Anhang A
Mathematische Grundlagen

Im Anhang werden die benötigten Grundlagen der Matrizenrechnung sowie der Algebra der Quaternionen zusammengefasst.

A.1 Matrizen

Die kinematischen und kinetischen Gleichungen der Mehrkörperdynamik können mit Hilfe der Matrizenrechnung in kompakter Form dargestellt werden. Die benötigten Grundlagen der Matrizenrechnung und die verwendeten Schreibweisen werden in diesem Abschnitt beschrieben. Ausführliche Darstellungen der Matrizenrechnung geben z. B. Zurmühl und Falk [117] sowie die VDI-Richtlinie 2739 [106].

Allgemeine Matrix Die rechteckige (m,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ wird durch das Schema ihrer Elemente a_{ik} gebildet:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \tag{A.1}$$

Eine (m,n)-Matrix, deren Elemente sämtlich null sind, heißt Nullmatrix $\mathbf{0}$.

Quadratische Matrix, Diagonalmatrix, Einheitsmatrix Ist die Zeilenanzahl m gleich der Spaltenanzahl n, so wird die (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ als n-reihige quadratische Matrix bezeichnet.

Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen, den Wert 0 haben und mindestens ein Hauptdiagonalelement ungleich null ist:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) . \tag{A.2}$$

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme*,
DOI 10.1007/978-3-662-46687-2

Eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle gleich 1 sind, heißt Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} . \tag{A.3}$$

Eine n-reihige Einheitsmatrix wird auch durch $\boldsymbol{E}_n$ gekennzeichnet.

Determinante einer Matrix, reguläre und singuläre Matrix Jeder quadratischen (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich eindeutig eine Determinante n-ter Ordnung zuordnen:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} . \tag{A.4}$$

Eine Determinante wird durch Entwicklung nach einer beliebigen Zeile oder Spalte berechnet. Beispielsweise lautet die Entwicklung einer Determinate 3. Ordnung nach der ersten Zeile

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ,$$

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} = a_{11}\ & (a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{12}\ (a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}) \\ & + a_{13}\ (a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}) \ . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Eine quadratische Matrix, deren Determinante von 0 verschieden ist, heißt reguläre Matrix; andernfalls wird sie singulär genannt.

Rang einer Matrix Eine Matrix $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ hat den Rang $r = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ genau dann, wenn $\boldsymbol{A}$ eine reguläre r-reihige Untermatrix besitzt und alle höherreihigen Untermatrizen von $\boldsymbol{A}$ singulär sind. Ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, so ist $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 0$.

Eine n-reihige Matrix $\boldsymbol{A}$ ist regulär, wenn sie den Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ besitzt und singulär, wenn ihr Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$ ist.

Transponierte einer Matrix Aus der (m,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ entsteht durch Vertauschen von Spalten und Zeilen die transponierte (n,m)-Matrix $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \tag{A.6}$$

Summe zweier Matrizen Zwei (m,n)-Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ werden elementweise addiert,

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & + & \boldsymbol{B} & = & \boldsymbol{C} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \tag{A.7}$$

mit

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \qquad \text{für} \qquad i = 1, \dots, m\,; \quad k = 1, \dots, n\,. \tag{A.8}$$

Produkt zweier Matrizen Die Multiplikation einer (m,p)-Matrix $\boldsymbol{A}$ und einer (p,n)-Matrix $\boldsymbol{B}$ ergibt eine (m,n)-Matrix $\boldsymbol{C}$,

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & = & \boldsymbol{C} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}. \end{array} \tag{A.9}$$

Zur Berechnung der Elemente c_{ik} werden alle positionsgleichen Elemente der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ mit denen der k-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$ multipliziert und anschließend sämtliche Produkte addiert,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk}\,, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n\,. \tag{A.10}$$

Es gelten die Beziehungen

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}\,, \tag{A.11}$$

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,, \tag{A.12}$$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\,, \tag{A.13}$$

$$\det(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) = \det\boldsymbol{A}\,\det\boldsymbol{B} \qquad (\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\ \text{quadratisch}) \tag{A.14}$$

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,. \tag{A.15}$$

Im Allgemeinen ist $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$.

