
- Gleichung
  - lineare, 15
  - quadratische, 15
- Gleichungssystem
  - Diagonalforn, 169
  - Linearität, 164
- Goldener Schnitt, 242
- Gradient einer Funktion, 197
- Gradientenverfahren, 203
  - Algorithmus, 204
- Grenzlös, 114
- Grenzfunktion, 113, 138
- Grenzkosten, 113
- Grenzkostenfunktion, 138
- Grenzproduktivität, 114
- Grenzwert
  - Definition, 58
  - linksseiter, 57
  - rechtsseitiger, 57
- Grenzwert einer Funktion, 56
- Höhenlinie, 193
- Höhere Ableitungen, 95
- Hesse–Matrix, 198, 209
- Hyperbelfunktion, 29
  - Ableitung, 84
- Idempotenz, 153
- Implikation, 3
- Injektivität, 50
- Innerbetriebliche Leistungsverrechnung, 182
- Integral
  - bestimmtes, 124, 127
  - unbestimmtes, 122
- Integral, uneigentliches, 134
- Integration
  - durch Substitution, 137
  - partielle, 136
- Integrierbar, 128
- Intervall
  - geschlossenes, 5
  - offenes, 5

- Inverse Matrix
  - Rechenregeln, 163
- Inverses
  - additives, 10
  - multiplikatives, 10
- Investitionsrechnung, 222, 228
- Isoquante, 195, 201
  
- Jahreszins
  - effektiver, 226
  - nomineller, 226
- Junktor, 2
  
- Körper, 9
  - Abgeschlossenheit, 10
  - Assoziativgesetz, 10
  - Distributivgesetz, 10
  - inverses Element, 10
  - Kommutativgesetz, 10
  - neutrale Elemente, 10
- Kettenregel, 89, 137
- Kommutativität, 45
- Komplementmenge, 8
- Konjunktion, 2
- Konsumentenrente, 139
- Konvexität, 199, 207
- Koordinatensystem, 145
- Koordinatentransformationen, 49
- Kosten
  - primäre, 182
  - sekundäre, 182
  - variable, 56
- Kostenfunktion, 56
- Krümmung
  - negative, 97
  - positive, 97
- Kreditgeber, 228
- Kreditnehmer, 228
- Kronecker Symbol, 154
- Kurvendiskussion, 108
  
- L'Hospital, Regel von de, 99
- Lösungsmenge, 14
- Lösungsverfahren für LGS
  - Gaußsches Eliminationsverfahren, 167
  - Pivot-Verfahren, 169
- Lagrange, Joseph Louis, 83, 213
- Lagrange-Funktion, 213
- Lagrange-Multiplikator, 213
- Laufzeit, 233
- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 83
- Leontief, Wassily, 182
- Leontief-Inverse, 182
- Lieferantenkredit, 220
- Lineare Verzinsung, 219
- Lineares Gleichungssystem, 164, 203
- Linearität der Ableitung, 87
- Linkskurve, 97
- Logarithmus, 11
  - Basis, 12
  - dekadischer, 12
  - natürlicher, 12
  - Umrechnung der Basen, 12
- Logarithmusfunktion, 62
  - Ableitung, 86, 91
  - Basis, 33
  - dekadische, 34
  - natürliche, 33
  - Nullstelle, 34
- Logistische Funktion, 68
- Lokale Extrema, 96
  
- Marktgleichgewicht, 141
- Matrix
  - Addition, Assoziativgesetz, 156
  - Addition, Kommutativgesetz, 156
  - antisymmetrische, 153
  - Definition, 152
  - inverse, 163
  - quadratische, 152, 163
  - Summe, 155
  - symmetrische, 153, 199
  - transponierte, 153
- Matrixelement, 152
- Matrixmultiplikation
  - Nicht-Kommutativität, 162
- Matrizenmultiplikation, 157
  - Assoziativität, 160
  - Distributivgesetz, 161
  - und Transposition, 162
- Maximum
  - globales, 97
  - lokales, 96, 208
  - relatives, 209
- Menge

- Darstellung, 4
- Definition, 4
- der ganzen Zahlen, 4
- der natürlichen Zahlen, 4
- der rationalen Zahlen, 5
- der reellen Zahlen, 5
- Differenz, 8
- Durchschnitt, 7
- Element einer, 4
- Komplement, 8
- leere, 4
- Vereinigung, 7
- Mengenlehre, 4–8
- Mindestpreis, 114
- Minimalkostenkombination, 214
- Minimum
  - globales, 97
  - lokales, 96, 208
  - relatives, 209
- Monotonie, 47
  
