

# Anhang A

## Mathematische Grundlagen

Im Anhang werden die benötigten Grundlagen der Matrizenrechnung sowie der Algebra der Quaternionen zusammengefasst.

### A.1 Matrizen

Die kinematischen und kinetischen Gleichungen der Mehrkörperdynamik können mit Hilfe der Matrizenrechnung in kompakter Form dargestellt werden. Die benötigten Grundlagen der Matrizenrechnung und die verwendeten Schreibweisen werden in diesem Abschnitt beschrieben. Ausführliche Darstellungen der Matrizenrechnung geben z. B. ZURMÜHL und FALK [117] sowie die VDI-Richtlinie 2739 [106].

**Allgemeine Matrix** Die rechteckige  $(m,n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  wird durch das Schema ihrer Elemente  $a_{ik}$  gebildet:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Eine  $(m,n)$ -Matrix, deren Elemente sämtlich null sind, heißt Nullmatrix  $\mathbf{0}$ .

**Quadratische Matrix, Diagonalmatrix, Einheitsmatrix** Ist die Zeilenanzahl  $m$  gleich der Spaltenanzahl  $n$ , so wird die  $(n,n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  als  $n$ -reihige quadratische Matrix bezeichnet.

Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen, den Wert 0 haben und mindestens ein Hauptdiagonalelement ungleich null ist:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}). \quad (\text{A.2})$$

Eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle gleich 1 sind, heißt Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Eine  $n$ -reihige Einheitsmatrix wird auch durch  $\mathbf{E}_n$  gekennzeichnet.

**Determinante einer Matrix, reguläre und singuläre Matrix** Jeder quadratischen  $(n,n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  lässt sich eindeutig eine Determinante  $n$ -ter Ordnung zuordnen:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Eine Determinante wird durch Entwicklung nach einer beliebigen Zeile oder Spalte berechnet. Beispielsweise lautet die Entwicklung einer Determinante 3. Ordnung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ \det \mathbf{A} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \\ \det \mathbf{A} &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) \\ &\quad + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Eine quadratische Matrix, deren Determinante von 0 verschieden ist, heißt reguläre Matrix; andernfalls wird sie singulär genannt.

**Rang einer Matrix** Eine Matrix  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  hat den Rang  $r = r(\mathbf{A})$  genau dann, wenn  $\mathbf{A}$  eine reguläre  $r$ -reihige Untermatrix besitzt und alle höherreihigen Untermatrizen von  $\mathbf{A}$  singulär sind. Ist  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , so ist  $r(\mathbf{A}) = 0$ .

Eine  $n$ -reihige Matrix  $\mathbf{A}$  ist regulär, wenn sie den Rang  $r(\mathbf{A}) = n$  besitzt und singulär, wenn ihr Rang  $r(\mathbf{A}) < n$  ist.

**Transponierte einer Matrix** Aus der  $(m,n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  entsteht durch Vertauschen von Spalten und Zeilen die transponierte  $(n,m)$ -Matrix  $\mathbf{A}^T$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

**Summe zweier Matrizen** Zwei  $(m,n)$ -Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  werden elementweise addiert,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

mit

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.8})$$

**Produkt zweier Matrizen** Die Multiplikation einer  $(m,p)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und einer  $(p,n)$ -Matrix  $\mathbf{B}$  ergibt eine  $(m,n)$ -Matrix  $\mathbf{C}$ ,

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Zur Berechnung der Elemente  $c_{ik}$  werden alle positionsgleichen Elemente der  $i$ -ten Zeile von  $\mathbf{A}$  mit denen der  $k$ -ten Spalte von  $\mathbf{B}$  multipliziert und anschließend sämtliche Produkte addiert,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk}, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.10})$$

Es gelten die Beziehungen

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{A}, \quad (\text{A.13})$$

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ quadratisch}) \quad (\text{A.14})$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (\text{A.15})$$

Im Allgemeinen ist  $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$ .

**Inverse einer Matrix** Zu jeder regulären  $(n,n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  existiert genau eine inverse Matrix (Kehrmatrix)  $\mathbf{A}^{-1}$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}. \quad (\text{A.16})$$

Es gelten die Beziehungen

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \quad (\text{A.17})$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T, \quad (\text{A.18})$$

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}. \quad (\text{A.19})$$

**Orthogonale Matrix** Eine reguläre Matrix  $\mathbf{A}$  heißt orthogonal, wenn ihre Transponierte mit ihrer Inversen übereinstimmt:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{A.20})$$

Damit besteht die Beziehung  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$ , aus der  $\det \mathbf{A} = \pm 1$  folgt. Für  $\det \mathbf{A} = +1$  heißt die Matrix  $\mathbf{A}$  eigentlich orthogonal.

Bei jeder orthogonalen Matrix bilden die Zeilen- und Spaltenvektoren je ein System orthogonaler Einheitsvektoren. Die Inverse und Transponierte einer orthogonalen Matrix sind ebenfalls orthogonal. Die Produkte  $\mathbf{A} \mathbf{B}$  und  $\mathbf{B} \mathbf{A}$  zweier orthogonaler  $(n, n)$ -Matrizen sind ebenfalls orthogonal, wobei i. Allg.  $\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$  ist.

**Symmetrische und schiefsymmetrische Matrix** Eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  heißt symmetrisch, wenn sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt, also  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  oder  $a_{ik} = a_{ki}$ . Eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  heißt schiefsymmetrisch (antisymmetrisch), wenn sie mit ihrer negativen Transponierten übereinstimmt, also  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$  bzw.  $a_{ik} = -a_{ki}$  und  $a_{ii} = 0$ .

Jede quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  lässt sich in eine Summe aus einer symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}_s = \mathbf{A}_s^T$  und einer schiefsymmetrischen (antisymmetrischen) Matrix  $\mathbf{A}_a = -\mathbf{A}_a^T$  zerlegen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (\text{A.21})$$

**Quadratische Form** Eine quadratische Form ist ein skalarer Ausdruck der Gestalt

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A.22})$$

$$y(\mathbf{x}) = [x_1 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k. \quad (\text{A.23})$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist symmetrisch, also  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  bzw.  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Wird die quadratische Form  $y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$  mit einer allgemeinen  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{C}$  gebildet, so liefert nur der symmetrische Anteil  $\mathbf{C}_s = \mathbf{C}_s^T$  einen Beitrag zu  $y$ , nicht aber der schiefsymmetrische Anteil  $\mathbf{C}_a = -\mathbf{C}_a^T$ , also

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_s \mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{C}_a \mathbf{x}}_0.$$

**Definite quadratische Formen und Matrizen** Die quadratische Form  $y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  bzw. die symmetrische Matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  heißt

- *positiv (negativ) semidefinit*, wenn für beliebige reelle Vektoren  $\mathbf{x}$  gilt