Inverse einer Matrix Zu jeder regulären (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert genau eine inverse Matrix (Kehrmatrix) $\boldsymbol{A}^{-1}$ mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}\,. \tag{A.16}$$

Es gelten die Beziehungen

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}\,, \tag{A.17}$$

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\,, \tag{A.18}$$

$$\det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\,. \tag{A.19}$$

Orthogonale Matrix Eine reguläre Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt orthogonal, wenn ihre Transponierte mit ihrer Inversen übereinstimmt:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}\,. \tag{A.20}$$

Damit besteht die Beziehung $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, aus der $\det \boldsymbol{A} = \pm 1$ folgt. Für $\det \boldsymbol{A} = +1$ heißt die Matrix $\boldsymbol{A}$ eigentlich orthogonal.

Bei jeder orthogonalen Matrix bilden die Zeilen- und Spaltenvektoren je ein System orthogonaler Einheitsvektoren. Die Inverse und Transponierte einer orthogonalen Matrix sind ebenfalls orthogonal. Die Produkte $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ zweier orthogonaler (n,n)-Matrizen sind ebenfalls orthogonal, wobei i. Allg. $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ ist.

Symmetrische und schiefsymmetrische Matrix Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt symmetrisch, wenn sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt, also $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ oder $a_{ik} = a_{ki}$. Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt schiefsymmetrisch (antisymmetrisch), wenn sie mit ihrer negativen Transponierten übereinstimmt, also $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ bzw. $a_{ik} = -a_{ki}$ und $a_{ii} = 0$.

Jede quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich in eine Summe aus einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}$ und einer schiefsymmetrischen (antisymmetrischen) Matrix $\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} = -\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}$ zerlegen:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{s}} = \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\,, \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} = \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\,. \tag{A.21}$$

Quadratische Form Eine quadratische Form ist ein skalarer Ausdruck der Gestalt

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \tag{A.22}$$

$$y(\boldsymbol{x}) = [x_1\ \dots\ x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k\,. \tag{A.23}$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist symmetrisch, also $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ bzw. $a_{ij} = a_{ji}$.

Wird die quadratische Form $y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$ mit einer allgemeinen (n,n)-Matrix $\boldsymbol{C}$ gebildet, so liefert nur der symmetrische Anteil $\boldsymbol{C}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}$ einen Beitrag zu y , nicht aber der schiefsymmetrische Anteil $\boldsymbol{C}_{\mathrm{a}} = -\boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}$, also

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}_{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{x} + \underbrace{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}_{\mathrm{a}}\,\boldsymbol{x}}_{0}\,.$$

Definite quadratische Formen und Matrizen Die quadratische Form $y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}$ bzw. die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ heißt

- *positiv (negativ) semidefinit*, wenn für beliebige reelle Vektoren $\boldsymbol{x}$ gilt

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} \geq 0 \quad (\leq 0)\,, \tag{A.24}$$

- *positiv (negativ) definit*, wenn für beliebige reelle Vektoren $\boldsymbol{x}$ außer $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ gilt

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} > 0 \quad (< 0)\,. \tag{A.25}$$

Es gelten folgende Aussagen:

- Eine symmetrische Matrix ist positiv (negativ) definit, wenn alle ihre Eigenwerte größer (kleiner) Null sind. Sie ist positiv (negativ) semidefinit, wenn sie keine negativen (positiven) Eigenwerte besitzt.
- Eine positiv (negativ) definite Matrix ist regulär, während eine positiv (negativ) semidefinite Matrix singulär ist.

Beispiele definiter quadratischer Formen für den Fall $n = 2$ zeigt Abb. A.1 .

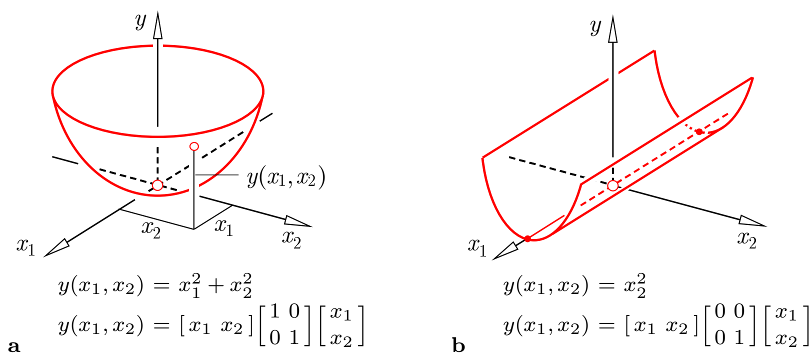

Abb. A.1 Definite quadratische Formen ($n = 2$). **a** Positiv definite Form. **b** Positiv semidefinite Form

Die positive Definitheit einer Matrix kann auch mit Hilfe des Satzes von SYLVESTER[1] überprüft werden. Die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$ ist dann und nur dann positiv definit, wenn sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten H_i , $i = 1, \ldots, n$, größer null sind, also

$$H_1 = a_{11} > 0\,, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\,, \quad \ldots\,, \quad H_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0\,. \tag{A.26}$$

[1] JAMES JOSEPH SYLVESTER, *1814 in London, †1897 in Oxford

A.2 Quaternionen

Die Quaternionen wurden um 1840 von HAMILTON eingeführt [34]. Wesentliche Beiträge sind aber bereits bei EULER und RODRIGUES [90] zu finden.

