Anmerkungen.

1) *Art. 5*, No. XIII—XXIII. Es sei daran erinnert, dass in *Gauss'* Schreibweise $\sin t^n = (\sin t)^n$ ist.

2) S. 15. Für *contiguus* wurde, statt der von *Gauss* in der Anzeige S. 3 vorgeschlagenen Verdeutschung *verwandt*, das Wort *benachbart* darum gewählt, weil dasselbe auch in der Zahlentheorie bei den „benachbarten Formen" üblich ist. Herr *Kummer* gebrauchte in einer Vorlesung über die hypergeometrische[1]) Reihe den Ausdruck „angrenzend".

3) *Art. 12*, S. 21. Dass die Kettenbrüche im letzteren Falle convergiren, ist bei *Schlömilch*, *Algebraische Analysis*, § 70 bewiesen.

4) *Art. 14*, S. 23. Die a. a. O. auftretende hypergeometrische[1]) Reihe ist

$$X = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6.8}{5.7}xx + \frac{6.8.10}{5.7.9}x^3 + \frac{6.8.10.12}{5.7.9.11}x^4 + \cdots\right)$$

oder als Kettenbruch

$$\cfrac{\frac{4}{3}}{1 - \cfrac{\frac{6}{5}x}{1 + \cfrac{\frac{2}{5.7}x}{Q}}}$$

wo Q den im Text angegebenen Kettenbruch bedeutet. Das Bildungsgesetz der Coefficienten von x ist dabei

$$\frac{(n+2)(n+5)}{(2n+1)(2n+3)}, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist,}$$

und

$$\frac{(n-3)n}{(2n+1)(2n+3)}, \text{ wenn } n \text{ gerade ist.}$$

Die ferner im Text angeführte Gleichung für $x - \xi$ folgt unmittelbar aus der Definition von ξ durch die Beziehung

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)},$$

wenn für X der obige Kettenbruch gesetzt wird.

---

[1]) Vgl. Anmerkung 11.

5) *Art. 15*, S. 26. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus der *Raabe*schen Convergenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1$$

(*Baumgartner* u. *v. Ettingshausen*, Zeitschr. für Physik u. Math., Bd. X, Wien 1832, § 11.) Vgl. im Uebrigen *Schlömilch*, Algebr. Analysis § 26. *Stern*, Desgl. § 67 ff., *Weierstrass*, Ueber die analytischen Facultäten (*Crelle Journ.* Bd. 51, Art. 5, V—VII.)

6) *Art. 22*, S. 34. Nach *Kramp* (Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, à Leipsic 1799. 4⁰) ist

$$a^{b|c} = a(a+c)(a+2c)\ldots(a+\overline{b-1}c).$$

Vgl. *Klügel*, Math. Wörterbuch, Art. „*Facultät*, numerische". (II. 1805, S. 175 ff. und das Supplement von *Grunert* 1833—1836, II. 285—319.)

7) *Art. 25*, S. 37. Man bemerkt leicht, dass aus [54] durch Multiplication mit $1 - z$ folgt

$$\Pi(1-z).\Pi z = \frac{(1-z)z\pi}{\sin z\pi},$$

wodurch die Berechnung von Πz für $z = \frac{1}{2} \cdots\cdot 1$ auf Πz für $z = 0 \ldots\ldots \frac{1}{2}$ zurückgeführt ist.

8) *Art. 26*, S. 38. Formel [57] ist, wegen $\Gamma z = \Pi(z-1)$ gleichbedeutend mit

$$\Gamma z\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na}\,\Gamma(na),$$

welche Gleichung zuerst von *Legendre* (Traité des fonctions elliptiques, II. 444) gegeben und ausser von *Cauchy* und *Crelle* auch von *Dirichlet* (Sur les intégrales Eulériennes. *Crelle Journ.* XV) bewiesen wurde.

9) *Art. 28*, S. 40. Nach Herrn *Scherings* Mitteilung (*Gauss'* Werke, III. 230) enthält *Gauss'* Handexemplar der *Disquisitiones* bei diesem Art. die Aufzeichnung:

„Die beste Definition von Π ist, dass $\Pi m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(m+1)x} e^{-e^x}\,dx$."