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad (\leq 0), \tag{A.24}$$

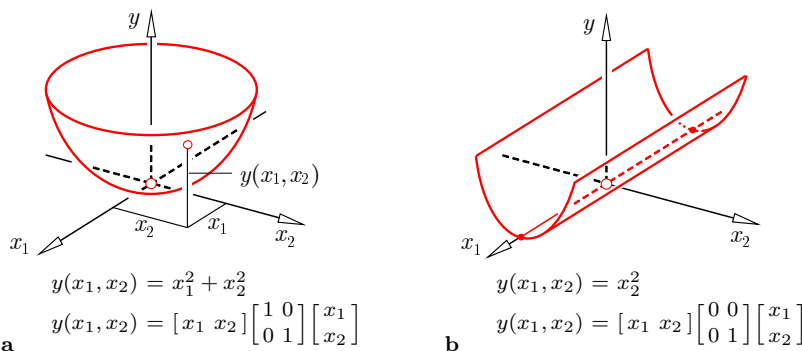
- *positiv (negativ) definit*, wenn für beliebige reelle Vektoren  $\mathbf{x}$  außer  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  gilt

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad (< 0). \tag{A.25}$$

Es gelten folgende Aussagen:

- Eine symmetrische Matrix ist positiv (negativ) definit, wenn alle ihre Eigenwerte größer (kleiner) Null sind. Sie ist positiv (negativ) semidefinit, wenn sie keine negativen (positiven) Eigenwerte besitzt.
- Eine positiv (negativ) definite Matrix ist regulär, während eine positiv (negativ) semidefinite Matrix singulär ist.

Beispiele definierter quadratischer Formen für den Fall  $n = 2$  zeigt Abb. A.1.



**Abb. A.1** Definite quadratische Formen ( $n = 2$ ). **a** Positiv definite Form. **b** Positiv semidefinite Form

Die positive Definitheit einer Matrix kann auch mit Hilfe des Satzes von SYLVESTER<sup>1</sup> überprüft werden. Die symmetrische Matrix  $\mathbf{A}$  ist dann und nur dann positiv definit, wenn sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , größer null sind, also

$$H_1 = a_{11} > 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad H_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{A.26}$$

<sup>1</sup> JAMES JOSEPH SYLVESTER, \*1814 in London, †1897 in Oxford

## A.2 Quaternionen

Die Quaternionen wurden um 1840 von HAMILTON eingeführt [34]. Wesentliche Beiträge sind aber bereits bei EULER und RODRIGUES [90] zu finden.

Eine Quaternion  $\underline{\mathbf{a}}$  ist eine viergliedrige, komplexe Zahl, bestehend aus einem Realteil  $a_s$  mit der reellen Einheit 1 und drei Imaginärteilen  $a_x, a_y, a_z$  mit den imaginären Einheiten  $i, j$  und  $k$ ,

$$\underline{\mathbf{a}} = a_s + i a_x + j a_y + k a_z. \quad (\text{A.27})$$

Für die Produkte der Imaginäreinheiten gelten die Rechenregeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (\text{A.28})$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad (\text{A.29})$$

$$ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik. \quad (\text{A.30})$$

Der Zusammenhang zur Vektorrechnung wird erhalten, indem der Realteil  $a_s$  als der *Skalarteil* und die Imaginärteile  $a_x, a_y, a_z$  als der *Vektorteil*  $\mathbf{a}$  der Quaternion definiert werden. Im Folgenden wird die Spaltenschreibweise als 4-Vektor

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_s \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Skalarteil} \\ \text{Vektorteil} \end{array} \quad (\text{A.31})$$

verwendet. Andere Schreibweisen sind  $\underline{\mathbf{a}} = (a_s, \mathbf{a})$  oder  $\underline{\mathbf{a}} = a_s + \mathbf{a}$ . Aus (A.28) bis (A.30) folgen die Rechenregeln für Quaternionen.

**Summe zweier Quaternionen** Zwei Quaternionen

$$\underline{\mathbf{a}} = a_s + i a_x + j a_y + k a_z, \quad \underline{\mathbf{b}} = b_s + i b_x + j b_y + k b_z \quad (\text{A.32})$$

werden addiert, indem ihre Anteile addiert werden,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}} &= \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{c}} &= (a_s + i a_x + j a_y + k a_z) + (b_s + i b_x + j b_y + k b_z) \\ \underline{\mathbf{c}} &= \underbrace{(a_s + b_s)}_{c_s} + i \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x} + j \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y} + k \underbrace{(a_z + b_z)}_{c_z}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

In Spaltenschreibweise lautet die Summe zweier Quaternionen

$$\begin{bmatrix} c_s \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_s \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s + b_s \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Die Summe zweier Quaternionen ist kommutativ,  $\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}}$ .

**Produkt zweier Quaternionen** Das Produkt der Quaternionen  $\underline{\mathbf{a}}$  und  $\underline{\mathbf{b}}$  aus (A.32) wird hier durch den Multiplikationsoperator  $\circ$  gekennzeichnet. Mit den Multiplikationsregeln der Imaginäreinheiten (A.28) bis (A.30) gilt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}} &= \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{c}} &= (a_s + i a_x + j a_y + k a_z)(b_s + i b_x + j b_y + k b_z) \\ \underline{\mathbf{c}} &= \underbrace{(a_s b_s - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z)}_{c_s} + i \underbrace{(a_s b_x + a_x b_s + a_y b_z - a_z b_y)}_{c_x} + \\ &\quad + j \underbrace{(a_s b_y + a_y b_s + a_z b_x - a_x b_z)}_{c_y} + k \underbrace{(a_s b_z + a_z b_s + a_x b_y - a_y b_x)}_{c_z}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Das Produkt zweier Quaternionen ist damit wieder eine Quaternion. Unter Verwendung des Skalar- und Vektorprodukts der Vektorteile lautet dieses Ergebnis in Spaltenschreibweise

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}} &= \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} \\ \begin{bmatrix} c_s \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_s \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_s \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_s b_s - \mathbf{a}^T \mathbf{b} \\ a_s \mathbf{b} + b_s \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Wegen der Einheitenverknüpfungen (A.30) bzw. der Nichtkommutativität des Vektorprodukts,  $\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ , ist das Produkt zweier Quaternionen nicht kommutativ,  $\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} \neq \underline{\mathbf{b}} \circ \underline{\mathbf{a}}$ . Es gelten die weiteren Rechenregeln

$$\underline{\mathbf{a}} \circ (\underline{\mathbf{b}} \circ \underline{\mathbf{c}}) = (\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}}) \circ \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} \circ \underline{\mathbf{c}} \quad (\text{Assoziativgesetz}), \quad (\text{A.37})$$

$$\underline{\mathbf{a}} \circ (\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{c}} \quad (\text{Distributivgesetz}). \quad (\text{A.38})$$