Eine Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ ist eine viergliedrige, komplexe Zahl, bestehend aus einen Realteil a_s mit der reellen Einheit 1 und drei Imaginärteilen a_x, a_y, a_z mit den imaginären Einheiten i, j und k,

$$\underline{\boldsymbol{a}} = a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, a_x + \mathrm{j}\, a_y + \mathrm{k}\, a_z\,. \tag{A.27}$$

Für die Produkte der Imaginäreinheiten gelten die Rechenregeln

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1\,, \tag{A.28}$$

$$\mathrm{i\,j} = \mathrm{k}\,, \quad \mathrm{j\,k} = \mathrm{i}\,, \quad \mathrm{k\,i} = \mathrm{j}\,, \tag{A.29}$$

$$\mathrm{i\,j} = -\mathrm{j\,i}\,, \quad \mathrm{j\,k} = -\mathrm{k\,j}\,, \quad \mathrm{k\,i} = -\mathrm{i\,k}\,. \tag{A.30}$$

Der Zusammenhang zur Vektorrechnung wird erhalten, indem der Realteil a_s als der *Skalarteil* und die Imaginärteile a_x, a_y, a_z als der *Vektorteil* $\boldsymbol{a}$ der Quaternion definiert werden. Im Folgenden wird die Spaltenschreibweise als 4-Vektor

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \hline a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{Skalarteil} \\ \text{Vektorteil} \end{matrix} \tag{A.31}$$

verwendet. Andere Schreibweisen sind $\underline{\boldsymbol{a}} = (a_\mathrm{s}, \boldsymbol{a})$ oder $\underline{\boldsymbol{a}} = a_\mathrm{s} + \boldsymbol{a}$. Aus (A.28) bis (A.30) folgen die Rechenregeln für Quaternionen.

Summe zweier Quaternionen Zwei Quaternionen

$$\underline{\boldsymbol{a}} = a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, a_x + \mathrm{j}\, a_y + \mathrm{k}\, a_z\,, \quad \underline{\boldsymbol{b}} = b_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, b_x + \mathrm{j}\, b_y + \mathrm{k}\, b_z \tag{A.32}$$

werden addiert, indem ihre Anteile addiert werden,

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{c}} &= \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} \\ \underline{\boldsymbol{c}} &= (a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, a_x + \mathrm{j}\, a_y + \mathrm{k}\, a_z) + (b_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, b_x + \mathrm{j}\, b_y + \mathrm{k}\, b_z) \\ \underline{\boldsymbol{c}} &= \underbrace{(a_\mathrm{s} + b_\mathrm{s})}_{c_\mathrm{s}} + \mathrm{i}\underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x} + \mathrm{j}\underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y} + \mathrm{k}\underbrace{(a_z + b_z)}_{c_z}\,. \end{aligned} \tag{A.33}$$

In Spaltenschreibweise lautet die Summe zweier Quaternionen

$$\begin{bmatrix} c_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} + b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{bmatrix}. \tag{A.34}$$

Die Summe zweier Quaternionen ist kommutativ, $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{a}}$.

Produkt zweier Quaternionen Das Produkt der Quaternionen $\underline{\boldsymbol{a}}$ und $\underline{\boldsymbol{b}}$ aus (A.32) wird hier durch den Multiplikationsoperator $\circ$ gekennzeichnet. Mit den Multiplikationsregeln der Imaginäreinheiten (A.28) bis (A.30) gilt