- Näherungsverfahren
  - iteratives, 103, 204
- Nachfragefunktion, 51, 139
- Newton, Isaac, 83
- Newton–Verfahren, 101–108, 204
  - Abbruchkriterium, 108
  - Algorithmus, 103
- Nomineller Jahreszins, 226
- Nullmatrix, 154, 161
- Nullstelle, Definition, 101
- Nullstellenbestimmung, 101
- Nullvektor, 150
  
- Obere Schranke, 46
- Ordinate, 24
- Ortsvektor, 145
  
- Parabel, 26
- Parabel  $n$ -ter Ordnung, 27
- Partielles Differential, 199
- Pascalsches Dreieck, 13
- Perioden der Finanzmathematik, 220
- Pivot–Element, 170
- Pivot–Spalte, 170
- Pivot–Spaltenkoeffizient, 170
- Pivot–Zeile, 170
- Polstelle, 59, 67
  
- Polynom  $n$ -ten Grades, 27
- Polynomdivision, 28, 66
- Potenz, 11
- Potenzfunktion, 27
  - Ableitung, 86
- Preis–Absatzfunktion, 51
- Produkt, kartesisches, 6
- Produktion, mehrstufige, 158
- Produktionsfaktor
  - substituierbarer, 201
- Produktionsfunktion, 53, 114, 193, 195, 200
  - ertragsgesetzliche, 54, 97
  - limitationale, 54
  - neoklassische, 54
- Produktionskoeffizient, 182
- Produktionsverflechtung, 180
- Produktregel, 88
- Produzentenrente, 140
- Proportional, 25
- Prozentsatz, 220
- Punktsymmetrie, 47
  
- Quadratische Matrix, 152
- Quotientenregel, 88
  
- Randbedingung, 210
- Rechtskurve, 97
- Rekursiv, 231
- Rentenformel, 224
- Restschuld, 228
- Riemann, Bernhard, 128
  
- Sättigungswert, 68
- Sattelpunkt, 208
- Satz von Pythagoras, 146
- Schuldner, 228
- Schuldtyp, 228
- Sinusfunktion, 34
  - Amplitude, 36
  - Kreisfrequenz, 36
  - Phasenverschiebung, 36
- Skalar, 146
- Skalarprodukt von Vektoren, 150
- Snob–Effekt, 52
- Spaltenvektor, 147
- Stückkosten, 56, 114
- Stammfunktion, 121, 127

- Stationäre Punkte, 207
- Steigungsdreieck, 25
- Stetige Verzinsung, 227
- Stetigkeit, 69, 93
  - Definition, 71
- Surjektivität, 50
- Symmetrische Matrix, 153
  
- Tautologie, 2
- Technologiematrix, 182
- Teilmenge, 5, 14
- Tilgungsarten, 228
- Tilgungsplan, 231
- Tilgungsrechnung, 228
  - Annuität, 228
  - Tilgungsanteil, 228
  - Zinsanteil, 228
- Tilgungssatz, prozentualer, 233
- Transponierte Matrix, 153
- Transposition, 153, 156
- Trigonometrische Funktionen, 34
  
- Umformung
  - äquivalente, 14
- Umkehrfunktion, 33, 41, 47
  - Definition, 41
- Unbestimmtes Integral, 122
- Ungleichung, 16
- Untere Schranke, 46
- Urbildmenge, 23
  
- Variable Kosten, 138
- Vektor, 145–151, 154
  - Addition, 149
  - Betrag, 146
  - Definition, 147
  - Lineare Unabhängigkeit, 149
  - Linearkombination, 149
    - orthogonal, 151
  - Richtung, 146
    - skalare Multiplikation, 148
  - Skalarprodukt, 150
- Venn, John, 4
- Venn-Diagramm, 4, 23
- Venn-Diagramm, 23
- Verkettung von Funktionen, 44
- Versicherungswesen, 222
- Verzinsung
  - unterjährige, 225
  
- Wachstum, exponentielles, 223
- Wachstumsfunktionen, 68
- Wahrheitstafel
  - Disjunktion, 2
  - Konjunktion, 2
  - Negation, 2
- Wendepunkt, 97
- Wertebereich, 23
- Wurzelfunktion, 30
  
- Zeilenvektor, 147
- Zielmenge, 23
- Zins
  - nachschüssiger, 230
  - relativer unterjähriger, 226
- Zinsbetrag, 219
- Zinseszinsformel, 223
- Zinseszinsrechnung, 222
- Zinsfaktor, 222
- Zinsfuß, 219
- Zinsperiode, 219, 223
- Zinsrechnung, 219
- Zinssatz, 220