**Konjugierte Quaternion** In Analogie zu den gewöhnlichen komplexen Zahlen wird die zu einer Quaternion  $\underline{\mathbf{a}}$  konjugierte Quaternion  $\overline{\underline{\mathbf{a}}}$  so definiert, dass die drei Imaginärteile, also der Vektorteil  $\mathbf{a}$ , das umgekehrte Vorzeichen haben,

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_s \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{\underline{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} a_s \\ -\mathbf{a} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

Die konjugierte Quaternion des Produkts  $\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}}$  lautet unter Berücksichtigung von (A.36)

$$\overline{\underline{\mathbf{c}}} = \overline{\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}}} = \overline{\underline{\mathbf{b}}} \circ \overline{\underline{\mathbf{a}}}. \quad (\text{A.40})$$

**Quaternionenprodukt in Matrixschreibweise** Das Produkt zweier Quaternionen  $\underline{\mathbf{a}}$  und  $\underline{\mathbf{b}}$  kann auch als das Produkt einer (4,4)-Matrix mit einem 4-Vektor berechnet werden. Hierzu wird aus dem Produkt in (A.36) entweder der erste Faktor  $\underline{\mathbf{a}}$  oder der zweite Faktor  $\underline{\mathbf{b}}$  als 4-Vektor nach rechts herausgelöst. Herauslösen des zweiten Faktors  $\underline{\mathbf{b}}$  ergibt

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} a_s & -\mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & a_s \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_s \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} &= \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{a}}) \quad \underline{\mathbf{b}}.\end{aligned}\tag{A.41}$$

Herauslösen des ersten Faktors  $\underline{\mathbf{a}}$  liefert dagegen

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} b_s & -\mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & b_s \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{b}} &= \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{b}}) \quad \underline{\mathbf{a}}.\end{aligned}\tag{A.42}$$

**Betrag (Norm) einer Quaternion** Der Betrag oder die Norm  $|\underline{\mathbf{a}}|$  einer Quaternion  $\underline{\mathbf{a}}$  ist eine reelle Zahl (Skalar) und lautet

$$|\underline{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_s^2 + \mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{a_s^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.\tag{A.43}$$

Mit (A.36) und (A.39) ist  $|\underline{\mathbf{a}}| = \sqrt{\underline{\mathbf{a}} \circ \overline{\underline{\mathbf{a}}}}$ .

**Einsquaternion** Das neutrale Element der Multiplikation von Quaternionen ist die Einsquaternion mit dem Nullvektor als Vektorteil,

$$\underline{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.\tag{A.44}$$

Es gilt  $\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{1}} = \underline{\mathbf{1}} \circ \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}$ .

**Inverse Quaternion** Die Inverse  $\underline{\mathbf{a}}^{-1}$  einer Quaternion  $\underline{\mathbf{a}}$  wird so definiert, dass das Produkt  $\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{a}}^{-1}$  die Einsquaternion ergibt,

$$\underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{a}}^{-1} = \underline{\mathbf{a}}^{-1} \circ \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{1}}.\tag{A.45}$$

Die Inverse einer Quaternion  $\underline{\mathbf{a}}$  lautet

$$\underline{\mathbf{a}}^{-1} = \frac{\overline{\underline{\mathbf{a}}}}{|\underline{\mathbf{a}}|^2}.\tag{A.46}$$

**Einheitsquaternion** Eine Quaternion, deren Betrag gleich 1 ist, wird Einheitsquaternion genannt. Die Einheitsquaternion  $\underline{\mathbf{e}}$  einer Quaternion  $\underline{\mathbf{a}}$  ist

$$\underline{\mathbf{e}} = \frac{\underline{\mathbf{a}}}{|\underline{\mathbf{a}}|}.\tag{A.47}$$

Mit (A.46) und  $|\underline{\mathbf{e}}| = 1$  stimmen die inverse und die konjugierte Einheitsquaternion überein,

$$\underline{\mathbf{e}}^{-1} = \overline{\underline{\mathbf{e}}}.\tag{A.48}$$

Wegen (A.45) ist  $\underline{\mathbf{e}} \circ \overline{\underline{\mathbf{e}}} = \overline{\underline{\mathbf{e}}} \circ \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{1}}$ .



# Literaturverzeichnis

- [1] AMIROUCHE F (2006) Fundamentals of Multibody Dynamics. Theory and Applications. Birkhäuser, Boston
- [2] ANGELES J (2003) Fundamentals of Robotic mechanical systems. Theory, methods, and algorithms, 2nd edn. Springer, New York
- [3] ANGELES J, KECSKEMÉTHY A (eds) (1995) Kinematics and Dynamics of Multi-body Systems. Springer, Wien
- [4] BAE DS, HAUG EJ (1988) A recursive formulation for constrained mechanical system dynamics. Part I: Open-loop systems. *Mechanics of Structures and Machines* 15:359–382
- [5] BAE DS, HAUG EJ (1988) A recursive formulation for constrained mechanical system dynamics. Part II: Closed-loop systems. *Mechanics of Structures and Machines* 15:481–506
- [6] BARTKOWIAK R (2013) Analyse und Synthese überbestimmter Mechanismen mit Hilfe der Schraubentheorie. Verlag Dr. Hut, München
- [7] BAUCHAU OA (2011) Flexible Multibody Dynamics. Springer, Dordrecht
- [8] BAUMGARTE J (1972) Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1:490–501
- [9] BOTTEMA O, ROTH B (1979) Theoretical Kinematics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam
- [10] BRANDL H, JOHANNI R, OTTER M (1986) A very efficient algorithm for the simulation of robots and similar multibody systems without inversion of the mass matrix. In: Proc. IFAC/IFIP/IMACS Int. Symposium on Theory of Robots, Wien, pp 365–370
- [11] BRANDL H, JOHANNI R, OTTER M (1987) An algorithm for the simulation of multibody systems with kinematical loops. In: BAUTISTA E (ed) Proc. 7th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Pergamon Press, Oxford, pp 407–411
- [12] BREMER H (1988) Dynamik und Regelung mechanischer Systeme. Teubner, Stuttgart
- [13] BREMER H (1993) Das Jourdain'sche Prinzip. *ZAMM* 73:184–187