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{c}} &= \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} \\
\underline{\boldsymbol{c}} &= (a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\,a_x + \mathrm{j}\,a_y + \mathrm{k}\,a_z)(b_\mathrm{s} + \mathrm{i}\,b_x + \mathrm{j}\,b_y + \mathrm{k}\,b_z) \\
\underline{\boldsymbol{c}} &= \underbrace{(a_\mathrm{s}b_\mathrm{s} - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z)}_{c_\mathrm{s}} + \mathrm{i}\underbrace{(\,a_\mathrm{s}b_x + a_x b_\mathrm{s} + a_y b_z - a_z b_y)}_{c_x} + \\
&\quad + \mathrm{j}\underbrace{(\,a_\mathrm{s}b_y + a_y b_\mathrm{s} + a_z b_x - a_x b_z)}_{c_y} + \mathrm{k}\underbrace{(\,a_\mathrm{s}b_z + a_z b_\mathrm{s} + a_x b_y - a_y b_x)}_{c_z}\,.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Das Produkt zweier Quaternionen ist damit wieder eine Quaternion. Unter Verwendung des Skalar- und Vektorprodukts der Vektorteile lautet dieses Ergebnis in Spaltenschreibweise

$$\begin{aligned}
&\underline{\boldsymbol{c}} \quad = \quad \underline{\boldsymbol{a}} \quad \circ \quad \underline{\boldsymbol{b}} \\
&\begin{bmatrix} c_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s}\,b_\mathrm{s} - \boldsymbol{a}^\mathrm{T}\boldsymbol{b} \\ a_\mathrm{s}\,\boldsymbol{b} + b_\mathrm{s}\,\boldsymbol{a} + \widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Wegen der Einheitenverknüpfungen (A.30) bzw. der Nichtkommutativität des Vektorprodukts, $\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} = -\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$, ist das Produkt zweier Quaternionen nicht kommutativ, $\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} \neq \underline{\boldsymbol{b}} \circ \underline{\boldsymbol{a}}$. Es gelten die weiteren Rechenregeln

$$\underline{\boldsymbol{a}} \circ (\underline{\boldsymbol{b}} \circ \underline{\boldsymbol{c}}) = (\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}}) \circ \underline{\boldsymbol{c}} = \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} \circ \underline{\boldsymbol{c}} \qquad \text{(Assoziativgesetz)}, \tag{A.37}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} \circ (\underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{c}}) = \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{c}} \qquad \text{(Distributivgesetz)}\,. \tag{A.38}$$

Konjugierte Quaternion In Analogie zu den gewöhnlichen komplexen Zahlen wird die zu einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ konjugierte Quaternion $\overline{\underline{\boldsymbol{a}}}$ so definiert, dass die drei Imaginärteile, also der Vektorteil $\boldsymbol{a}$, das umgekehrte Vorzeichen haben,

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{\underline{\boldsymbol{a}}} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ -\boldsymbol{a} \end{bmatrix}. \tag{A.39}$$

Die konjugierte Quaternion des Produkts $\underline{\boldsymbol{c}} = \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}}$ lautet unter Berücksichtigung von (A.36)

$$\overline{\underline{\boldsymbol{c}}} = \overline{\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}}} = \overline{\underline{\boldsymbol{b}}} \circ \overline{\underline{\boldsymbol{a}}}\,. \tag{A.40}$$

Quaternionenprodukt in Matrizenschreibweise Das Produkt zweier Quaternionen $\underline{\boldsymbol{a}}$ und $\underline{\boldsymbol{b}}$ kann auch als das Produkt einer (4,4)-Matrix mit einem 4-Vektor berechnet werden. Hierzu wird aus dem Produkt in (A.36) entweder der erste Faktor $\underline{\boldsymbol{a}}$ oder der zweite Faktor $\underline{\boldsymbol{b}}$ als 4-Vektor nach rechts herausgelöst. Herauslösen des zweiten Faktors $\underline{\boldsymbol{b}}$ ergibt

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} & -\boldsymbol{a}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{a} & a_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} + \widetilde{\boldsymbol{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \\ \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \qquad \underline{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{a}}) \qquad\quad \underline{\boldsymbol{b}}\ .\end{aligned} \tag{A.41}$$

Herauslösen des ersten Faktors $\underline{\boldsymbol{a}}$ liefert dagegen

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} & -\boldsymbol{b}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{b} & b_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} - \widetilde{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \\ \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \qquad \overline{\underline{\boldsymbol{B}}}(\underline{\boldsymbol{b}}) \qquad\quad \underline{\boldsymbol{a}}\ .\end{aligned} \tag{A.42}$$

Betrag (Norm) einer Quaternion Der Betrag oder die Norm $|\underline{\boldsymbol{a}}|$ einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ ist eine reelle Zahl (Skalar) und lautet

$$|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_\mathrm{s}^2 + \boldsymbol{a}^\mathrm{T}\,\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_\mathrm{s}^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{A.43}$$

Mit (A.36) und (A.39) ist $|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\underline{\boldsymbol{a}} \circ \overline{\underline{\boldsymbol{a}}}}$.