10) *Art. 29*, S. 41. Hr. *Schering* teilt (a. a. O.) aus *Gauss'* Handexemplar noch folgende Umformung mit:

$$[58] \quad \log \Pi z = \left(z+\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}P + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}Q + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}R + \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{5}S + \text{etc.},$$

die unmittelbar aus 61, 62 und 57 abgeleitet werden könne. Ferner finde sich in einem Notizbuche (nach dem Jahre 1847), mit Hilfe der *Euler*schen Form der Gleichung 58, der Wert von $\log\Pi(10+i)$ berechnet und daraus

$$\log \Pi i = 9{,}717\,3075 - 17^\circ\,16'\,57''\,693\,i$$
$$\Pi i = +\,0{,}498\,0156 - 0{,}154\,9496\,i.$$

11) *Art. 29*, S. 41. *Gauss* gebraucht hier den Ausdruck „hypergeometrische Reihe" für die Reihe der *Bernoulli*schen Zahlen wohl in dem Sinne, dass diese Reihe und andere von der im Texte beschriebenen Art schliesslich *stärker* divergiren, als jede wachsende *geometrische* Reihe. Man pflegt solche Reihen jetzt nach *Legendre* (Exercices de calcul intégral, I. 267) *halbconvergent* oder *semiconvergent* zu nennen, unter der *hypergeometrischen* Reihe aber die von *Gauss* mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnete zu verstehen, bei der man die in den Coefficienten auftretenden Elemente auch wohl vermehrt, so dass man z. B. hat

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{\gamma . \delta} x + \frac{\alpha . \alpha + 1 . \beta . \beta + 1}{\gamma . \gamma + 1 . \delta . \delta + 1} x^2 + \cdots$$

Man kann auch mit *Scheibner* (*Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz*, Leipzig 1860. § 25) die hypergeometrische Reihe als solche Potenzreihe definiren, bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Coefficienten sich auf die Form

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \cdots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \cdots}$$

bringen lässt, also auf die Form, an die *Gauss* im *Art. 16* seine Convergenz-Untersuchung geknüpft hat.

Zuerst findet sich der Name in der 1655 erschienenen *Arithmetica infinitorum* von *Wallis* (Scholium zu Propos. 190. *Opera math.* I. Oxoniae 1695, S. 466. Vgl. auch *Dedicatio* S. 359.) Dort wird der *gleichmässigen* geometrischen Reihe (*progressio Geometrica aequabilis*), bei der jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit *derselben* Zahl entsteht, die *hyper*geometrische Reihe gegenübergestellt, bei der die Multiplicatoren *ungleiche*, wachsende oder abnehmende, Zahlen sind. So ist die Reihe $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{35}{16} \cdots$ eine abnehmende hypergeometrische Reihe (*progr. Hyper-geometrica decrescens*), weil die Glieder

$$1, \quad 1 . \frac{3}{2}, \quad 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}, \quad 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots$$

durch Multiplication mit abnehmenden Factoren aus einander hervorgehen. Entsprechend dem Sachverhalt bei der geometrischen Reihe fasst *Wallis* jedes Glied seiner Reihen als *hypergeometrisches Mittel* zwischen dem vorhergehenden und dem folgenden Gliede auf. Der zwischen 1 und $^3/_2$ einzuschaltende Mittelwert giebt dann das Verhältnis der Kreisfläche zum umbeschriebenen Quadrat an und wird (*Prop. 191*) durch das nach *Wallis* benannte Product

$$\frac{3.3.5.5.7.7\ldots.}{2.4.4.6.6.8\ldots.},$$

sowie durch den *Brouncker*schen Kettenbruch — bekanntlich den ersten seiner Art —

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}}$$

dargestellt. Als geschichtlich bemerkenswert sei noch erwähnt, dass *Wallis* für das hypergeometrische Mittel ein besonderes Operationszeichen einführt, welches — wie das Wurzelzeichen beim geometrischen Mittel — die nicht immer „in wirklichen Zahlen" (*veris numeris*) ausführbare Rechnung andeuten soll. Diesem Symbol ist indessen das erhoffte Bürgerrecht in der Mathematik versagt geblieben.