- [14] BREMER H (2008) *Elastic Multibody Dynamics. A Direct Ritz Approach.* Springer, Berlin
- [15] BREMER H, PFEIFFER F (1992) *Elastische Mehrkörpersysteme.* Teubner, Stuttgart
- [16] CRAIG JJ (2004) *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd edn. Prentice Hall, Upper Saddle River (NJ)
- [17] D'ALEMBERT J (1743) *Traité de Dynamique.* David, Paris
- [18] DE LUCA A, ORIOLO G (1995) Modeling and control of nonholonomic mechanical systems. In: ANGELES J, KECSKEMÉTHY A (eds) *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems*, Springer, Wien, pp 277–342
- [19] DRESIG H, HOLZWEISSIG F (2007) *Maschinendynamik.* Springer, Berlin
- [20] DUDITZA F, DIACONESCU D (1987) Ein sinnreiches Zahnräderdifferential aus dem antiken China. *Maschinenbautechnik* 36:268–271
- [21] EICH-SÖLLNER E, FÜHRER C (1998) *Numerical Methods in Multibody Dynamics.* Teubner, Stuttgart
- [22] EULER L (1776) *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.* *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 20:208–238
- [23] FEATHERSTONE R (2008) *Rigid Body Dynamics Algorithms*, 2nd edn. Springer, New York
- [24] FISCHER O (1905) *Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenkssysteme.* B.G.Teubner, Leipzig
- [25] FISCHER U, STEPHAN W (1972) *Prinzipien und Methoden der Dynamik.* Fachbuchverlag, Leipzig
- [26] GARCÍA DE JALÓN J, BAYO E (1994) *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems.* Springer, New York
- [27] GAUSS CF (1829) Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4:232–235
- [28] GÉRADIN M, CARDONA A (2001) *Flexible Multibody Dynamics, A Finite Element Approach.* John Wiley, New York
- [29] GIPSER M (1999) *Systemdynamik und Simulation.* Teubner, Stuttgart
- [30] GOSSELIN C, ST-PIERRE É (1997) Development and experimentation of a fast 3-dof camera-orienting device. *The International Journal of Robotics Research* 16:619–630
- [31] GROCHE G, ZIEGLER V, ZIEGLER D, ZEIDLER E (eds) (1995) *Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil II.* Teubner, Stuttgart
- [32] HAIRER E, WANNER G (1996) *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential Algebraic Problems.* Springer, Berlin
- [33] HAMEL G (1949) *Theoretische Mechanik.* Springer, Berlin
- [34] HAMILTON WR (1853) *Lectures on Quaternions.* Hodges and Smith, Dublin
- [35] HAUG EJ (1989) *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Vol. I: Basic Methods.* Allyn and Bacon, Boston
- [36] HEIMANN B, GERTH W, POPP K (2001) *Mechatronik — Komponenten, Methoden und Beispiele*, 2. Aufl. Fachbuchverlag, Leipzig
- [37] HERRMANN S, KLUES D, KAEHLER M, GRAWE R, RACHHOLZ R, SOUFRANT R, ZIERATH J, BADER R, WOERNLE C (2015) A novel approach for

- dynamic testing of total hip dislocation under physiological conditions. *PLoS one* 10(12):e0145798
- [38] HEYDEN T (2006) Bahnregelung eines seilgeführten Handhabungssystems mit kinematisch unbestimmter Lastführung. *Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Band 1100*, VDI-Verlag, Düsseldorf
- [39] HILLER M (1981) Analytisch-numerische Verfahren zur Behandlung räumlicher Übertragungsmechanismen. *Fortschrittberichte VDI, Reihe 1, Band 76*, VDI-Verlag, Düsseldorf
- [40] HILLER M (1983) *Mechanische Systeme*. Springer, Berlin
- [41] HILLER M (1995) Multiloop kinematic chains and dynamics of multiloop systems. In: ANGELES J, KECSKEMÉTHY A (eds) *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems*, Springer, Wien, pp 75–215
- [42] HILLER M, KECSKEMÉTHY A, WOERNLE C (1986) A loop-based kinematical analysis of complex mechanisms. In: *Proc. 19th Biennial ASME Mechanisms Conf.*, Columbus, ASME-Paper-86–DET-184
- [43] HOOKER W, MARGULIES G (1965) The dynamical attitude equations for an n-body satellite. *J Astronaut Sci* 12:123–128
- [44] HUSTON RL (1990) *Multibody Dynamics*. Butterworth-Heinemann, Boston
- [45] HUSTY M, KARGER A, SACHS H, STEINHILPER W (1997) *Kinematik und Robotik*. Springer, Berlin
- [46] ISIDORI A (1995) *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin
- [47] JOURDAIN PEB (1909) Note on an analogue of Gauss' Principle of Least Constraints. *The Quarterly Journal of Pure and Appl Math* XL:153–197
- [48] KANE TR, LEVINSON DA (1985) *Dynamics, Theory and Applications*. McGraw-Hill, New York
- [49] KECSKEMÉTHY A (1993) Objektorientierte Modellierung von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen. *Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Band 88*, VDI-Verlag, Düsseldorf
- [50] KECSKEMÉTHY A, HILLER M (1992) Automatic closed-form kinematics-solutions for recursive single-loop chains. In: *DE-Vol. 47, Flexible Mechanisms, Dynamics, and Analysis, Proc. 22nd Biennial ASME Mechanisms Conf.*, Scottsdale, pp 387–393
- [51] KIM S, VANDERPLOEG MJ (1986) A general and efficient method for dynamic analysis of mechanical systems using velocity transformation. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 108:176–182
- [52] KORTÜM W, LUGNER P (1994) *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*. Springer, Berlin
- [53] KREUZER E (1979) Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen. *Fortschrittberichte VDI, Band 32, Reihe 11*, VDI-Verlag, Düsseldorf
- [54] KREUZER E, LUGTENBURG JB, MEISSNER HG, TRUCKENBRODT A (1994) *Industrieroboter. Technik, Berechnung und anwendungsorientierte Auslegung*. Springer, Berlin
- [55] KRUPP T (1999) *Symbolische Gleichungen für Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen*. Shaker Verlag, Aachen