Einsquaternion Das neutrale Element der Multiplikation von Quaternionen ist die Einsquaternion mit dem Nullvektor als Vektorteil,

$$\underline{\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{A.44}$$

Es gilt $\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{1}} = \underline{\boldsymbol{1}} \circ \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{a}}$.

Inverse Quaternion Die Inverse $\underline{\boldsymbol{a}}^{-1}$ einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ wird so definiert, dass das Produkt $\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{a}}^{-1}$ die Einsquaternion ergibt,

$$\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{a}}^{-1} = \underline{\boldsymbol{a}}^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{1}}\ . \tag{A.45}$$

Die Inverse einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ lautet

$$\underline{\boldsymbol{a}}^{-1} = \frac{\overline{\underline{\boldsymbol{a}}}}{|\underline{\boldsymbol{a}}|^2}\ . \tag{A.46}$$

Einheitsquaternion Eine Quaternion, deren Betrag gleich 1 ist, wird Einheitsquaternion genannt. Die Einheitsquaternion $\underline{\boldsymbol{e}}$ einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ ist

$$\underline{\boldsymbol{e}} = \frac{\underline{\boldsymbol{a}}}{|\underline{\boldsymbol{a}}|}\ . \tag{A.47}$$

Mit (A.46) und $|\underline{\boldsymbol{e}}| = 1$ stimmen die inverse und die konjugierte Einheitsquaternion überein,

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{-1} = \overline{\underline{\boldsymbol{e}}}\ . \tag{A.48}$$

Wegen (A.45) ist $\underline{\boldsymbol{e}} \circ \overline{\underline{\boldsymbol{e}}} = \overline{\underline{\boldsymbol{e}}} \circ \underline{\boldsymbol{e}} = \underline{\boldsymbol{1}}$.

Literaturverzeichnis

[1] Amirouche F (2006) Fundamentals of Multibody Dynamics. Theory and Applications. Birkhäuser, Boston

[2] Angeles J (2003) Fundamentals of Robotic mechanical systems. Theory, methods, and algorithms, 2nd edn. Springer, New York

[3] Angeles J, Kecskeméthy A (eds) (1995) Kinematics and Dynamics of Multi-body Systems. Springer, Wien

[4] Bae DS, Haug EJ (1988) A recursive formulation for constrained mechanical system dynamics. Part I: Open-loop systems. Mechanics of Structures and Machines 15:359–382

[5] Bae DS, Haug EJ (1988) A recursive formulation for constrained mechanical system dynamics. Part II: Closed-loop systems. Mechanics of Structures and Machines 15:481–506

[6] Bartkowiak R (2013) Analyse und Synthese überbestimmter Mechanisman mit Hilfe der Schraubentheorie. Verlag Dr. Hut, München

[7] Bauchau OA (2011) Flexible Multibody Dynamics. Springer, Dordrecht

[8] Baumgarte J (1972) Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1:490–501

[9] Bottema O, Roth B (1979) Theoretical Kinematics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam

[10] Brandl H, Johanni R, Otter M (1986) A very efficient algorithm for the simulation of robots and similar multibody systems without inversion of the mass matrix. In: Proc. IFAC/IFIP/IMACS Int. Symposium on Theory of Robots, Wien, pp 365–370

[11] Brandl H, Johanni R, Otter M (1987) An algorithm for the simulation of multibody systems with kinematical loops. In: Bautista E (ed) Proc.7th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Pergamon Press, Oxford, pp 407–411

[12] Bremer H (1988) Dynamik und Regelung mechanischer Systeme. Teubner, Stuttgart

[13] Bremer H (1993) Das Jourdainsche Prinzip. ZAMM 73:184–187

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme*,
DOI 10.1007/978-3-662-46687-2

[14] Bremer H (2008) Elastic Multibody Dynamics. A Direct Ritz Approach. Springer, Berlin

[15] Bremer H, Pfeiffer F (1992) Elastische Mehrkörpersysteme. Teubner, Stuttgart

[16] Craig JJ (2004) Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 3rd edn. Prentice Hall, Upper Saddle River (NJ)

[17] d'Alembert J (1743) Traité de Dynamique. David, Paris

[18] de Luca A, Oriolo G (1995) Modeling and control of nonholonomic mechanical systems. In: Angeles J, Kecskeméthy A (eds) Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems, Springer, Wien, pp 277–342