Bei *Euler* (*De termino generali serierum hypergeometricarum.* Nova Acta Petrop. VII. 1776, pg. 42) lautet das $n$te Glied solcher Reihe, unter Bezugnahme auf *Wallis*,

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+\overline{n-1}b),$$

und ebenso definirt *Klügel* (*Math. Wörterbuch* II. 723). Indessen ist, wie wir gesehen haben, die *Wallis* sche Form schon allgemeiner.

12) *Art. 40*, S. 57. Formel [82] ist schon von *Euler* gegeben (Acta Petrop. XII.) Vgl. *Klügel* (*Grunert*) Math. Wörterbuch V. 373—375 „Umformung der Reihen" Art. 24. 25, sowie *Kummer*, „Ueber die hypergeometrische Reihe $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$" *Crelle Journ.* Bd. 15. Gleichung 17 u. 18.

13) *Art. 45*, S. 64. Wird in

$$\lim_{\omega=0}\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t+\omega)\Pi(\beta-\gamma+t+\omega)}{\Pi(t-\gamma+1+\omega)\Pi(t+\omega)}x^{1+t-\gamma+\omega}\right.$$
$$\left.-\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t)\Pi(\beta-\gamma+t)}{\Pi(t-\gamma+1)\Pi t}x^{1+t-\gamma}\right\}$$

der Subtrahendus gleich $V(t)$ gesetzt, so ist der gesuchte Grenzwert offenbar $\frac{dV}{dt}$, und dann

$$\left[\frac{dV}{Vdt}\right]_{\gamma=-k}=\Psi(\alpha+k+t)+\Psi(\beta+k+t)-\Psi(t+k+1)-\Psi t+\log x,$$

woraus sich der unter das Summenzeichen zu setzende Wert von $\frac{dV}{dt}$ ergiebt.

Gauss hat diesen Weg nicht eingeschlagen, sondern da es auf die Wertbestimmung des obigen Ausdrucks für einen gewissen Wert von $-\gamma$ ankommt, den Ausdruck lieber als Function von $-\gamma$ behandeln wollen; hierdurch war er genötigt, $-\gamma$ auch in die Factoren Πt und $\Pi(t+\omega)$ der Nenner einzuführen, was er durch Hinzufügung des für $\omega=0$ verschwindenden Gliedes $-k-\gamma$ bewirkte. Der Ausdruck wird so

$$\lim_{\omega=0}\frac{U(-\gamma+\omega)-U(-\gamma)}{\omega}=-\frac{dU(-\gamma)}{d(-\gamma)}=-\frac{dU}{d\gamma}.$$

14) *Art. 45*, S. 64. Es ist vielleicht nicht überflüssig, auf die von *Gauss* zur Berechnung von Y angewendete Reihen-Transformation hinzuweisen, die hier noch verborgener liegt, als die von *Abel* in der Abhandlung über die binomische Reihe gegebene [Beweis zum dritten der vorausgeschickten Sätze über Convergenz und Divergenz. *Crelle Journ.* Bd. 1. *Oeuvres I.*]. Man hat zunächst

$$Y=\sum_{t=0}^{\infty}u_t v_t,\quad \text{wo}$$

$$u_t=\log x+\Psi(\alpha+t+k)+\Psi(\beta+t+k)-\Psi(t+k+1)-\Psi t$$

$$v_t=\frac{\Pi(\alpha+t+k)\Pi(\beta+t+k)}{\Pi(\alpha+k)\Pi(\beta+k)}\frac{\Pi(k+1)}{\Pi(t+k+1)}\frac{x^t}{\Pi t}$$

Nun ist allgemein

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots = u_0 (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots) \\ + (u_1 - u_0) v_1 + (u_2 - u_0) v_2 + (u_3 - u_0) v_3 + \cdots,$$

oder, wenn wir

$$u_1 - u_0 = A,\ u_2 - u_1 = B,\ u_3 - u_2 = C,\ \text{u. s. w.}$$

setzen,

$$Y = u_0 \sum_0^\infty v_t + A v_1 + (A + B) v_2 + (A + B + C) v_3 + \cdots,$$

und dies liefert, mit Rücksicht auf den im Anschluss an I. in diesem Art. gefundenen Wert von $\sum v_t$, wenn dort k statt $-\gamma$ geschrieben wird, die *Gauss*sche Formel.