- [56] LAGRANGE JL (1811) *Mécanique Analytique*. L'Académie Royale des Sciences, Paris
- [57] LEVINSON DA (1977) Equations of motion for multiple-rigid-body systems via symbolic manipulation. *AIAA Journal of Spacecraft and Rockets* 14:479–487
- [58] LI H (1990) Ein Verfahren zur vollständigen Lösung der Rückwärts-  
transformaton für Roboter mit allgemeiner Geometrie. Dissertation, Univer-  
sität Duisburg
- [59] LUCK K, MODLER KH (1999) *Getriebelehre*. Springer, Berlin
- [60] MAGNUS K (1971) *Kreisel, Theorie und Anwendungen*. Springer, Berlin
- [61] MAGNUS K, MÜLLER-SLANY HH (2005) *Grundlagen der Technischen Me-  
chanik*, 7. Aufl. Teubner, Stuttgart
- [62] MAIER T (2004) *Bahnsteuerung eines seilgeführten Handhabungssystems —  
Modellbildung, Simulation und Experiment*. Fortschrittberichte VDI, Reihe  
8, Band 1047, VDI-Verlag, Düsseldorf
- [63] MAISSER P (1988) Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen. *ZAMM*  
68:463–481
- [64] MATSCHINSKY W (2007) *Radführungen der Straßenfahrzeuge: Kinematik,  
Elasto-Kinematik und Konstruktion*, 3. Aufl. Springer, Berlin
- [65] MERLET JP (2006) *Parallel Robots*, 2nd edn. Springer, Berlin
- [66] MSC.Software (2010) *Adams*. <http://www.msc.software.com>
- [67] MÜLLER A (2005) *Singuläre Phänomene in der Kinematik von Starrkörper-  
mechanismen*. Shaker Verlag, Aachen
- [68] MURRAY RM, LI Z, SASTRY S (1994) *A Mathematical Introduction to Ro-  
bot Manipulation*. CRC Press, Boca Raton
- [69] NEĀMARK JI, FUFÁEV NA (1972) *Dynamics of Nonholonomic Systems*. Ameri-  
can Mathematical Society, Providence (RI)
- [70] NEUGEBAUER R (ed) (2006) *Parallelkinematische Maschinen: Entwurf, Kon-  
struktion, Anwendung*. Springer, Berlin
- [71] NEWTON I (1687) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Royal So-  
ciety, London
- [72] NIKRAVESH PE (1988) *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*.  
Prentice Hall, Englewood Cliffs
- [73] NIKRAVESH PE (2004) An overview of several formulations for multibody  
dynamics. In: TALABÁ D, ROCHE T (eds) *Product Engineering*, Springer,  
pp 189–226
- [74] NIKRAVESH PE (2007) *Planar Multibody Dynamics: Formulation, Program-  
ming and Applications*. CRC Press, New York
- [75] NIKRAVESH PE, AFFIFI H (1994) Construction of the equations of motion  
for multibody dynamics using point and joint coordinates. In: PEREIRA M,  
AMBRÓSIO J (eds) *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mecha-  
nical Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, pp 32–60
- [76] NIKRAVESH PE, GIM G (1993) Systematic construction of the equations of  
motion for multibody systems containing closed kinematic loops. *Journal of  
Mechanical Design* 115(1):143–149

- [77] ORLANDEA N, CHACE M, CALAHAN D (1977) A sparsity-oriented approach to the dynamic analysis and design of mechanical systems — Parts I and II. *Journal of Engineering for Industry* 99:773–784
- [78] PAPASTAVRIDIS JG (2002) *Analytical Mechanics*. Oxford University Press, Oxford
- [79] PARS L (1968) *A Treatise on Analytical Dynamics*. Heinemann, London
- [80] PFEIFFER F (2006) *Mechanical System Dynamics*. Springer, Berlin
- [81] PFEIFFER F, GLOCKER C (1996) *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. John Wiley, New York
- [82] PFEIFFER F, SCHINDLER T (2014) *Einführung in die Dynamik*, 3. Aufl. Springer Vieweg, Berlin
- [83] PIETRUSZKA WD (2012) *MATLAB in der Ingenieurpraxis*, 3. Aufl. Vieweg+Teubner, Wiesbaden
- [84] POPP K, SCHIEHLEN W (1993) *Fahrzeugdynamik*. Teubner, Stuttgart
- [85] REIN U (1994) Recursive dynamics of overconstrained mechanisms. In: DE-Vol. 71, *Machine Elements and Machine Dynamics*, Proc. 23rd Biennial ASME Mechanisms Conf., Minneapolis, pp 375–381
- [86] REIN U (1997) *Effiziente objektorientierte Simulation mit dem rekursiven Formalismus*. Dissertation, Universität Stuttgart
- [87] RILL G, SCHAEFFER T (2014) *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation*, 2. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden
- [88] ROBERSON R, SCHWERTASSEK R (1998) *Dynamics of Multibody Systems*. Springer, Berlin
- [89] ROBERSON R, WITTENBURG J (1966) A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies with reference to the problem of satellite attitude control. In: Proc. 3rd IFAC Congress, London, IFAC, pp 46D.2–46D.9
- [90] RODRIGUES O (1840) Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 5:380–440
- [91] SAMIN JC, FISETTE P (2003) *Symbolic Modeling of Multibody Systems*. Kluwer, Dordrecht
- [92] SCHATZ P (1998) *Die Welt ist umstülplbar: Rhythmusforschung und Technik*, 3. Aufl. Niggli Verlag, Sulgen
- [93] SCHIEHLEN W (1990) *Multibody Systems Handbook*. Springer, Berlin
- [94] SCHIEHLEN W, EBERHARD P (2014) *Technische Dynamik*, 4. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden
- [95] SCHRAMM D, HILLER M, BARDINI R (2013) *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*, 2. Aufl. Springer, Berlin
- [96] VON SCHWERIN R (1999) *Multibody System Simulation. Numerical Methods, Algorithms, and Software*. Springer, Berlin
- [97] SCHWERTASSEK R, WALLRAPP O (1999) *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Vieweg-Verlag, Braunschweig

- [98] SHABANA A (2005) Dynamics of Multibody Systems, 3rd edn. Cambridge University Press, Cambridge
- [99] SHAMPINE L, GORDON M (1984) Computer-Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Vieweg-Verlag, Braunschweig
- [100] SHEPPERD SW (1978) Quaternion from rotation matrix. AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics 1:223–224
- [101] SIMPACK AG (2010) SIMPACK. <http://www.simpack.com>
- [102] STELZLE W, KECSKEMÉTHY A, HILLER M (1995) A comparative study of recursive methods. Archive of Applied Mechanics 66:9–19
- [103] SZABÓ I (1987) Geschichte der mechanischen Prinzipien, 3. Aufl. Birkhäuser, Basel
- [104] VALÁŠEK M, STEJSKAL V (1996) Kinematics and Dynamics of Machinery. Dekker, New York
- [105] VDI-RICHTLINIE 2120 (2003) Vektorrechnung, Grundlagen für die praktische Anwendung. Beuth-Verlag, Berlin
- [106] VDI-RICHTLINIE 2739 BLATT 1 (1991) Matrizenrechnung, Grundlagen für die praktische Anwendung. Beuth-Verlag, Berlin
- [107] VDI-RICHTLINIE 2739 BLATT 2 (1996) Matrizenrechnung, Anwendungen in der Kinematik und bei Eigenwertproblemen. Beuth-Verlag, Berlin
- [108] VERESHCHAGIN AF (1974) Computer simulation of the dynamics of complicated mechanisms of robot-manipulators. Engineering and Cybernetics 6:65–70
- [109] WALKER M, ORIN D (1982) Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 104:205–211
- [110] WEHAGE RA (1988) Application of matrix partitioning and recursive projection to order n solution of constrained equations of motion. In: Proc. 20th Biennial ASME Mechanisms Conf., Orlando, pp 221–230
- [111] WITTENBURG J (2008) Dynamics of Multibody Systems, 2nd edn. Springer, Berlin
- [112] WITTENBURG J (2016) Kinematics. Theory and Applications, 1st edn. Springer, Berlin
- [113] WOERNLE C (1988) Ein systematisches Verfahren zur Aufstellung der geometrischen Schließbedingungen in kinematischen Schleifen mit Anwendung bei der Rückwärtstransformation für Industrieroboter. Fortschrittberichte VDI, Reihe 18, Band 59, VDI-Verlag, Düsseldorf
- [114] ZIERATH J (2015) Dynamik elastischer Mehrkörpersysteme - Theorie, Entwurf, Regelung, Messung und Validierung am Beispiel von Windenergieanlagen. Verlag Dr. Hut, München
- [115] ZIERATH J, WOERNLE C, HEYDEN T (2009) Elastic multibody models of transport aircraft high-lift mechanisms. Journal of Aircraft 46:1513–1524
- [116] ZIERATH J, RACHHOLZ R, WOERNLE C (2016) Field test validation of Flex5, MSC.Adams, alaska/Wind and SIMPACK for load calculations on wind turbines. Wind Energy 19(7):1201–1222
- [117] ZURMÜHL R, FALK S (1997) Matrizen 1, Grundlagen. Springer, Berlin