[19] Dresig H, Holzweissig F (2007) Maschinendynamik. Springer, Berlin

[20] Duditza F, Diaconescu D (1987) Ein sinnreiches Zahnräderdifferential aus dem antiken China. Maschinenbautechnik 36:268–271

[21] Eich-Söllner E, Führer C (1998) Numerical Methods in Multibody Dynamics. Teubner, Stuttgart

[22] Euler L (1776) Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 20:208–238

[23] Featherstone R (2008) Rigid Body Dynamics Algorithms, 2nd edn. Springer, New York

[24] Fischer O (1905) Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme. B.G.Teubner, Leipzig

[25] Fischer U, Stephan W (1972) Prinzipien und Methoden der Dynamik. Fachbuchverlag, Leipzig

[26] García de Jalón J, Bayo E (1994) Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. Springer, New York

[27] Gauss CF (1829) Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Journal für die reine und angewandte Mathematik 4:232–235

[28] Géradin M, Cardona A (2001) Flexible Multibody Dynamics, A Finite Element Approach. John Wiley, New York

[29] Gipser M (1999) Systemdynamik und Simulation. Teubner, Stuttgart

[30] Gosselin C, St-Pierre É (1997) Development and experimentation of a fast 3-dof camera-orienting device. The International Journal of Robotics Research 16:619–630

[31] Groche G, Ziegler V, Ziegler D, Zeidler E (eds) (1995) Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil II. Teubner, Stuttgart

[32] Hairer E, Wanner G (1996) Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential Algebraic Problems. Springer, Berlin

[33] Hamel G (1949) Theoretische Mechanik. Springer, Berlin

[34] Hamilton WR (1853) Lectures on Quaternions. Hodges and Smith, Dublin

[35] Haug EJ (1989) Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Vol. I: Basic Methods. Allyn and Bacon, Boston

[36] Heimann B, Gerth W, Popp K (2001) Mechatronik — Komponenten, Methoden und Beispiele, 2. Aufl. Fachbuchverlag, Leipzig

[37] Herrmann S, Kluess D, Kaehler M, Grawe R, Rachholz R, Souffrant R, Zierath J, Bader R, Woernle C (2015) A novel approach for

dynamic testing of total hip dislocation under physiological conditions. PloS one 10(12):e0145,798

[38] Heyden T (2006) Bahnregelung eines seilgeführten Handhabungssystems mit kinematisch unbestimmter Lastführung. Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Band 1100, VDI-Verlag, Düsseldorf

[39] Hiller M (1981) Analytisch-numerische Verfahren zur Behandlung räumlicher Übertragungsmechanismen. Fortschrittberichte VDI, Reihe 1, Band 76, VDI-Verlag, Düsseldorf

[40] Hiller M (1983) Mechanische Systeme. Springer, Berlin

[41] Hiller M (1995) Multiloop kinematic chains and dynamics of multiloop systems. In: Angeles J, Kecskeméthy A (eds) Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems, Springer, Wien, pp 75–215

[42] Hiller M, Kecskeméthy A, Woernle C (1986) A loop-based kinematical analysis of complex mechanisms. In: Proc. 19th Biennial ASME Mechanisms Conf., Columbus, ASME-Paper-86–DET-184

[43] Hooker W, Margulies G (1965) The dynamical attitude equations for an n-body satellite. J Astronaut Sci 12:123–128

[44] Huston RL (1990) Multibody Dynamics. Butterworth-Heinemann, Boston

[45] Husty M, Karger A, Sachs H, Steinhilper W (1997) Kinematik und Robotik. Springer, Berlin

[46] Isidori A (1995) Nonlinear Control Systems. Springer, Berlin

[47] Jourdain PEB (1909) Note on an analogue of Gauss' Principle of Least Constraints. The Quarterly Journal of Pure and Appl Math XL:153–197

[48] Kane TR, Levinson DA (1985) Dynamics, Theory and Applications. McGraw-Hill, New York

[49] Kecskeméthy A (1993) Objektorientierte Modellierung von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen. Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Band 88, VDI-Verlag, Düsseldorf

[50] Kecskeméthy A, Hiller M (1992) Automatic closed-form kinematics-solutions for recursive single-loop chains. In: DE-Vol. 47, Flexible Mechanisms, Dynamics, and Analysis, Proc. 22nd Biennial ASME Mechanisms Conf., Scottsdale, pp 387–393

[51] Kim S, Vanderploeg MJ (1986) A general and efficient method for dyamic analysis of mechanical systems using velocity transformation. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design 128:176–182