15) *Art. 48,* S. 68. „Der Art. 48“ bemerkt Herr *Schering (Gauss' Werke* III. 230) „ist hier so wiedergegeben, wie er nach vielfachen Durchstreichungen von Worten und ganzen Sätzen in der Handschrift gelesen werden mus ; nach Absicht des Verfassers dürften aber wohl noch die Worte „*e solo theoremate binomiali*“ fortzulassen sein.“ Die Tilgung dieser Worte in der Handschrift scheint hiernach zweifelhaft zu sein; wie bereits gelegentlich des Druckfehler-Verzeichnisses zu der *Gauss*schen Abhandlung (Ztschr. f. Math. u. Phys. a. a. O. S. 101) bemerkt, ist ein innerer Grund für die Fortlassung jener Worte nicht ersichtlich. Zu erwähnen ist noch, dass in beiden bis jetzt erschienenen Auflagen des 3. Bandes der *Gauss*schen Werke die im Anfang des Art. aufgeführten Formelgruppen I—IV und VI—IX lauten, so dass die Nummern V und X, die wir hier hinzugefügt haben, dort ganz fehlen.

16) *Art. 51,* S. 71. Aus Art. 42.

17) *Art. 55,* S. 77. Folgender Nachweis dieser Behauptung, bei dem eine gütige Mitteilung des Herrn Prof. *Hamburger* in Berlin mit Dank benutzt ist, dürfte nicht unangebracht sein.

Aus $P = F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, 4y - 4y^2\right)$ folgt

$$\frac{dP}{dy} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta + \frac{1}{2}} F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \frac{3}{2}, 4y - 4y^2\right)(1 - 2y).$$

Für $y = \frac{1}{2}$ erscheint das Product rechter Hand, abgesehen von dem constanten Factor, zunächst in der Form $\infty . 0$, da in der Reihe F das vierte Element $= 1$ wird und die Convergenzbedingung V des Art. 15, wonach die Summe der beiden ersten Elemente kleiner als das dritte sein müsste, nicht erfüllt ist. Um den wahren Wert des Products zu finden, schreiben wir es nach [82], mit Rücksicht auf

$$1 - 2y = (1 - (4y - 4y^2))^{(\alpha+1)+(\beta+1) - \left(\alpha + \beta + \frac{3}{2}\right)},$$

in der Form

$$F\left(\beta + \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \beta + \frac{3}{2}, 4y - 4y^2\right).$$

Diese Reihe convergirt auch noch für $y = \frac{1}{2}$ und hat in diesem Falle nach [48] den Wert $\frac{\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\alpha\Pi\beta}$, so dass

$$\left[\frac{dP}{dy}\right]_{y=\frac{1}{2}} = 4\sqrt{\pi}\,\frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)},$$

also i. A. endlich und von Null verschieden wird. Dass aber $\frac{dP}{dy}$ an dieser Stelle das Vorzeichen wechselt, ergiebt sich leicht, wenn man in dem obigen Ausdruck des Differentialquotienten für y einmal $\frac{1}{2}-\varepsilon$, dann $\frac{1}{2}+\varepsilon$ setzt, wo ε eine beliebig kleine Grösse bedeutet. Die Reihe F hat in beiden Fällen das vierte Element $1-4\varepsilon^2$, convergirt also beidemal gegen dieselbe Summe, der Factor $1-2y=\pm 2\varepsilon$ dagegen wechselt das Vorzeichen, somit auch $\frac{dP}{dy}$ selbst.

18) *Art. 56*, S. 79. Auch Gleichung 57 scheint erforderlich zu sein.

19) *Art. 57*, S. 80. Formel [110]. In den *Werken* lautet der Zähler des Bruches linker Hand $\alpha-\frac{1}{2}\cdot\beta-\frac{1}{2}$. Die geänderte Formel ist u. a. leicht durch die Annahme $\alpha=\beta=1$, $x=\cos^2 t$, mit Rücksicht auf Art. 5, XIV als richtig zu bestätigen. Dass das Versehen unbemerkt blieb, erklärt sich einerseits daraus, dass *Gauss* den zweiten Teil seiner Untersuchungen noch nicht druckfertig gemacht hatte, während andererseits die Formel die letzte des ganzen Werkes ist, aus der weitere Schlüsse nicht gezogen wurden. Vgl. auch das schon angeführte „Verzeichniss von Druckfehlern u. s. w." Nr. 23.