# Sachverzeichnis

- Ableitung vektorieller Funktionen, xvii
- Absolutkoordinaten
  - Massenpunktsystem, 129
  - Mehrkörpersystem, 189
- analytische Methode, 5
- Anfangswertproblem, 181
- APPELL, 5
- Arbeit, 114
- Arbeitssatz, 115
- aufspannender Baum, 352, 370
  
- Baumstruktur, 8, 279, 325
- Baumwurzel, 311
- Beispiele
  - holonom ebener Mehrkörpersysteme
    - doppeltes Körperpendel, 218
    - Gelenkviereck, 361
    - Rollpendel, 224
    - Schubkurbelgetriebe, 393
  - holonomer Massenpunktsysteme
    - doppeltes Massenpunktpendel, 157
    - Massenpunkt auf rotierendem Ring, 168
    - räumliches Massenpunktpendel, 179
    - Schubkurbelgetriebe, 163
    - Verladekran, 131, 136, 141, 148, 149, 153, 155
  - holonomer räumlicher Mehrkörpersysteme
    - Knickarm-Roboter, 342
    - Koppelgetriebe (RSRRR), 398
    - Parallelroboter, 407
    - Roboter mit zwei Drehgelenken, 233
    - schwerer Kreisel, 227
  - nichtholonome Systeme
    - Kugel auf rotierender Ebene, 251
    - Wagen mit Lenkung, 270
    - Wagen mit zwei Rädern, 242, 246, 259, 267
- BERNOULLI, J., 3
  
- Beschleunigung, 38
  - CORIOLIS-, 48, 127
  - EULER-, 48
- Bewegungsgleichungen
  - in Absolutkoordinaten
    - doppeltes Körperpendel, 221
    - doppeltes Massenpunktpendel, 160
    - ebenes Mehrkörpersystem, 215
    - Kugel auf rotierender Ebene, 252
    - Massenpunkt auf rotierendem Ring, 170
    - Massenpunktsystem, 153
    - räumliches Mehrkörpersystem, 207
    - Schubkurbelgetriebe, 165
    - schwerer Kreisel, 229
    - Wagen mit zwei Rädern, 247
  - in Minimalgeschwindigkeiten
    - Kugel auf rotierender Ebene, 256
  - in Minimalkoordinaten
    - doppeltes Körperpendel, 223
    - doppeltes Massenpunktpendel, 162
    - ebenes Mehrkörpersystem, 217
    - Knickarm-Roboter, 342
    - Massenpunkt auf rotierendem Ring, 171
    - Massenpunktsystem, 154
    - räumliches Mehrkörpersystem, 208
    - Roboter mit zwei Drehgelenken, 234
    - Rollpendel, 225
    - Schubkurbelgetriebe, 167
  - in Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten
    - räumliches Mehrkörpersystem, 212
    - schwerer Kreisel, 232
    - Wagen mit zwei Rädern, 248
- Bewegungsgleichungen geschlossener MKS
  - in Minimalkoordinaten, 392
    - Koppelgetriebe (RSRRR), 406
    - Schubkurbelgetriebe, 398



- in primären Gelenkkordinaten, 385
  - Koppelgetriebe (RSRRR), 402
  - nichtrekursiver Formalismus, 384
  - Parallelroboter, 415
  - rekursiver Formalismus, 386
  - Schubkurbelgetriebe, 396
- Übersicht, 309
- Bewegungsgleichungen offener MKS, 335
  - Knickarm-Roboter, 342
  - nichtrekursiver Formalismus, 335
  - rekursiver Formalismus, 337
- Bewegungswinder, 37
- Bindungen, 129
  - einseitige, 133
  - explizite, 138
    - des Drehgelenks, 299
    - des Kugelgelenks, 302
    - des Schubgelenks, 301
    - eines allgemeinen Gelenks, 295
    - in einer Baumstruktur, 325
    - in einer Kettenstruktur, 315
  - geometrische, 131
  - holonome, 130, 134, 141
  - implizite
    - der Pendelstütze, 355
    - des Drehgelenks, 294, 355
    - des Drehschubgelenks, 355
    - des ebenen Gelenks, 355
    - des Kardangelenks, 355
    - des Kugelgelenks, 355
    - eines allgemeinen Gelenks, 289
  - kinematische, 131
  - nichtholonome, 242, 245
  - primäre, 353, 360, 380
  - rheonome, 130
  - sekundäre, 353, 360, 372, 380
  - skleronome, 130
  - zweiseitige, 133
- Bindungsmatrix
  - impliziter Gelenkbindungen, 290
  - impliziter Bindungen, 135, 193, 243
  - impliziter Schließbedingungen, 353, 373
- Blattkörper, 312
- BOHNENBERGER, 6
- BRICARD, 286
- BRYAN, 72
  
- CARDANO, 72
- charakteristisches Gelenkpaar, 358
- CORIOLIS, 48
- COULOMB, 143
- COULOMBSche Reibungskräfte, 201
  
- D'ALEMBERT, 3
  
- DAE, *siehe* differential-algebraische Gleichungen
- definit, 421
- Deskriptorgleichungen, 150
- Deviationsmoment, 105, 108
- differential-algebraische Gleichungen, 184
- direkte Dynamik, 237
- Distribution, 259
- Drall, 98
  - absoluter, 98
  - relativer, 99
  - starrer Körper, 104
- Drallsatz, 101
  - starrer Körper, 111
- Drehgelenk, 274
  - Reaktionsbedingungen, 306
  - explizite Bindungen, 299
  - implizite Bindungen, 294, 355
- Drehimpuls, *siehe* Drall
- Drehmatrix, 34
- Drehschubgelenk, 275
  - implizite Bindungen, 355
- Drehtensor, 56
  - als Transformationsmatrix, 59, 81
  - Übergang zur Winkelgeschwindigkeit, 69
- Drehung (Drehbewegung), 40, 55
  - aktive Betrachtung, 58
  - differentielle, 67
  - mehrfache, 62, 84
    - Nichtkommutativität, 62
    - um Ausgangsachsen, 63
    - um mitgedrehte Achsen, 65
  - passive Betrachtung, 58
- Drehzeiger, 56
  - Aufbau des Drehtensors, 56
  - Übergang zur Winkelgeschwindigkeit, 67
- Dreiecksungleichung, 106
  