[52] Kortüm W, Lugner P (1994) Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen. Springer, Berlin

[53] Kreuzer E (1979) Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen. Fortschrittberichte VDI, Band 32, Reihe 11, VDI-Verlag, Düsseldorf

[54] Kreuzer E, Lugtenburg JB, Meissner HG, Truckenbrodt A (1994) Industrieroboter. Technik, Berechnung und anwendungsorientierte Auslegung. Springer, Berlin

[55] Krupp T (1999) Symbolische Gleichungen für Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen. Shaker Verlag, Aachen

[56] Lagrange JL (1811) Mécanique Analytique. L'Académie Royale des Sciences, Paris
[57] Levinson DA (1977) Equations of motion for multiple-rigid-body systems via symbolic manipulation. AIAA Journal of Spacecraft and Rockets 14:479–487
[58] Li H (1990) Ein Verfahren zur vollständigen Lösung der Rückwärtstransformaton für Roboter mit allgemeiner Geometrie. Dissertation, Universität Duisburg
[59] Luck K, Modler KH (1999) Getriebelehre. Springer, Berlin
[60] Magnus K (1971) Kreisel, Theorie und Anwendungen. Springer, Berlin
[61] Magnus K, Müller-Slany HH (2005) Grundlagen der Technischen Mechanik, 7. Aufl. Teubner, Stuttgart
[62] Maier T (2004) Bahnsteuerung eines seilgeführten Handhabungssystems — Modellbildung, Simulation und Experiment. Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Band 1047, VDI-Verlag, Düsseldorf
[63] Maisser P (1988) Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen. ZAMM 68:463–481
[64] Matschinsky W (2007) Radführungen der Straßenfahrzeuge: Kinematik, Elasto-Kinematik und Konstruktion, 3. Aufl. Springer, Berlin
[65] Merlet JP (2006) Parallel Robots, 2nd edn. Springer, Berlin
[66] MSC.Software (2010) Adams. http://www.msc.software.com
[67] Müller A (2005) Singuläre Phänomene in der Kinematik von Starrkörpermechanismen. Shaker Verlag, Aachen
[68] Murray RM, Li Z, Sastry S (1994) A Mathematical Introduction to Robot Manipulation. CRC Press, Boca Raton
[69] Neĭmark JI, Fufaev NA (1972) Dynamics of Nonholonomic Systems. American Mathematical Society, Providence (RI)
[70] Neugebauer R (ed) (2006) Parallelkinematische Maschinen: Entwurf, Konstruktion, Anwendung. Springer, Berlin
[71] Newton I (1687) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Royal Society, London
[72] Nikravesh PE (1988) Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs
[73] Nikravesh PE (2004) An overview of several formulations for multibody dynamics. In: Talabă D, Roche T (eds) Product Engineering, Springer, pp 189–226
[74] Nikravesh PE (2007) Planar Multibody Dynamics: Formulation, Programming and Applications. CRC Press, New York
[75] Nikravesh PE, Affifi H (1994) Construction of the equations of motion for multibody dynamics using point and joint coordinates. In: Pereira M, Ambrósio J (eds) Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems, Kluwer Academic Publishers, Boston, pp 32–60
[76] Nikravesh PE, Gim G (1993) Systematic construction of the equations of motion for multibody systems containing closed kinematic loops. Journal of Mechanical Design 115(1):143–149