- Ebene Bewegung, 40
- Ebenes Gelenk, 275
  - implizite Bindungen, 355
- Elementardrehung, 60
- Elementenpaar, 275
- Energie
  - kinetische, 117, 175
    - quadratische Form, 143, 155, 176
  - potentielle, 115
- Energiesatz, 116
- Entwicklungssatz, 25
- EULER, 3
- EULER-Parameter, 80
  - als Quaternionen, 83
  - kinematische Differentialgleichungen, 85
- Übersicht, 88



- EULER-Winkel ( $zxz$ ), 79
- FISCHER, O., 7
- FOUCAULT, 6
- Freiheitsgrad
  - Geschwindigkeits-, 244
  - holonomer Massenpunktsysteme, 137
  - holonomer Mehrkörpersysteme, 282, 288
  - Lage-, 244
  - nichtholonome Systeme, 244
  - überbestimmter Mehrkörpersysteme, 356
- FROBENIUS, 258
- GAUSS, 172
- Gelenk
  - holonomes, 274
  - Modelle, 276
  - primäres/sekundäres, 352
  - rheonomes, 276
  - skleronomes, 274
- Gelenkbindungen, 299, 316, 355
- Gelenkgeschwindigkeiten, 296, 314
  - primäre, 352
- Gelenkkoordinaten, 274, 296, 314
  - primäre/sekundäre, 352
- Gelenkviereck
  - ebenes, 281, 361
  - räumliches, 281, 284
  - sphärisches, 281
  - überbestimmtes, 287, 362
- Geschwindigkeit, 36
  - gewöhnliche Differentialgleichungen, 181
- GIBBS, 5
- GRASSMANN, 25
- GRÜBLER, 283
- GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium, 282
  - ebenes bzw. sphärisches System, 288
  - räumliches überbestimmtes System, 356
- HAMEL, 5
- HAMILTON, 177
  - kanonische Gleichungen, 177
- HAMILTON
  - Funktion, 178
- Hauptachsensystem, 108
- Hauptträgheitsmoment, 109
- HERTZ, 5
- HEUSINGER, 6
  - holonom, 130
- HOOKE, 274
- HUYGENS, 107
- Impuls, 98, 104
  - verallgemeinerter, 177
- Impulssatz, 100, 111
- Index eines DAE-Systems
  - holonomes System, 152
  - nichtholonomes System, 248
- Integrierbarkeit kinematischer Bindungen, 258
  - Wagen mit Lenkung, 270
  - Wagen mit nicht zusammenfallenden Radachsen, 265
  - Wagen mit zwei Rädern, 259
  - Zweirädriger Wagen mit Raddrehungen, 267
- inverse Dynamik, 237
- involutiv Abschließung, 263
- Inzidenzmatrix, 312
- JACOBI, 135
- JACOBI-Matrix
  - allgemein, xvii
  - expliziter Körperbindungen
    - Baumstruktur, 327
    - Kettenstruktur, 319
  - expliziter Bindungen, 139, 195, 245
  - expliziter Gelenkbindungen, 297
  - expliziter Schließbedingungen, 358, 379
- JOURDAIN, 146
- KARDAN-Winkel ( $xyz$ ), 72, 77
- KARDAN-Winkel ( $zyx$ ), 78
- Kardangelenk, 275
  - implizite Bindungen, 355
- KELVIN, 199
- Kettenstruktur, 279, 315
- kinematische Differentialgleichungen
  - Drehmatrix (-tensor), 37, 69
  - EULER-Parameter, 85
  - EULER-Winkel ( $zxz$ ), 79
  - geschlossener Mehrkörpersysteme
    - in Minimalkoordinaten, 359, 379
    - in primären Gelenkkoordinaten, 372
  - holonomer Massenpunktsysteme, 155
  - KARDAN-Winkel ( $xyz$ ), 75, 77
  - KARDAN-Winkel ( $zyx$ ), 78
  - nichtholonome Systeme, 248
  - offener Mehrkörpersysteme, 315
  - RODRIGUES-Parameter, 90
- kinematische Schleife, 279, 351
- Körperbindungen, 316
- Kompasswagen, 269
- Kraft
  - äußere, 100
  - CORIOLIS-, 127, 154, 249
  - eingeprägte, 198
    - algebraisches Kraftgesetz, 198
    - ideale, 198
    - integrales Kraftgesetz, 200

- nichtideale, 201
  - Reibungs-, 201
  - innere, 100
  - konservative, 115
  - Reaktions-, 143
  - verallgemeinerte, 154, 208, 217, 249, 336, 393
  - Kraftelement
    - KELVIN-VOIGT, 199
    - MAXWELL, 200
  - Kraftwinder, 101, 198, 304
  - Kreisel, 6, 121
    - Bewegungsgleichungen, 229, 231
  - Kreiselmoment, 113, 119, 127
  - Kugelgelenk, 275
    - explizite Bindungen, 302
    - implizite Bindungen, 355
  - KUTTA, 182
  - KUTZBACH, 283
  - Lage eines starren Körpers, 35
  - Lage-Freiheitsgrad, 244
  - LAGRANGE, 3
    - Gleichungen erster Art, 150, 206
    - Gleichungen zweiter Art, 4, 174, 238
    - Multiplikator, 148, 173
  - LIE, 258
  - LIE-Klammer, 261
  - MAGGI, 5
  - Mannigfaltigkeit, 135
  - Masse, 103
  - Massenmatrix
    - bei Absolutkoordinaten, 143, 332, 382
    - bei Minimalkoordinaten, 154, 335, 392
    - bei primären Gelenkkoordinaten, 385
  - Massenmittelpunkt, 103
  - Massenpunktsystem, 129
  - Massenträgheitsmoment, 105
  - Matrix
    - Einheitsmatrix, 418
    - invers, 419
    - orthogonal, 420
    - positiv (negativ) definit, 421
    - positiv (negativ) semidefinit, 421
    - Produkt, 419
    - Rang, 418
    - regulär, singular, 418
    - Summe, 418
    - symmetrisch, schief-symmetrisch, 420
    - transponiert, 418
  - MAXWELL, 200
  - Mechanismus, 279
    - 6R, 286
    - 7H, 283
    - eben, 287, 288
    - Radführung, 285
    - räumliches, 287
    - RSRRR, 398
    - RSSR, 284
    - RUSR, 284
    - Schubkurbelgetriebe, 393
    - sphärisch, 288
    - sphärisches, 287
    - Taumelscheibe, 376
  - Mehrkörperformalismus, 8
    - nichtrekursiver
      - geschlossenes Mehrkörpersystem, 384
      - offenes Mehrkörpersystem, 335
    - rekursiver
      - geschlossenes Mehrkörpersystem, 386
      - offenes Mehrkörpersystem, 337
  - Mehrkörpersystem (MKS), 1
    - ebenes, 281
    - geschlossenes, 279, 351
    - kinematisch zusammenhängendes, 279
  - Klassifizierung
    - kinematische, 281
    - topologische, 279
  - offenes, 279, 311
  - räumliches, 281
  - sphärisches, 281
  - teilweise geschlossenes, 279
  - überbestimmtes, 286, 356
  - vollständig geschlossenes, 279
- Minimalgeschwindigkeiten
    - geschlossener Mehrkörpersysteme, 358, 379
    - holonomer Systeme, 155
    - nichtholonome Systeme, 245
    - offener Mehrkörpersysteme, 314
  - Minimalkoordinaten, 3
    - geschlossener Mehrkörpersysteme, 357, 379
    - holonomer Systeme, 137
    - nichtholonome Systeme, 245
    - offener Mehrkörpersysteme, 314
  - Momentensatz, *siehe* Drallsatz
  - Nachfolgekörper, 311
  - NEWTON, 3
  - NEWTON-EULER-Gleichungen
    - Mehrkörpersystem, 4, 198, 333, 382
    - starrer Körper, 111
  - NEWTON-RAPHSON-Verfahren, 187
  - nichtholonome, 242
  - numerische Drift, 185
  - numerische Integration, 181
  - numerische Stabilisierung, 185
  - Nutation, 122

- ODE, *siehe* gewöhnliche Differentialgleichungen
- Orthogonalitätsbeziehung  
 bei Gelenkbindungen, 297  
 bei holonomen Bindungen, 140, 196  
 bei nichtholonomen Bindungen, 245  
 bei Schließbedingungen, 359, 379
- Pendelstütze  
 implizite Bindungen, 355
- POISSON, 37
- POISSON-Gleichung, 37, 70, 71
- potentielle Energie, 115
- Präzession, 125
- Prinzip von  
 D'ALEMBERT, 114  
 D'ALEMBERT-LAGRANGE, 5, 145, 204  
 GAUSS, 172  
 JOURDAIN, 5, 147, 203
- Projektionsgleichung, 154, 208, 335, 393
- quadratische Form, 420
- Quaternion  
 Betrag (Norm), 424  
 Einheitsquaternion, 424  
 Einsquaternion, 424  
 inverse, 424  
 konjugierte, 423  
 Produkt, 422  
 Skalarteil, 422  
 Summe, 422  
 Vektorteil, 422
- Radführung, 285
- räumlicher Vektor, xvi
- RAPHSON, 187
- Reaktionsbedingungen  
 explizite  
 für das Drehgelenk, 306  
 für geschlossene MKS, 381  
 für holonome Bindungen, 148, 205  
 für holonome Gelenke, 305  
 für nichtholonome Bindungen, 247  
 implizite  
 für das Drehgelenk, 307  
 für holonome Bindungen, 148, 205  
 für holonome Gelenke, 305  
 für nichtholonome Bindungen, 248  
 für offene MKS, 329, 330
- Reaktionsgleichung, 157
- Reaktionskoordinaten, 148, 205, 380
- Reaktionskraft, 143
- Reaktionskraftwinder, 198, 205  
 Gelenk-, 327
- Körper-, 328  
 primärer, 382  
 sekundärer, 380
- Relativbewegung, 41  
 Umkehrung, 53
- relative Koordinaten, *siehe* Gelenkkordinaten
- REULEAUX, 275
- rheonom, 130
- Richtungscosinus, 27
- Rodrigues  
 Gleichung, 57  
 Parameter, 89
- RODRIGUES, 6
- Rotor, 118
- RUNGE, 182
- Satz von  
 EULER für die  
 Fixpunktdrehung, 56  
 Starrkörperbeschleunigung, 38  
 Starrkörperbewegung, 34  
 Starrkörpergeschwindigkeit, 36  
 FROBENIUS, 262  
 HUYGENS-STEINER, 106  
 SYLVESTER, 421
- SCHATZ, 286
- Schließbedingungen  
 explizite  
 einer einzelnen Schleife, 357, 360  
 eines mehrschleifigen Systems, 378, 380  
 Singularität, 359, 367  
 implizite  
 einer einzelnen Schleife, 352, 360  
 eines mehrschleifigen Systems, 372, 380  
 Singularität, 356, 369  
 Überbestimmtheit, 356
- Schraubgelenk, 274
- Schubgelenk, 274  
 explizite Bindungen, 301
- Schwerpunkt, 103
- Schwerpunktsatz, 100
- skleronom, 130
- STEINER, 107
- SYLVESTER, 421
- synthetische Methode, 5
- System  
 freies, 130  
 gebundenes, 130  
 konservatives, 116  
 nichtholonomes, 241  
 strukturvariables, 134
- TAIT, 72
- Tangentialraum, 140

- Tensor zweiter Stufe, 29
- Topologie
  - geschlossener Mehrkörpersysteme, 374
  - offener Mehrkörpersysteme, 311
  - Übersicht, 280
- Trägheits-Drehmoment, 113
- Trägheitskraft, 113
- Trägheitstensor, 104
  - Drehung des Bezugssystems, 108
  - homogener Kreiszyylinder, 110
- Transformationsmatrix, 26
  - als Drehtensor, 59, 81
- Translationsbewegung, 40
  
- Unwucht, 120
  
- Vektor
  - Addition, 21
  - dyadisches (tensorielles) Produkt, 30
  - Einheitsvektor, 19
  - Entwicklungssatz, 25
  - Koordinatentransformation, 26
  - LAGRANGE-Identität, 26
  - Multiplikation mit Skalar, 21
  - relative Zeitableitung, 41
  - Skalarprodukt, 22
  - Spatprodukt, 24
  - Vektorkoordinaten, 19
  - Vektorprodukt, 22
  
- Versatzmatrix
  - an einem Gelenk, 297
  - in einer Baumstruktur, 326
  - in einer Kettenstruktur, 317
- Verzweigungskörper, 312
- Verzweigungslage, 370
- virtuelle
  - Arbeit, 145
  - Beschleunigung, 173
  - Geschwindigkeit, 147, 202
  - Leistung, 147, 203
  - Verschiebung, 144
- VOIGT, 199
- Vorgängerkörper, 295, 311
  
- Wegematrix, 312
- Winkelbeschleunigung, 38, 43, 48
- Winkelgeschwindigkeit, 36, 47
  
- Zentripetalbeschleunigung, 48
- Zusammensetzung zweier Bewegungen, 45
- Zustandsgleichungen
  - holonomer Massenpunktsysteme, 155
  - holonomer Mehrkörpersysteme, 210, 211, 333, 393
  - nichtholonome Systeme, 249
- Zwang, 172
- Zwangskraft, *siehe* Reaktionskraft