[77] Orlandea N, Chace M, Calahan D (1977) A sparsity-oriented approach to the dynamic analysis and design of mechanical systems — Parts I and II. Journal of Engineering for Industry 99:773–784
[78] Papastavridis JG (2002) Analytical Mechanics. Oxford University Press, Oxford
[79] Pars L (1968) A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London
[80] Pfeiffer F (2006) Mechanical System Dynamics. Springer, Berlin
[81] Pfeiffer F, Glocker C (1996) Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. John Wiley, New York
[82] Pfeiffer F, Schindler T (2014) Einführung in die Dynamik, 3. Aufl. Springer Vieweg, Berlin
[83] Pietruszka WD (2012) MATLAB in der Ingenieurpraxis, 3. Aufl. Vieweg+Teubner, Wiesbaden
[84] Popp K, Schiehlen W (1993) Fahrzeugdynamik. Teubner, Stuttgart
[85] Rein U (1994) Recursive dynamics of overconstrained mechanisms. In: DE-Vol. 71, Machine Elements and Machine Dynamics, Proc. 23rd Biennial ASME Mechanisms Conf., Minneapolis, pp 375–381
[86] Rein U (1997) Effiziente objektorientierte Simulation mit dem rekursiven Formalismus. Dissertation, Universität Stuttgart
[87] Rill G, Schaeffer T (2014) Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation, 2. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden
[88] Roberson R, Schwertassek R (1998) Dynamics of Multibody Systems. Springer, Berlin
[89] Roberson R, Wittenburg J (1966) A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies with reference to the problem of satellite attitude control. In: Proc. 3rd IFAC Congress, London, IFAC, pp 46D.2–46D.9
[90] Rodrigues O (1840) Des lois géometriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considerés indépendamment des causes qui peuvent les produire. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5:380–440
[91] Samin JC, Fisette P (2003) Symbolic Modeling of Multibody Systems. Kluwer, Dordrecht
[92] Schatz P (1998) Die Welt ist umstülpbar: Rhythmusforschung und Technik, 3. Aufl. Niggli Verlag, Sulgen
[93] Schiehlen W (1990) Multibody Systems Handbook. Springer, Berlin
[94] Schiehlen W, Eberhard P (2014) Technische Dynamik, 4. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden
[95] Schramm D, Hiller M, Bardini R (2013) Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen, 2. Aufl. Springer, Berlin
[96] von Schwerin R (1999) Multibody System Simulation. Numerical Methods, Algorithms, and Software. Springer, Berlin
[97] Schwertassek R, Wallrapp O (1999) Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme. Vieweg-Verlag, Braunschweig

[98] Shabana A (2005) Dynamics of Multibody Systems, 3rd edn. Cambridge University Press, Cambridge
[99] Shampine L, Gordon M (1984) Computer-Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Vieweg-Verlag, Braunschweig
[100] Shepperd SW (1978) Quaternion from rotation matrix. AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics 1:223–224
[101] Simpack AG (2010) SIMPACK. http://www.simpack.com
[102] Stelzle W, Kecskeméthy A, Hiller M (1995) A comparative study of recursive methods. Archive of Applied Mechanics 66:9–19
[103] Szabó I (1987) Geschichte der mechanischen Prinzipien, 3. Aufl. Birkhäuser, Basel
[104] Valášek M, Stejskal V (1996) Kinematics and Dynamics of Machinery. Dekker, New York
[105] VDI-Richtlinie 2120 (2003) Vektorrechnung, Grundlagen für die praktische Anwendung. Beuth-Verlag, Berlin
[106] VDI-Richtlinie 2739 Blatt 1 (1991) Matrizenrechnung, Grundlagen für die praktische Anwendung. Beuth-Verlag, Berlin
[107] VDI-Richtlinie 2739 Blatt 2 (1996) Matrizenrechnung, Anwendungen in der Kinematik und bei Eigenwertproblemen. Beuth-Verlag, Berlin
[108] Vereshchagin AF (1974) Computer simulation of the dynamics of complicated mechanisms of robot-manipulators. Engineering and Cybernetics 6:65–70
[109] Walker M, Orin D (1982) Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 104:205–211
[110] Wehage RA (1988) Application of matrix partitioning and recursive projection to order n solution of constrained equations of motion. In: Proc. 20th Biennial ASME Mechanisms Conf., Orlando, pp 221–230
[111] Wittenburg J (2008) Dynamics of Multibody Systems, 2nd edn. Springer, Berlin
[112] Wittenburg J (2016) Kinematics. Theory and Applications, 1st edn. Springer, Berlin
[113] Woernle C (1988) Ein systematisches Verfahren zur Aufstellung der geometrischen Schließbedingungen in kinematischen Schleifen mit Anwendung bei der Rückwärtstransformation für Industrieroboter. Fortschrittberichte VDI, Reihe 18, Band 59, VDI-Verlag, Düsseldorf
[114] Zierath J (2015) Dynamik elastischer Mehrkörpersysteme - Theorie, Entwurf, Regelung, Messung und Validierung am Beispiel von Windenergieanlagen. Verlag Dr. Hut, München
[115] Zierath J, Woernle C, Heyden T (2009) Elastic multibody models of transport aircraft high-lift mechanisms. Journal of Aircraft 46:1513–1524
[116] Zierath J, Rachholz R, Woernle C (2016) Field test validation of Flex5, MSC.Adams, alaska/Wind and SIMPACK for load calculations on wind turbines. Wind Energy 19(7):1201–1222
[117] Zurmühl R, Falk S (1997) Matrizen 1, Grundlagen. Springer, Berlin

Sachverzeichnis

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme*,
DOI 10.1007/978-3-662-46687-2